

Wykorzystanie przedziałów do opisu rozwiązań nierówności

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Potrafisz już zaznaczać na osi, odczytywać i zapisywać przedziały. Wiesz też jak wykonywać na nich działania.

Rozwiązanie nierówności możemy zaznaczyć na osi liczbowej oraz zapisać w postaci przedziału. W przypadku rozwiązywania nierówności podwójnych oraz układów nierówności, korzystanie z graficznej interpretacji, bardzo ułatwia znalezienie zbioru rozwiązań.

Twoje cele

- Zapiszesz rozwiązanie nierówności w postaci przedziału i zaznaczysz je na osi liczbowej.
- Zapiszesz w postaci nierówności przedział przedstawiony na osi liczbowej.
- Znajdziesz zbiór rozwiązań nierówności podwójnej oraz układu nierówności.
- Zapiszesz nierówności, których rozwiązaniem jest dany przedział.

Przeczytaj

Przyjrzyj się przykładom przedstawiającym jak zapisuje się **zbiór rozwiązań nierówności** oraz jak przedstawia się taki zbiór na osi liczbowej.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność, a następnie zaznaczymy jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapiszemy w postaci przedziału.

$$4 \cdot (x - 2) - 5 \cdot (4 - x) \geq 2x$$

Rozwiązujemy nierówność, przekształcając ją równoważnie.

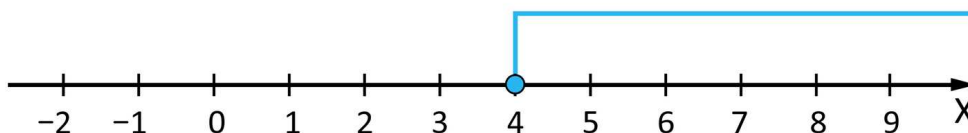
$$4x - 8 - 20 + 5x \geq 2x$$

$$7x \geq 28$$

$$x \geq 4$$

A zatem rozwiązaniem tej nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste, które są większe lub równe 4.

Zaznaczamy liczby spełniające taki warunek na osi liczbowej.



Zapisujemy zbiór rozwiązań w postaci przedziału.

$$x \in \langle 4, \infty \rangle$$

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność, a następnie zaznaczymy jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapiszemy w postaci przedziału.

$$\frac{3 \cdot (4 - x)}{2} + \frac{x + 5}{3} > 4x - 2\frac{2}{3}$$

Rozwiązujemy nierówność, przekształcając ją równoważnie.

$$\frac{3 \cdot (4-x)}{2} + \frac{x+5}{3} > 4x - 2\frac{2}{3} \quad | \cdot 6$$

$$9 \cdot (4-x) + 2 \cdot (x+5) > 6 \cdot (4x - 2\frac{2}{3})$$

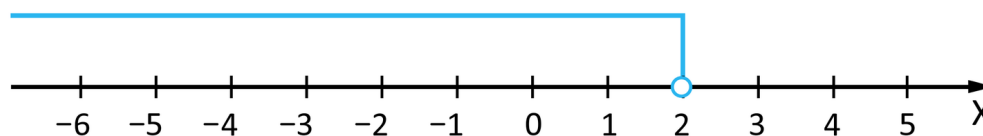
$$36 - 9x + 2x + 10 > 24x - 16$$

$$-31x > -62 \quad | : (-31)$$

$$x < 2$$

A zatem rozwiązaniem tej nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste, które są mniejsze od 2.

Zaznaczamy liczby spełniające taki warunek na osi liczbowej.



Zapisujemy zbiór rozwiązań w postaci przedziału.

$$x \in (-\infty, 2)$$

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność podwójną, a następnie zaznaczymy jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapiszemy w postaci przedziału.

$$-8 \leq 4 \cdot (x - 2) \leq 12$$

Ta nierówność ma niewiadomą tylko pomiędzy znakami nierówności. Możemy wtedy rozwiązywać nierówność, przekształcając jednocześnie całą nierówność.

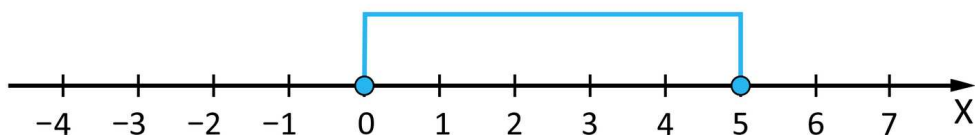
$$-8 \leq 4 \cdot (x - 2) \leq 12 \quad | : 4$$

$$-2 \leq x - 2 \leq 3 \quad | +2$$

$$0 \leq x \leq 5$$

Rozwiązaniem tej nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste, które są większe lub równe 0 i jednocześnie mniejsze lub równe od 5.

Zaznaczamy liczby spełniające taki warunek na osi liczbowej.



Zapisujemy zbiór rozwiązań w postaci przedziału.

$$x \in \langle 0, 5 \rangle$$

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność podwójną, a następnie zaznaczymy jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapiszemy w postaci przedziału.

$$4x - 2 < 6 - x < 5x - 2$$

W tej nierówności niewiadoma występuje po różnych stronach nierówności. Musimy zatem rozwiązać układ dwóch powstałych w ten sposób nierówności.

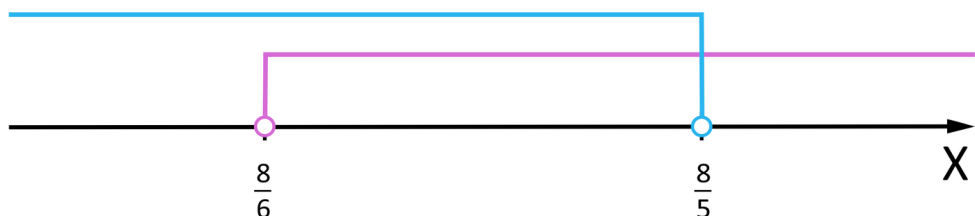
$$4x - 2 < 6 - x \text{ i } 6 - x < 5x - 2$$

Każdą z tych nierówności rozwiązujemy oddzielnie, ale zaznaczamy ich zbiory rozwiązań na jednej osi liczbowej.

$$4x - 2 < 6 - x \text{ i } 6 - x < 5x - 2$$

$$5x < 8 \quad | : 5 \text{ i } -6x < -8 \quad | : (-6)$$

$$x < \frac{8}{5} \text{ i } x > \frac{8}{6}$$



Pomiędzy nierównościami występuje spójnik „i”, a więc rozwiązaniem nierówności podwójnej jest zbiór, który jest iloczynem zaznaczonych przedziałów.

$$x \in \left(-\infty, \frac{8}{5}\right) \cap \left(\frac{8}{6}, \infty\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{8}{6}, \frac{8}{5}\right)$$

Rozwiązaniem nierówności jest więc przedział $\left(\frac{8}{6}, \frac{8}{5}\right)$.

Przykład 5

Rozwiążemy układ nierówności.

$$\begin{cases} 2x - 1 \leq 3 \cdot (x - 5) \\ 2 \cdot (x - 1) > 3 - (3x - 5) \end{cases}$$

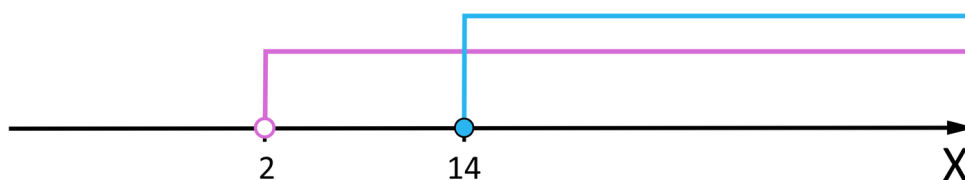
Każdą z nierówności rozwiązujemy oddzielnie, a ich zbiory rozwiązań zaznaczamy na jednej osi liczbowej.

$$2x - 1 \leq 3 \cdot (x - 5) \text{ i } 2 \cdot (x - 1) > 3 - (3x - 5)$$

$$2x - 1 \leq 3x - 15 \text{ i } 2x - 2 > 3 - 3x + 5$$

$$-x \leq -14 \quad | : (-1) \text{ i } 5x > 10 \quad | : 5$$

$$x \geq 14 \text{ i } x > 2$$



Układ nierówności spełniają liczby, które spełniają jednocześnie obie nierówności.

A więc rozwiązaniem tego układu jest zbiór, który jest iloczynem otrzymanych przedziałów.

$$x \in \langle 14, \infty \rangle \cap (2, \infty) \Rightarrow x \in \langle 14, \infty \rangle$$

Rozwiązaniem układu nierówności jest więc przedział $\langle 14, \infty \rangle$.

Przykład 6

Wiedząc, że liczby x należą do przedziału przedstawionego na osi liczbowej uzupełnimy nierówność: $4x + 5 > \dots$



Z rysunku możemy odczytać, że:

$$x > 2$$

Przekształcamy **nierówność równoważnie**, tak aby po lewej stronie nierówności otrzymać wyrażenie podane w treści zadania.

$$x > 2 \quad | \cdot 4$$

$$4x > 8 \quad | +5$$

$$4x + 5 > 13$$

A zatem nierówność należy uzupełnić liczbą 13.

Słownik

zbiór rozwiązań nierówności

zbiór wszystkich liczb spełniających daną nierówność

nierówności równoważne

nierówności posiadające taki sam zbiór rozwiązań

Film samouczek

Polecenie 1

Przeanalizuj film samouczek, a następnie na jego podstawie wykonaj polecenia 2 i 3.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1BrBnFqt>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego wykorzystania przedziałów do opisu rozwiązań nierówności.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówności. Zaznacz ich zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału.

a) $5 \cdot (x - 3) \geq 7 + 3x$

b) $7x - 4 \cdot (x + 5) \leq 5 + 2x < 6 \cdot (x - 3) + 11$


Polecenie 3

Wyznacz wartość parametru a , wiedząc, że rozwiązaniem nierówności

$$\frac{x-4}{4} \leq \frac{x+a}{2} - 2\frac{1}{4}$$

jest przedział $\langle 3, \infty \rangle$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rozwiąż nierówności.

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Zaznacz przedział, który jest rozwiązaniem nierówności podwójnej

$$-15 \leq 6 \cdot (x - 1) + 3 < 21.$$

$x \in (2, 4)$

$x \in (-2, 4)$

$x \in \langle -2, 4 \rangle$

$x \in \langle -2, 4 \rangle$

$x \in \langle 2, 4 \rangle$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary układ nierówności i jego rozwiązanie.

$$\begin{cases} 4 + 2 \cdot (x + 5) \geq 3x + 1 \\ 5x \leq 4 - \frac{x-1}{2} \end{cases}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{9}{11}\right)$$

$$\begin{cases} 4 - 2 \cdot (x + 5) \geq 3x - 1 \\ 4x + \frac{x-1}{2} \leq 5x \end{cases}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{10}{13}\right)$$

$$\begin{cases} 2 + \frac{x+5}{2} \geq 3x \\ \frac{5x-4}{2} \leq \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$$

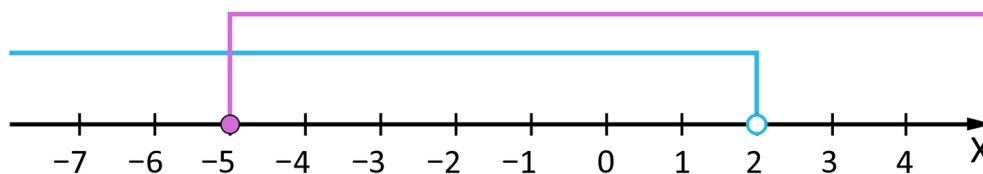
$$\begin{cases} 2 + \frac{x+5}{2} \geq 3x + 1 \\ 5x - 4 \leq x - 1 \end{cases}$$

$$x = 1$$

Ćwiczenie 5



Na rysunku poniżej przedstawiono interpretację graficzną pewnej nierówności.



Wskaż układ nierówności, którego dotyczy rysunek.

$$\begin{cases} \frac{x+3}{4} \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{3} < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+3}{4} \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{3} > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+3}{4} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{3} > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+3}{4} \geq \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{3} < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ćwiczenie 6



Wiedząc, że $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \cdot (2x - 1) - 5x + 4 \leq 5 - x\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2-x}{3} + 4 \leq \frac{12+x}{3}\}$, zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

$A \cap B = \langle 1, 2 \rangle$

$A \setminus B = (-\infty, 1)$

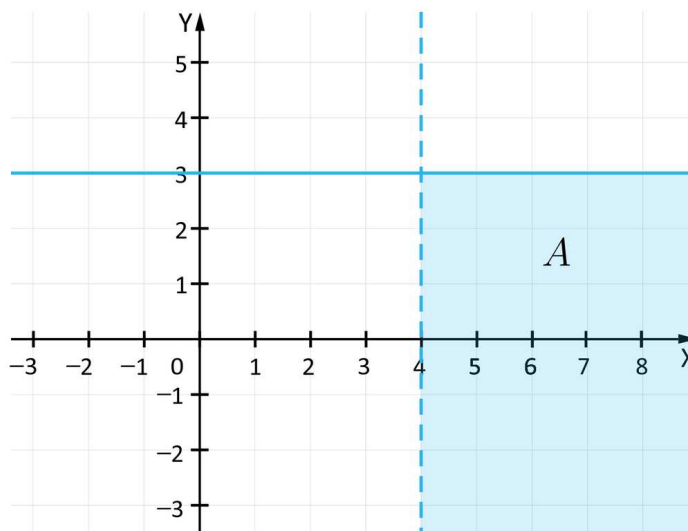
$B \setminus A = \langle 2, \infty \rangle$

$A \cup B = (1, \infty)$

Ćwiczenie 7



Wybierz nierówności określające współrzędne punktów należących do zbioru $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ i } y \in \mathbb{R}\}$ przedstawionego na rysunku poniżej.



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

$\frac{3y+6}{5} \leq 3$

$\frac{3x+3}{2} < 4,5$

$\frac{3y-6}{5} \leq 3$

$\frac{3x+3}{2} > 4,5$

$\frac{3x-3}{2} > 4,5$

$\frac{3y+6}{5} \geq 3$

Ćwiczenie 8



Wiedząc, że x jest liczbą należącą do przedziału przedstawionego na osi liczbowej, uzupełnij luki w nierównościach. Przeciągnij właściwą odpowiedź.



$$2x + 3 \leq A \Rightarrow A = \boxed{}$$

$$-2x + B \geq -5 \Rightarrow B = \boxed{}$$

$$Cx - 4 \leq 5 \Rightarrow C = \boxed{}$$

- 1 -3 -1 3 9 -6 -9 6

Ćwiczenie 9



Wyznacz wartość parametru t , wiedząc, że rozwiązaniem nierówności jest przedział $(-\infty, 5)$. Przeciągnij właściwą odpowiedź.

$$\frac{4x-6}{2} + t \leq x + 2 \Rightarrow t = \boxed{}$$

$$\frac{t-2x}{3} + 4 \geq 3x - 12 \Rightarrow t = \boxed{}$$

- 5 -7 -5 0 7 3 -3

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie przedziałów do opisu rozwiązań nierówności

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;

3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje rozwiązanie nierówności w postaci przedziału i zaznacza je na osi liczbowej
- zapisuje w postaci nierówności przedział przedstawiony na osi liczbowej
- zapisuje zbiór rozwiązań nierówności podwójnej oraz układu nierówności
- zapisuje nierówność, której rozwiązaniem jest dany przedział

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego
- konkurs zadaniowy w grupach

Formy pracy:

- praca w parach
- praca indywidualna
- praca w grupach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w parach zasady rozwiązywania nierówności liniowych oraz działań na przedziałach.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” oraz film samouczek.
2. Uczniowie konsultują z nauczycielem pojawiające się, a następnie wykonują indywidualnie polecenia umieszczone pod medium bazowym.
3. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy. W każdej grupie uczniowie losują zadania z puli za dwa, trzy i cztery punkty. Nauczyciel może wykorzystać ćwiczenia interaktywne lub przygotować dodatkowe zadania.
4. W każdej grupie uczeń, który zdobędzie największą liczbę punktów, otrzymuje ocenę z aktywności.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Przedziały liczbowe. Przedziały jako zbiory](#)
- [Równania i nierówności liczbowe. Przedziały liczbowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Multimedium może być wykorzystane przez uczniów jako pomoc przy rozwiązywaniu ćwiczeń interaktywnych. Może być również pomocne przy utrwalaniu w domu wiadomości z lekcji.