



## Kąt środkowy koła

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Kąt środkowy koła

Jak wiemy, kąt to część płaszczyzny ograniczona dwiema półprostymi o wspólnym początku. Tym niemniej, będziemy spotykać się niekiedy z określeniem, że ramionami kąta są cięciwy lub promienie odpowiedniego koła lub okręgu. Częściej ten aspekt będzie widoczny w prezentowanych ilustracjach, na których rzadko pojawią się całe ramiona odpowiednich kątów, a zdecydowanie częściej odpowiednie odcinki w kole lub okręgu. Ten skrót myślowy, bo tak należy go rozumieć, w żadnym razie nie jest sprzeczny z definicją kąta, ale pozwala naszej intuicji na łatwe zbudowanie odpowiedniego modelu, prowadzącego do rozwiązania problemu, w którym mówimy o kątach, których ramiona zawierają odpowiednio cięciwy lub promienie kół i okręgów.

### Twoje cele

- Poznasz pojęcie kąta środkowego w kole i w okręgu.
- Będziesz wyznaczać kąty środkowe w okręgu oparte na łuku i rozpięte na cięciwie.
- Poznasz zależności, między miarą kąta środkowego i długością cięciwy, na której ten łuk jest rozpięty.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

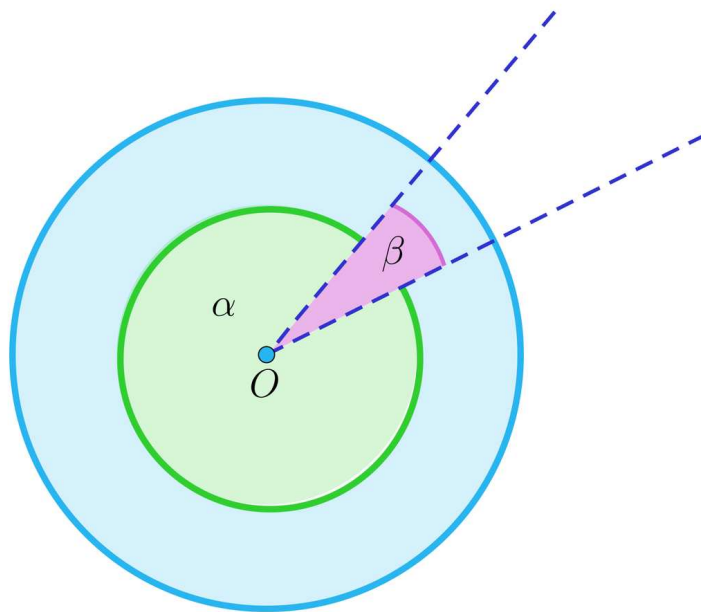
# Przeczytaj

---

## Kąt środkowy w kole i w okręgu

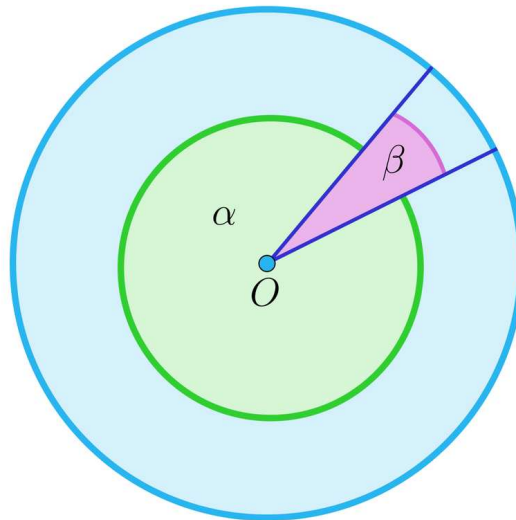
**Definicja: kąt środkowy w kole**

Kątem środkowym w **kole** nazywamy każdy kąt, którego wierzchołkiem jest środek danego koła.



Kąt środkowy

Na powyższym rysunku, dwie półproste, zaznaczone liniami przerywanymi, są ramionami dwóch kątów środkowych danego okręgu o środku w punkcie  $O$ : kąta wypukłego  $\beta$  oraz kąta wklęsłego  $\alpha$ . Zwykle jednak, ilustrując zagadnienie kątów środkowych, będziemy zaznaczali jedynie promienie danego koła, zawarte w odpowiednich półprostych tak, jak na poniższym rysunku.

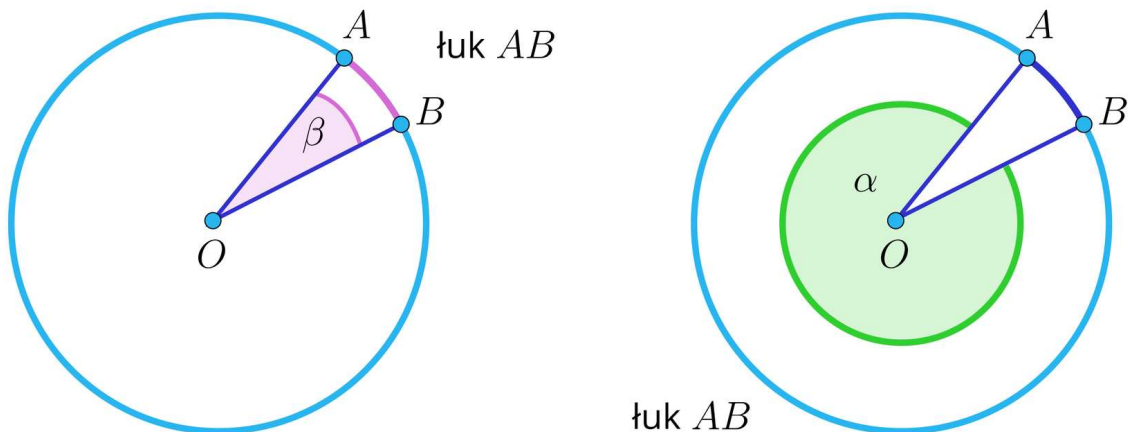


Kąt środkowy

### Definicja: kąt środkowy w okręgu

Rozważmy **okrąg** o środku  $O$  i punkty  $A, B$  leżące na tym okręgu. Kątem środkowym opartym na łuku  $AB$  nazywamy kąt  $AOB$ , którego ramiona zawierają promienie  $OA$  i  $OB$  i w którym zawiera się łuk  $AB$ .

Punkty  $A, B$  wyznaczają dwa łuki okręgu, tym samym dwa różne kąty środkowe, jak na rysunkach.



Kąty środkowe w okręgu

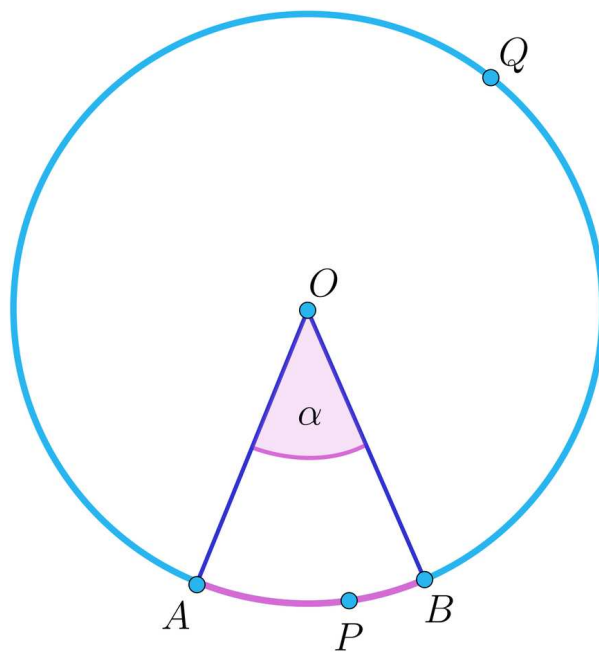
Zauważmy, że dla danego **łuku okręgu** istnieje jednoznacznie wyznaczony kąt środkowy i odwrotnie – każdy kąt środkowy danego okręgu w sposób jednoznaczny wyznacza jego łuk. Ponadto, jeśli łuk okręgu jest mniejszy od półokręgu, to kąt środkowy, który jest oparty na tym łuku, jest kątem wypukłym; jeśli łuk jest większy od półokręgu, to kąt środkowy, który jest oparty na tym łuku, jest kątem wklęsłym.

### Przykład 1

Punkty  $A, B$  leżące na okręgu dzielą go w stosunku  $1 : 7$ . Obliczymy miary kątów środkowych opartych na łuku  $AB$ .

Kąt środkowy oparty na łuku, którym jest cały okrąg, ma miarę  $360^\circ$ . Na każdym z dwóch łuków, których końcami są punkty  $A, B$ , zaznaczono odpowiednio punkty  $P$  oraz  $Q$ .

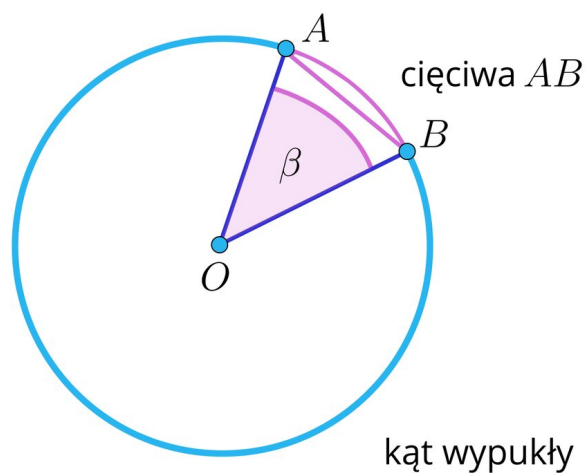
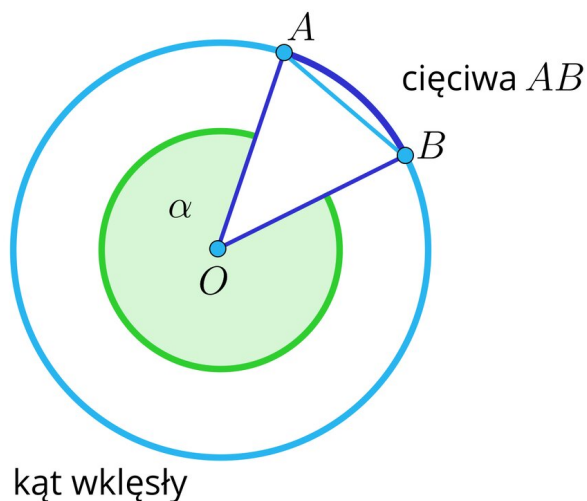
Wtedy  $\widehat{APB}$  oznacza ten z łuków o końcach  $A, B$ , na którym leży punkt  $P$ .



Przykład 1.

Jeśli podzielimy okrąg na osiem równych łuków (części), to punkty  $A, B$  są końcami łuku  $\widehat{APB}$ , który stanowi ósmą część okręgu oraz łuku  $\widehat{AQB}$ , który stanowi pozostałą część okręgu, czyli  $\frac{7}{8}$ . Wtedy miara wypukłego kąta środkowego, opartego na łuku  $AB$  jest równa:  $\frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$ , a miara kąta wklęsłego jest równa  $315^\circ$ .

W praktyce, zamiast mówić o kącie rozpiętym na łuku  $AB$ , mówi się o kącie rozpiętym na **cięciwie**  $AB$ , która odpowiada danemu kątowi środkowemu, pamiętając, że to przyporządkowanie nie jest jednoznaczne. Każdemu kątowi środkowemu odpowiada jedna cięciwa, ale każdej cięciwie odpowiadają dwa kąty środkowe, które w przypadku średnicy, są sobie równe

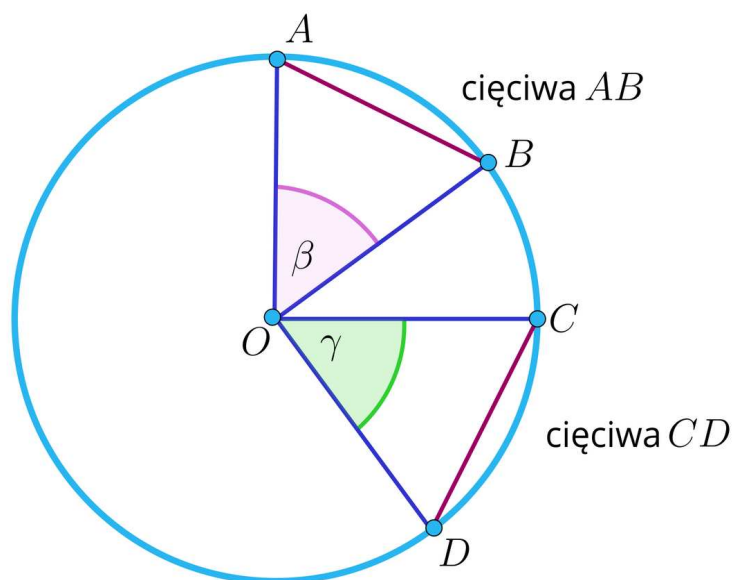


Kąty środkowe rozpięte na cięciwie

Bezpośrednio, korzystając z cechy *bbb* przystawiania trójkątów, możemy sformułować poniższe twierdzenie.

### Twierdzenie: O kątach środkowych rozpiętych na cięciwach

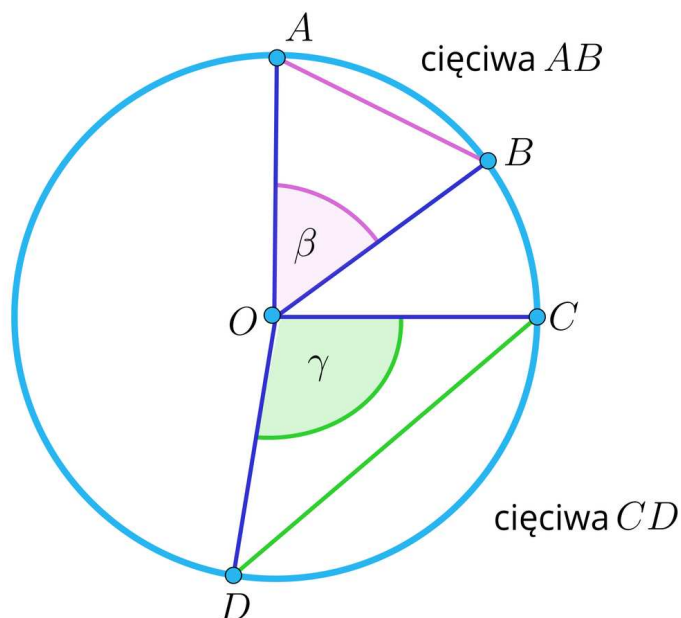
Dla danego okręgu wypukłe kąty środkowe rozpięte na cięciwach o równych długościach mają jednakowe miary.



Twierdzenie1.

Oczywiście, analogiczne twierdzenie można sformułować dla wklęsłych kątów środkowych.

Pozostaje zauważyć, że jeśli ograniczymy się tylko do kątów środkowych, które są wypukłe, to im dłuższa cięciwa, tym większa miara kąta środkowego rozpiętego na tej cięciwie.



Kąty środkowe rozpięte na różnych cięciwach

## Słownik

### okrąg

okręgiem o środku  $O$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny odległych od punktu  $O$  o dany odcinek  $r$

### koło

kołem o środku  $O$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu  $O$  jest nie większa niż  $r$

### łuk okręgu

łukiem okręgu nazywamy każdą z dwóch części, na które dzieli okrąg dwa różne punkty leżące na tym okręgu, wraz z tymi punktami

### cięciwa okręgu

cięciwą okręgu nazywamy odcinek, którego końce są różnymi punktami leżącymi na tym okręgu

# Infografika

---

## Polecenie 1

Wskazówki „klasycznego” zegara wyznaczają kąty, które można utożsamiać z kątami środkowymi w kole. Przeanalizuj przedstawione interpretacje graficzne i odsłuchaj kolejne komunikaty lektora, klikając w odpowiednią ikonę. Opracuj swój model wyznaczania kąta między wskazówkami i rozwiąż dołączone poniżej zadania.

## Polecenie 2

Wyznacz kąt, jaki tworzą wskazówki: godzinowa i minutowa na kwadrans przed ósmą.

## Polecenie 3

Między godziną  $8^{00}$  a  $9^{00}$  Kuba zaobserwował, że kąt, jaki tworzą wskazówki: godzinowa i minutowa jest równy  $10^\circ$ . Która to mogła być godzina?

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Punkty  $A, B, C$  dzielą dany okrąg w stosunku  $4 : 5 : 6$ . Wyznacz miary wypukłych kątów środkowych opartych na łukach  $AB, BC$  i  $CA$ .

## Ćwiczenie 2



## Ćwiczenie 3



Dany jest okrąg o środku  $O$ . Cięciwa  $AB$  tego okręgu tworzy z jego promieniem  $OA$  kąt o mierze  $52^\circ$ . Wyznacz miary obu kątów środkowych rozpiętych na tej cięciwie.

## Ćwiczenie 4



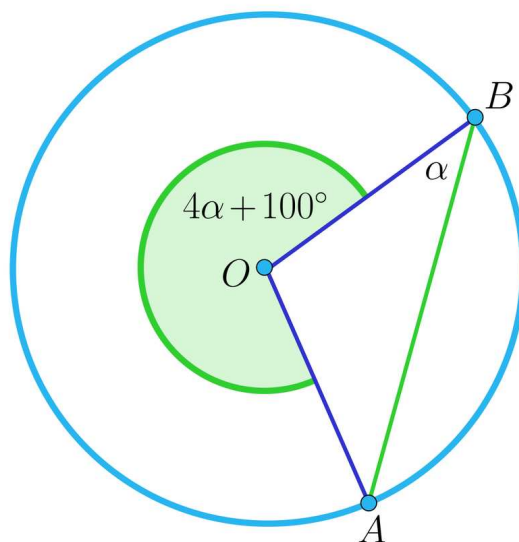
## Ćwiczenie 5



## Ćwiczenie 6



Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, wyznacz stosunek długości łuków, na które cięciwa  $AB$  podzieliła dany okrąg.



### Ćwiczenie 7



Dany jest okrąg o środku  $O$  i promieniu 12. Oblicz długość cięciwy  $AB$  tego okręgu, na której rozpięto kąt środkowy o mierze  $120^\circ$ .

### Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Jacek Człapiński

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Kąt środkowy koła**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VIII. Planimetria

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych

12) przeprowadza dowody geometryczne

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozpoznaje kąty środkowe
- dostrzega odpowiedniość między pojęciami kąta środkowego w okręgu i w kole
- wskazuje, dla danej cięciwy, kąt środkowy wypukły i wklęsły
- wyznacza miary kątów środkowych opartych na określonych częściach okręgu
- przeprowadza dowody geometryczne

**Strategie i metody nauczania:**

- konstruktywizm
- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel zadaje pytanie dotyczące pojęcia kąta – prowadzi rozmowę prowadzącą do wskazania, że intuicyjnie, np. w trójkącie, kąta nie postrzegamy jako figury nieograniczonej, ale jako jego część ograniczoną do danej figury, np. trójkąta.
2. Prosi o zaznaczenie, na przygotowanym wcześniej rysunku koła, dowolnych kątów – tak prowadzi rozmowę, by pojawiły się również kąty wyznaczone przez promienie koła.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie określenia koła i okręgu oraz ich środków, promieni i cięciw.
2. Nauczyciel podaje definicję kąta środkowego w kole i prosi, by zgłosił się uczeń, który zaznaczy taki kąt na rysunku – prowadzi dyskusję w taki sposób, by pojawiły się dwa kąty środkowe o różnych miarach.
3. Następnie nauczyciel wyjaśnia, że w praktyce zaznaczając odpowiednie kąty w kole ograniczamy się do rysowania promieni i cięciw, rezygnując z półprostych.
4. Nauczyciel podaje definicję kąta środkowego w okręgu i prosi uczniów o porównanie obu definicji.
5. Nauczyciel wskazuje, że można mówić o kącie środkowym w okręgu w kontekście określonego łuku i cięciwy – uczniowie wskazują na zalety i wady każdego sposobu. Następnie badają zależności między łukami/cięciwami i miarami kątów środkowych.
6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

#### **Faza podsumowująca:**

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

**Praca domowa:**

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

**Materiały pomocnicze:**

[Kąt środkowy, kąt wpisany](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem.