Funkcja kwadratowa - pojęcie

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Omówimy funkcje, we wzorze których zmienna występuje w drugiej potędze.
Wzory takich funkcji spotkamy na przykład w geometrii.

- Funkcja wyrażająca zależność między polem kwadratu, a długością a jego boku: $P(a) = a^2$
- Funkcja wyrażająca zależność między polem kwadratu a długością c jego przekątnej: $P(c) = \frac{1}{2}c^2$
- Funkcja wyrażająca zależność między polem trójkąta równobocznego a długością a jego boku: $P(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Funkcje takie występują też w fizyce.

- Funkcja wyrażająca zależność między długością drogi s przebytej w ruchu jednostajnie przyspieszonym a przyspieszeniem a w zależności od czasu t: $s(t) = \frac{1}{2}at^2$

Twoje cele

- Zastosujesz pojęcie i wzór funkcji kwadratowej.
- Określisz własności funkcji kwadratowej.

- Wykorzystasz własności trójmianu kwadratowego w zadaniach.

Przeczytaj

Trójmianem kwadratowym zmiennej x nazywamy wyrażenie postaci $ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są dowolnymi danymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$. Liczby a, b, c nazywamy współczynnikami trójmianu kwadratowego, zaś zmienna x może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste.

> **Definicja: funkcja kwadratowa**
>
> Jeżeli $a \neq 0$, to funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ w zbiorze liczb rzeczywistych nazywamy funkcją kwadratową.
>
> a, b, c - współczynniki liczbowe funkcji kwadratowej,
>
> c - wyraz wolny.
>
> Wzór $f(x) = ax^2 + bx + c$ nazywamy postacią ogólną funkcji kwadratowej, gdzie $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.
>
> Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy wyróżnikiem trójmianu kwadratowego (Δ- delta- wielka litera greckiego alfabetu).

Przykłady wzorów funkcji kwadratowych:

$f(x) = 3x^2 - 7x + 12,$

$g(x) = -x^2 - 3x.$

Poniższe funkcje nie są funkcjami kwadratowymi.

$f(x) = 9\,x + 3,$

$g(x) = \frac{3}{x^2-4}.$

Przykład 1

Mając dany wzór funkcji kwadratowej, podamy współczynniki liczbowe i obliczymy wyróżnik trójmianu kwadratowego : $f(x) = -2x^2 + 7x - 8$.

Rozwiązanie

$a = -2, b = 7, c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)$

$\Delta = 49 - 64$

$\Delta = -15$

Przykład 2

Możemy spotkać się z funkcją, której wzór wyrażony jest za pomocą wyrażenia kwadratowego, rozważając rzut ukośny - tor lotu piłki. Wysokość h w zależności od czasu t można wyrazić wzorem

$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t.$

Obliczymy, na jakiej wysokości znajdzie się piłka w drugiej sekundzie lotu.

$h(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = -2 + 6 = 4$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DWbqZAOgY

Przykład 3

Obliczymy wartości funkcji $f(x) = x^2 + 6x - 5$, $g(x) = -2x^2 + x + 1$, $h(x) = -x^2 - 9x - 2$ dla argumentu $x = -2$ i uporządkujemy je w kolejności rosnącej.

Rozwiązanie

Obliczamy wartości dla kolejnych funkcji.

$$f(-2) = (-2)^2 + 6 \cdot (-2) - 5 = 4 - 12 - 5 = -13,$$

$$g(-2) = -2 \cdot (-2)^2 + (-2) + 1 = -8 - 2 + 1 = -9,$$

$$h(-2) = -(-2)^2 - 9 \cdot (-2) - 2 = -4 + 18 - 2 = 12.$$

Odp. Wartości funkcji w kolejności rosnącej to: $-13, -9, 12$

Twierdzenie: równość funkcji kwadratowych

Dwie funkcje kwadratowe są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współczynniki liczbowe przy odpowiednich potęgach zmiennej.

Przykład 4

Wyznaczymy wartości parametrów m i n funkcji kwadratowych f i g określonych wzorami $f(x) = 4x^2 - 3x + m$ i $g(x) = (n-1)x^2 - 3x - 7$, dla których są one równe.

Rozwiązanie

Wypiszmy współczynniki dla obu funkcji.

Funkcja f, $a_f = 4, b_f = -3, c_f = m$

Funkcja g, $a_g = n - 1, b_g = -3, c_g = -7$

Zauważmy, współczynniki liczbowe przy x są dla obu funkcji równe $-3(b_f = b_g)$.

Wystarczy więc porównać współczynniki liczbowe przy x^2 i wyrazy wolne.

Zatem $a_f = a_g$ czyli $n - 1 = 4$ więc $n = 5$

oraz $c_f = c_g$ czyli $m = -7$.

Odp. Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są równe, gdy $m = -7$ i $n = 5$.

Przykład 5

Wzory funkcji kwadratowych $f(x) = (2x-3)\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$ i $g(x) = x(x+6) - \frac{7}{2}(x+2)$ zapiszemy w postaci ogólnej i sprawdźmy, czy funkcje te są równe.

Rozwiązanie

Przekształcamy wzory funkcji do postaci ogólnej.

$f(x) = (2x - 3)\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$

$f(x) = x^2 + 4x - \frac{3}{2}x - 6$

$f(x) = x^2 + \frac{5}{2}x - 6, a = 1, b = \frac{5}{2}, c = -6$

$g(x) = x(x + 6) - \frac{7}{2}(x + 2)$

$g(x) = x^2 + 6x - \frac{7}{2}x - 7$

$g(x) = x^2 + \frac{5}{2}x - 7, a = 1, b = \frac{5}{2}, c = -7$

Odp. Funkcje f i g nie są równe, bo ich wyrazy wolne są różne.

Słownik

trójmian kwadratowy zmiennej x

wyrażenie postaci $ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c dowolnymi danymi liczbami rzeczywistymi, w tym $a \neq 0$

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem, a następnie rozwiąż polecenia znajdujące się poniżej.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1AZL0CGB

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej funkcji kwadratowej- pojęcia.

Polecenie 2

Zaznacz wszytkie zdania prawdziwe.

- [ ] Długość drogi hamowania pojazdu jest proporcjonalna do prędkości, z jaką porusza się pojazd.
- [ ] Na przestrzeni wielu stuleci przedstawiciele różnych naradowości poszukiwali rozwiązań równania kwadratowego.
- [ ] Trajektoria wystrzelonego pocisku armatniego ma kształt prostej.
- [ ] Wykresem funkcji kwadratowej jest hiperbola.
- [ ] Dla dowolnych stałych rzeczywistych a, b, c równanie $y = ax^2 + bx + c$ opisuje parabolę.

Polecenie 3

Przypomnijmy wzór na długość drogi hamowania (d) samochodu w zależności od prędkości (v): $d = \frac{v^2}{250 \cdot f}$, gdzie f jest współczynnikiem tarcia. Z jaką maksymalną prędkoścą możemy jechać samochodem na suchym asfalcie, aby droga hamowania była równa 2 m, a z jaką, by była równa 4 m ? Jaka jest maksymalna prędkość na lodzie? Na suchym asfalcie przyjmijmy $f = 0,8,$ a na lodzie $f = 0,1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Mając dany wzór funkcji kwadratowej, oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego : $f(x) = -3x^2 + 5x - 13$.

- $\Delta = 148$
- $\Delta = 131$
- $\Delta = -131$
- $\Delta = -148$

Ćwiczenie 2

Rozpoznaj funkcje kwadratowe.

TAK

NIE

Czy funkcja f opisana wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 7x - 4$ jest funkcją kwadratową?

Czy funkcja f opisana wzorem $f(x) = -3x^2 + 2$ jest funkcją kwadratową ?

Czy funkcja f opisana wzorem $f(x) = 3x + 7$ jest funkcją kwadratową?

Czy funkcja f opisana wzorem $f(x) = \frac{2}{x^2+x+3}$ jest funkcją kwadratową?

Czy funkcja f opisana wzorem $f(x) = x^2 + 8x$ jest funkcją kwadratową?

Czy funkcja f opisana wzorem $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ jest funkcją kwadratową?

Ćwiczenie 3

Podaj współczynniki liczbowe danych funkcji kwadratowych. Wpisz właściwe wartości do tabeli.

Funkcja	Współczynnik a	Współczynnik b	Współczynnik c
$f(x) = x^2 - 7x + 8$			
$f(x) = 3x^2 + 2x - 11$			
$f(x) = -3x^2 + 9x + 4$			
$f(x) = -2x^2 + 11$			
$f(x) = -x^2 - 6x + 6$			

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego. Dopasuj wynik do podanego trójmianu.

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$

b) $f(x) = -4x^2 - 9$

c) $f(x) = -3x^2 + 2x$

d) $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$

e) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

$\Delta = 25$ $\Delta = 0$ $\Delta = -144$ $\Delta = 1$ $\Delta = 4$

Ćwiczenie 6

Dla jakich wartości m i n funkcje $f(x) = 2x^2 - (3m+1)x + 4$ oraz $g(x) = 2x^2 + 5x - \frac{1}{2}n + 2$ są równe?

Ćwiczenie 7

Dobierz w pary funkcje kwadratowe, które są równe.

$f(x) = (2-x)(2+x) + 5x - 7$	$f(x) = x^2 - x + 2$
$f(x) = (x-3)(x+2) + 8$	$f(x) = -2x^2 + 7x - 3$
$f(x) = 4 - (x+1)^2$	$f(x) = -x^2 + 5x - 3$
$f(x) = (3-x)(2x-1)$	$f(x) = x^2 + x + 10$
$f(x) = (x+3)^2 - 5x + 1$	$f(x) = -x^2 - 2x + 3$

Ćwiczenie 8

Wstaw w puste miejsce odpowiedni współczynnik, aby otrzymane funkcje kwadratowe były równe.

$f(x) = \boxed{}x^2 - 4x + \boxed{}$ i $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$

$f(x) = -3x^2 + \boxed{}x + 6$ i $f(x) = \boxed{}x^2 + 5x + \boxed{}$

-3 2 6 5 7

Ćwiczenie 9

Funkcje f, g, h dane są wzorami $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $g(x) = -x^2 + 2x - 5$, $h(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Oblicz wartości tych funkcji dla argumentu $x = -3$ i uporządkuj otrzymane liczby w kolejności malejącej.

- 43
- -20
- 27

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Podziemska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pojęcie funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje w zadaniach własności funkcji kwadratowej
- posługuje się pojęciem trójmianu kwadratowego
- oblicza wyróżnik trójmianu kwadratowego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego;
- dyskusja;

- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca indywidualna.

Środki dydaktyczne:

- tablica interaktywna
- komputer z dostępem do internetu

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel podaje przykłady wzorów z fizyki i geometrii zapisanych za pomocą jednomianów kwadratowych.
- Nauczyciel podaje temat i cele lekcji, wraz z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie zapoznają się z filmem edukacyjnym.
- Nauczyciel przedstawia uczniom postać ogólną funkcji kwadratowej.
- Następnie uczniowie podzieleni na cztery grupy metodą tekstu przewodniego analizują przykłady zapisane w sekcji „Przeczytaj" dotyczące funkcji kwadratowej. Zagadnienia budzące wątpliwości notują na kartkach. Następnie na forum klasy przedstawiciele grup odpowiadają na pytania zadawane przez uczniów z innych grup. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
- Uczniowie oglądają film edukacyjny i rozwiązują zadanie zawarte w Poleceniu 2.
- Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się", metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki" i „ożywia się" tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń interaktywnych.
- Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak …".

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane na zajęciach.

- Uczniowie wykonują Polecenie 3 w sekcji „Film edukacyjny”.

Materiały pomocnicze:

- Jednomian kwadratowy i jego własności
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Wskazówki metodyczne:

Film edukacyjny uczniowie mogą wykorzystać do przygotowania się do zajęć o funkcji kwadratowej. Film edukacyjny można wykorzystać również w lekcjach poświęconych historii matematyki.