



Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych.
Dowodzenie tożsamości trygonometrycznych -
przykłady.

Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych. Dowody na zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi. Przykłady.

Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych.

Dowodzenie tożsamości trygonometrycznych - przykłady.

W tym materiale zawarte są przykłady obliczania wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych. Są w nim też zaprezentowane przykłady dowodzenia równości i nierówności związanych z funkcjami trygonometrycznymi kątów ostrych. Zapoznaj się z tym materiałem przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań zawartych w [Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych. Dowodzenie tożsamości trygonometrycznych - zadania](#).

Przykład 1

Obliczmy wartość wyrażenia

$$\frac{\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ - 3}{\cos^2 63^\circ + \sin^2 63^\circ + 1}.$$

Ponieważ dla dowolnego kąta ostrego α zachodzi równość

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

to

$$\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ = 1, \cos^2 63^\circ + \sin^2 63^\circ = 1.$$

Wobec tego

$$\frac{\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ - 3}{\cos^2 63^\circ + \sin^2 63^\circ + 1} = \frac{1 - 3}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Przykład 2

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{9}{11}$. Obliczmy wartość wyrażenia $\cos^2 \alpha$.

Ponieważ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

to

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

dla dowolnego kąta ostrego α .

Skoro $\sin \alpha = \frac{9}{11}$, to

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{9}{11}\right)^2 = 1 - \frac{81}{121} = \frac{40}{121}.$$

Przykład 3

Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Obliczymy wartość wyrażenia $3 - \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$.

Ponieważ

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

to

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha.$$

Zatem dla $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ otrzymujemy

$$3 - \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 3 - \cos \alpha = 3 - \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

Przykład 4

Wykażemy, że $\sin 38^\circ < \operatorname{tg} 38^\circ$.

Wiemy, że cosinus dowolnego kąta ostrego jest mniejszy od 1, więc

$$\cos 38^\circ < 1.$$

Mnożymy obie strony nierówności przez liczbę dodatnią $\frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ}$.

Zatem

$$\frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ} \cdot \cos 38^\circ < \frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ}.$$

Ponieważ

$$\frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ} = \operatorname{tg} 38^\circ,$$

więc

$$\sin 38^\circ < \operatorname{tg} 38^\circ,$$

co należało wykazać.

Przykład 5

Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Obliczymy wartość wyrażenia $2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.
Korzystając z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha.$$

Wobec tego

$$2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 2(1 - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = 2 - 2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 2 - 3 \cos^2 \alpha$$

Dla $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ mamy

$$2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 2 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 = 2 - \frac{3 \cdot 5}{9} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}.$$

Przykład 6

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = 0,3$. Obliczymy $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

Korzystając z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. Wobec tego dla $\sin \alpha = 0,3$ mamy:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - (0,3)^2 = 1 - 0,09 = \frac{91}{100}.$$

Ponieważ $\cos \alpha > 0$, więc otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10},$$

stąd

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{\sqrt{91}}{10}} = \frac{3}{\sqrt{91}} = \frac{3\sqrt{91}}{91}.$$

Przykład 7

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Obliczymy wartość wyrażenia $10 - 9 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

- I sposób

Skoro $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, to

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2 = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}.$$

Ponieważ $\cos \alpha > 0$, to $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ oraz

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Stąd

$$10 - 9 \operatorname{tg}^2 \alpha = 10 - 9 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^2 = 10 - 9 \cdot \frac{7}{9} = 10 - 7 = 3.$$

- II sposób

Korzystając z tożsamości stosowanych w poprzednich przykładach, wyrazimy $10 - 9 \operatorname{tg}^2 \alpha$ za pomocą $\sin \alpha$.

$$10 - 9 \operatorname{tg}^2 \alpha = 10 - 9 \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = 10 - 9 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 10 - 9 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Wtedy dla $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ otrzymujemy

$$10 - 9 \operatorname{tg}^2 \alpha = 10 - 9 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 10 - 9 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = 10 - 9 \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{16}{9} = 3.$$

Przykład 8

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$. Obliczmy $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Jeśli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$, to $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{11}}{5}$, skąd $\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5} \cos \alpha$. Ponadto $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, czyli

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{5} \cos \alpha \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1.$$

Zatem

$$\frac{11}{25} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$11 \cos^2 \alpha + 25 \cos^2 \alpha = 25$$

$$36 \cos^2 \alpha = 25$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{25}{36}.$$

Ponieważ $\cos \alpha > 0$, to

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

Przykład 9

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{8}$. Obliczmy $\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 6 \sin \alpha}$.

- I sposób

Najpierw obliczamy $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Jeśli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{8}$, to $\sin \alpha = \frac{3}{8} \cos \alpha$. Ponadto $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, skąd

$$\left(\frac{3}{8} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1.$$

Wobec tego

$$\frac{9}{64} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$9 \cos^2 \alpha + 64 \cos^2 \alpha = 64$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{64}{73}.$$

Ponieważ $\cos \alpha > 0$, to $\cos \alpha = \sqrt{\frac{64}{73}} = \frac{8\sqrt{73}}{73}$ i $\sin \alpha = \frac{3}{8} \cdot \frac{8\sqrt{73}}{73} = \frac{3\sqrt{73}}{73}$,

czyli wartość danego wyrażenia to

$$\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 6 \sin \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3\sqrt{73}}{73} + \frac{8\sqrt{73}}{73}}{2 \cdot \frac{8\sqrt{73}}{73} - 6 \cdot \frac{3\sqrt{73}}{73}} = \frac{14\sqrt{73}}{-2\sqrt{73}} = -7.$$

- II sposób

Zauważmy, że jeśli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{8}$, to $\sin \alpha = \frac{3}{8} \cos \alpha$. Uwzględniając tę zależność, otrzymujemy

$$\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 6 \sin \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{8} \cos \alpha + \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 6 \cdot \frac{3}{8} \cos \alpha} = \frac{\frac{7}{4} \cos \alpha}{-\frac{1}{4} \cos \alpha} = -7.$$

- III sposób

Korzystając z tożsamości $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, wyrazimy $\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 6 \sin \alpha}$ za pomocą $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 6 \sin \alpha} = \frac{\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha} - \frac{6 \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha + 1}{2 - 6 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Skoro $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{8}$, to

$$\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 6 \sin \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha + 1}{2 - 6 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{8} + 1}{2 - 6 \cdot \frac{3}{8}} = \frac{\frac{7}{4}}{-\frac{1}{4}} = -7.$$

Przykład 10

Wykażemy, że jeżeli kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 9$, to $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 79$.

Skoro $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 9$, to

$$\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = 81.$$

Stąd

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 81,$$

czyli

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 81.$$

Wynika z tego, że $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 79$, a to właśnie należało wykazać.

Przykład 11

Wykażemy, że dla każdego kąta ostrego α wartość wyrażenia

$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2$ jest równa 2.

Przekształcamy wyrażenie

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 =$$

$$= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha =$$

$$= 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

Korzystamy z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, skąd

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2 \cdot 1 = 2,$$

a to właśnie należało wykazać.

Przykład 12

Wykażemy, że jeżeli kąt α jest ostry i $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$, to $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{337}{625}$.

Jeśli $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$, to $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2$, skąd

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{49}{25}.$$

Ponieważ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, to $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{49}{25} - 1$, czyli $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$.

Przekształcając tożsamość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy kolejno

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1$$

$$\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2.$$

Uwzględniając równość $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$, otrzymujemy

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{12}{25}\right)^2,$$

skąd

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{2 \cdot 144}{625} = \frac{337}{625}.$$

Koniec dowodu.

Przykład 13

W pewnym trójkącie prostokątnym suma sinusów kątów ostrych jest równa $\frac{31}{25}$.

Wykażemy, że iloczyn sinusów tych kątów jest równy $\frac{168}{625}$.

Oznaczmy przez α i β miary kątów ostrych w danym trójkącie. Wtedy

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

Z warunków zadania mamy $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{31}{25}$, czyli $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{31}{25}$.

Wynika z tego, że

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \left(\frac{31}{25}\right)^2 = \frac{961}{625}$$

Ponadto

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Zatem $1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{961}{625}$, skąd

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{961}{625} - 1 = \frac{336}{625},$$

czyli

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{168}{625}.$$

Koniec dowodu.

Przykład 14

Wykażemy, że dla każdego kąta ostrego α prawdziwa jest nierówność

$$\sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}.$$

Skorzystamy z udowodnionej wcześniej tożsamości

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2,$$

którą przekształcimy do postaci

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2.$$

Ponieważ kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, to $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 \geq 0$ dla dowolnego kąta ostrego α .

Wynika z tego, że

$$2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \geq 0$$

czyli

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \leq 2.$$

Stąd

$$\sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}.$$

Koniec dowodu.