



Czy każdy wykres funkcji ma asymptotę?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Czy każdy wykres funkcji ma asymptotę?

Źródło: Federico Beccari, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W przypadku rysowania wykresów niektórych funkcji przydatna jest wiedza dotycząca istnienia asymptot, czyli prostych, do których wykres funkcji „zbliża się coraz bardziej”. Taką funkcją jest na przykład funkcja postaci $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$, której wykres posiada dwie asymptoty: pionową o równaniu $x = p$ i poziomą o równaniu $y = q$. Czy jednak zawsze można takie asymptoty znaleźć? Na to pytanie postaramy się podać odpowiedź w tym materiale.

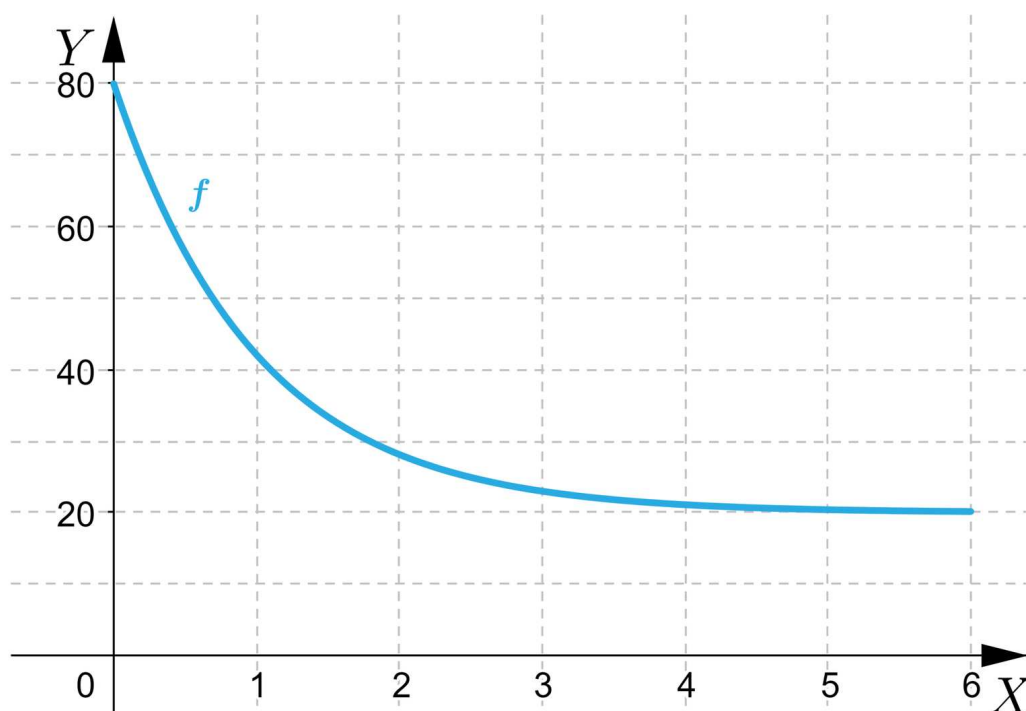
Twoje cele

- Wyznaczysz równanie asymptoty pionowej wykresu funkcji, o ile istnieje.
- Wyznaczysz równanie asymptoty poziomej lub ukośnej wykresu funkcji, o ile istnieje.
- Podasz przykłady funkcji, których wykresy nie mają asymptot.

Przeczytaj

Eksperyment myślowy ze stygnięciem kawy

Wyobraźmy sobie, że mierzymy co chwilę (po t minutach) temperaturę $T(t)$ świeżo zaparzonej kawy i po sześciu minutach wykres wygląda, jak poniżej.



Stygnięcie kawy w czasie

Zadajmy sobie dwa pytania:

1. Jaką temperaturę miała woda, przy pomocy której została zaparzona kawa?
2. Jaka jest temperatura pokoju, w którym przebywamy?

Wykres dostarcza nam natychmiastowej odpowiedzi na pierwsze pytanie – woda miała temperaturę 80°C .

Drugie pytanie na pierwszy rzut oka wydaje się być niezwiązane z kawą, ale czy na pewno? Kawa jest gorąca, a powietrze w pokoju zimne, więc kawa dosyć szybko ostygnie, a powietrze się ogrzeje, przy czym kawy jest tak mało a powietrza tak dużo – nawet w malutkim pokoiku – że proces ogrzania powietrza możemy w praktyce zaniedbać i ostatecznie przyjąć, że po dłuższym czasie kawa będzie miała tę samą temperaturę, co powietrze w pokoju. Jaka jest to temperatura? Patrząc na wykres widzimy, że po prawej stronie, dla większych wartości argumentów t , linia wykresu funkcji temperatury kawy zbliża się coraz bardziej do linii $T = 20$. Z matematycznego punktu widzenia oznacza to,

z jednej strony, że granicą funkcji $T(t)$ przy t dążącym do $+\infty$ jest 20, ale również, że $T = 20$ jest prawostronną asymptotą wykresu funkcji $T(t)$. Z termicznego punktu widzenia oznacza to zaś, że w pokoju panuje temperatura $20^\circ C$.

Asymptota pionowa

Na początku przypomnijmy sobie pojęcie asymptoty pionowej.

Definicja: asymptota pionowa lewostronna

Mówimy, że prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową lewostronną wykresu funkcji f (lub że funkcja f ma asymptotę pionową lewostronną postaci $x = x_0$), jeżeli granica lewostronna funkcji f w punkcie x_0 jest nieskończona:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

Analogicznie definiujemy **asymptotę pionową** prawostronną oraz obustronną. Pamiętajmy, że funkcja może mieć granice niewłaściwe (nieskończone) w punkcie tylko wtedy, gdy jest tam nieciągła.

Przykład 1

Sprawdźmy, czy wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$, posiada asymptoty pionowe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że funkcja jest ciągła wszędzie, poza punktem $x = 1$, gdzie jest nieokreślona, więc musimy sprawdzić granice funkcji jedynie w tym punkcie. Obliczmy je zatem.

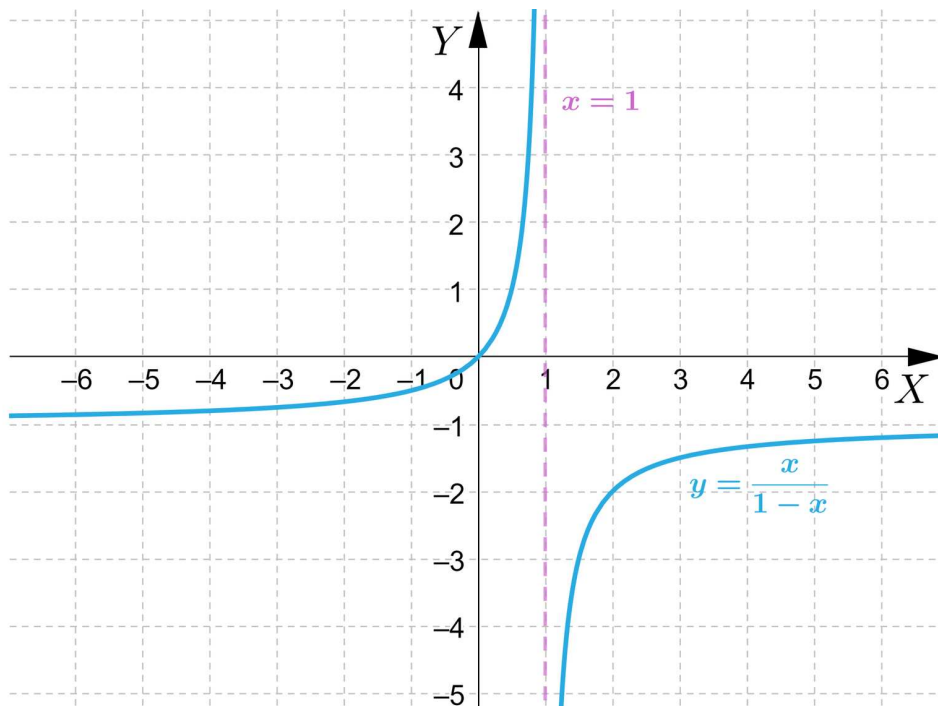
Mamy:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty,$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty,$$

czyli wykres funkcji f ma asymptotę pionową obustronną o równaniu $x = 1$.



Funkcja, która nie jest określona w danym punkcie, może oczywiście nie mieć tam asymptoty pionowej.

Przykład 2

Wykażemy, że wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x}$ nie posiada asymptoty pionowej.

Rozwiązanie

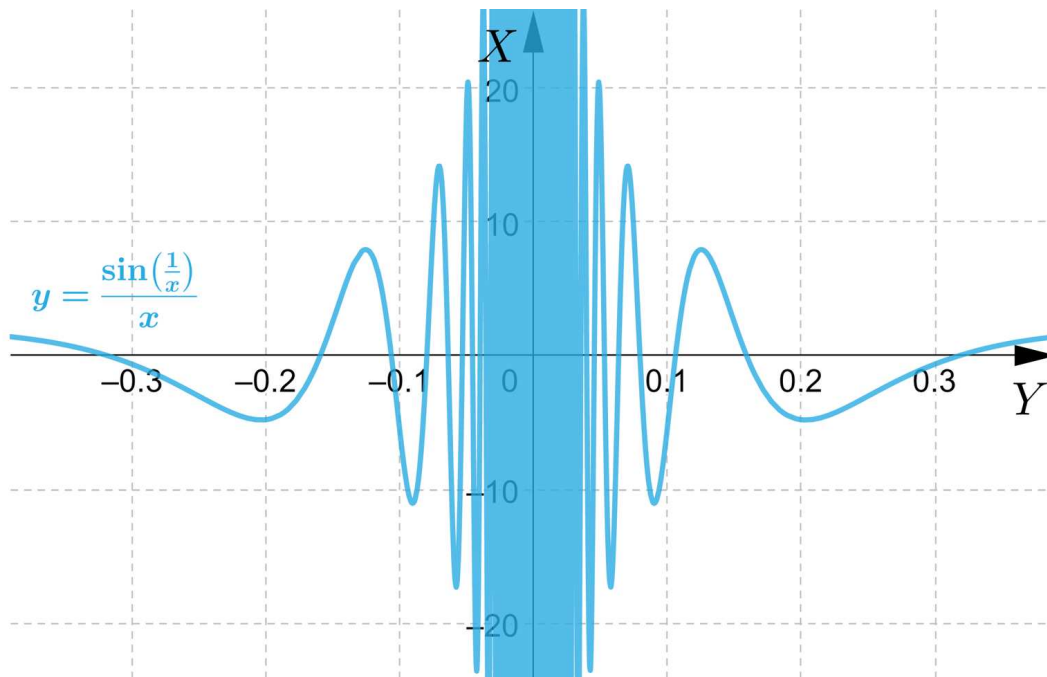
Funkcja f nie jest określona dla $x = 0$, ale ma w tym punkcie granicę właściwą (skończoną), równą 0. Zatem nie istnieje asymptota pionowa wykresu tej funkcji.

Przykład 3

Pokażemy, że wykres funkcji $f(x) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}$ nie posiada asymptoty pionowej.

Rozwiązanie

Przeanalizujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}$:



Wykres funkcji $y = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}$

Zauważmy, że funkcja przyjmuje nieograniczenie duże wartości w pobliżu punktu $x = 0$, w którym nie jest określona, ale nie posiada w tym punkcie granicy, tym samym nie posiada również asymptoty pionowej.

Asymptota pozioma i ukośna

Zazwyczaj w skończonym punkcie funkcja posiada skończoną wartość, a w nieskończoności – nieskończoną granicę. Zobaczyliśmy, że w nienaturalnej sytuacji, gdy funkcja w skończonym punkcie posiada granicę nieskończoną, to w tym punkcie posiada również asymptotę pionową; w przypadku asymptoty poziomej jest podobnie: funkcja musi w nieskończoności posiadać granicę skończoną.

Definicja: Asymptota pozioma

Mówimy, że prosta $y = y_0$ jest asymptotą poziomą lewostronną wykresu funkcji f (lub że funkcja f ma asymptotę poziomą lewostronną postaci $y = y_0$), jeżeli granica funkcji f dla x dążącego do $-\infty$ jest skończona i równa y_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

Analogicznie definiujemy asymptotę poziomą prawostronną oraz obustronną.

Przykład 4

Sprawdzimy, czy wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$, posiada asymptoty poziome.

Rozwiązanie

Wyznamy w tym celu granice tej funkcji w nieskończonościach:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x} = -1,$$

czyli wykres podanej funkcji posiada asymptotę poziomą obustronną o równaniu: $y = -1$.

Asymptoty poziome lewo- i prawostronne nie muszą być określone tymi samymi równaniami.

Przykład 5

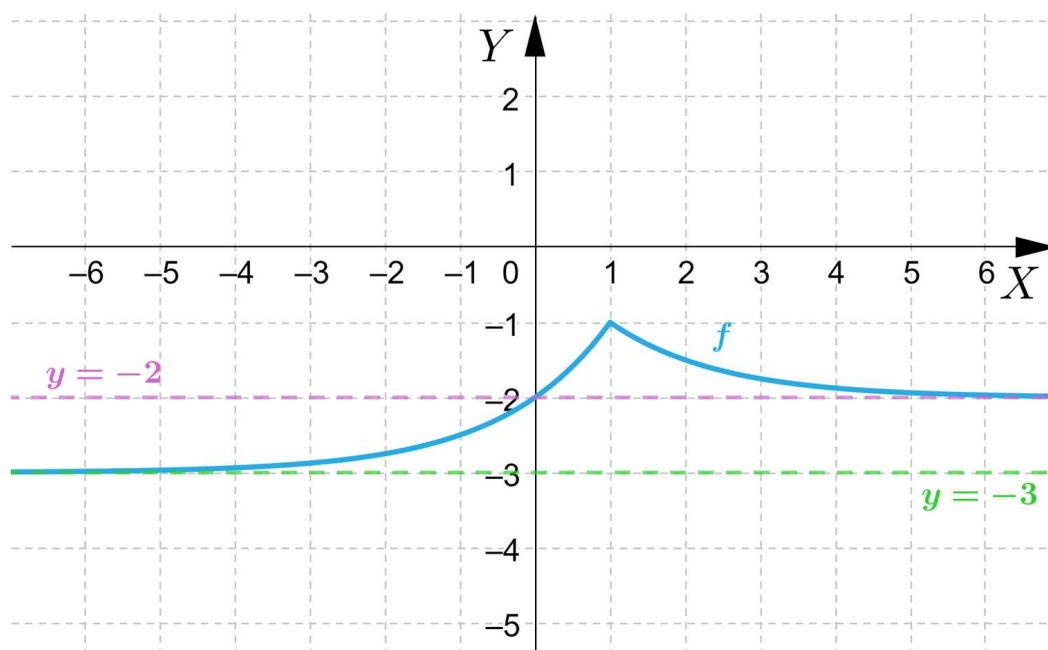
Pokażemy, że wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 3 & \text{dla } x \leq 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

posiada różne asymptoty poziome z lewej i prawej strony.

Rozwiązanie

Narysujmy wykres tej funkcji:



Zauważmy, że

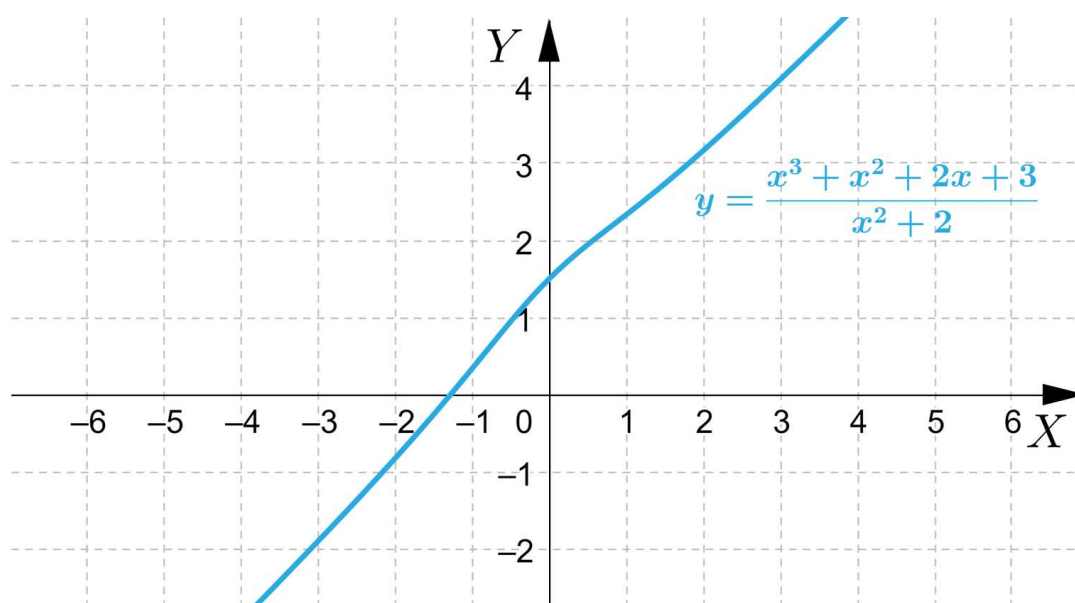
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2,$$

czyli prosta $y = -3$ jest asymptotą poziomą lewostronną, a prosta $y = -2$ jest **asymptotą poziomą** prawostronną tej funkcji.

Jeżeli funkcja nie ma granicy skończonej w nieskończoności, nie może posiadać asymptoty poziomej. Na przykład funkcja $y = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$ w obu nieskończonościach ma granice nieskończone. Jej wykres pokazuje również, że poza pewnym zniekształceniem w okolicy początku układu współrzędnych, wykres tej funkcji ładnie przypomina wykres funkcji liniowej.



Prowadzi nas to do kolejnej definicji.

Definicja: Asymptota ukośna

Mówimy, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f (lub że funkcja f ma asymptotę ukośną lewostronną postaci $y = ax + b$), jeżeli granica różnicy funkcji f i $ax + b$ dla x dążącego do $-\infty$ jest równa 0:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Analogicznie definiujemy asymptotę ukośną prawostronną oraz obustronną. Zauważmy, że jeżeli $a = 0$, to definicja asymptoty ukośnej pokrywa się z definicją asymptoty poziomej.

Przykład 6

Sprawdźmy, czy wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3+x^2+2x+3}{x^2+2}$ posiada asymptotę ukośną.

Rozwiązanie

Zobaczmy najpierw, czy jesteśmy w stanie wyznaczyć wartość parametru a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+x^2+2x+3}{x^3+2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0+0+0}{1+0} = 1,\end{aligned}$$

czyli $a = 1$.

Wyznaczymy następnie wartość parametru b :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3+x^2+2x+3}{x^2+2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0}{1+0} = 1,\end{aligned}$$

czyli $b = 1$.

Te same wyniki otrzymamy dla granic przy x dążącym do $+\infty$ i ostatecznie możemy stwierdzić, że prosta $y = x + 1$ jest **asymptotą ukośną** obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^3+x^2+2x+3}{x^2+2}$.

Nie każda funkcja ma asymptoty ukośne, czasami może w ogóle nie być określona dla dużych wartości argumentu x .

Przykład 7

Sprawdźmy, czy wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x-x^2}$ posiada asymptoty ukośne.

Rozwiązanie

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, zatem nie posiada w ogóle granic w nieskończonościach, i nie może posiadać asymptot ukośnych.

Niektóre funkcje nie posiadają asymptot ukośnych, gdyż ich wykresy nie przypominają wykresów funkcji liniowych.

Przykład 8

Wykażemy, że wykres funkcji $f(x) = x - x^2$ nie posiada asymptot ukośnych.

Rozwiązanie

Sprawdźmy, czy da się wyznaczyć wartość a . Dla asymptoty ukośnej lewostronnej mamy:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = +\infty.$$

Zatem funkcja nie posiada asymptoty ukośnej lewostronnej. Podobnie sprawdzamy, że nie istnieje asymptota prawostronna.

Przykład 9

Wykażemy, że wykres funkcji $f(x) = 2x + \sin x$ nie posiada asymptot ukośnych.

Rozwiązanie

Wyznamy najpierw wartość a . Zarówno z lewej, jak i prawej strony:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2.$$

Wyznamy wartość b :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$$

Granice te jednak nie istnieją.

Ostatecznie nie istnieje ani lewostronna, ani prawostronna asymptota ukośna tej funkcji.

Można rozszerzyć pojęcie asymptot na asymptoty krzywoliniowe, ale wykracza to poza ramy niniejszego materiału, warto jednak o tym z pewnością poczytać w wolnym czasie.

Słownik

asymptota pionowa

prosta $x = x_0$, jeżeli granica funkcji dla x dążącego do x_0 jest nieskończona ($-\infty$ lub $+\infty$)

asymptota pozioma

prosta $y = y_0$, jeżeli granica funkcji w nieskończoności ($-\infty$ lub $+\infty$) jest skończona i równa y_0

asymptota ukośna

prosta $y = ax + b$, jeżeli w nieskończoności ($-\infty$ lub $+\infty$) granica różnicy $(f(x) - (ax + b))$ jest równa 0

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją przedstawiającą kolejne kroki wyznaczania równań asymptot wykresów funkcji wymiernych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DA2cN3Awz>

Polecenie 2

Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż równanie asymptoty pionowej wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 + 1$.

☐ $x = -2$

☐ Funkcja nie posiada asymptoty pionowej.

☐ $x = 2$

☐ $x = 0$

Ćwiczenie 2



Wpisz poprawną odpowiedź.

Asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2+1}{x-2}$ jest prosta o równaniu $x =$

Ćwiczenie 3



Wskaż równanie asymptoty poziomej wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

☐ $y = -2$

☐ $y = 2$

☐ $y = 0$

☐ Funkcja nie posiada asymptoty poziomej.

Ćwiczenie 4



Wskaż równanie asymptoty poziomej wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2+1}{x-2}$.

☐ $y = 2$

☐ $y = -2$

☐ Funkcja nie posiada asymptoty poziomej.

☐ $y = 0$

Ćwiczenie 5



Wskaż równanie asymptoty ukośnej wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2+1}{x-2}$.

☐ $y = 2x + 4$

☐ $y = 2$

☐ $y = x + 1$

☐ Funkcja nie posiada asymptoty ukośnej.

Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie własności funkcji $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$.

☐ Wykres funkcji f nie posiada ani asymptoty poziomej, ani ukośnej.

☐ Wykres funkcji f ma asymptotę pionową o równaniu: $x = 1$.

☐ Wykres funkcji f ma asymptotę pionową o równaniu: $x = -1$.

☐ Wykres funkcji f ma asymptotę ukośną o równaniu: $y = x$.

☐ Wykres funkcji f ma asymptotę pionową o równaniu: $x = 0$.

☐ Wykres funkcji f ma asymptotę poziomą o równaniu: $y = 1$.

Ćwiczenie 7



Połącz w pary wzory funkcji i informacje o ich asymptotach.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & \text{dla } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$$

Wykres funkcji ma lewostronną asymptotę poziomą i nie ma asymptoty prawostronnej.

$$f(x) = -x^3 + 2x$$

Wykres funkcji ma zarówno asymptoty pionowe, jak i asymptotę poziomą.

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2+1}$$

Wykres funkcji nie posiada ani asymptoty pionowej, ani poziomej, ani ukośnej.

$$f(x) = \frac{3+2x^2}{3-2x^2}$$

Wykres funkcji nie posiada asymptot pionowych, posiada asymptotę ukośną.

Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{1+ax^2}$ z parametrem rzeczywistym a . Połącz wartości parametru a z informacjami o funkcji f .

$$a = 0$$

Funkcja f jest funkcją stałą.

$$a < 0$$

Wykres funkcji f nie ma asymptot pionowych.

$$a > 0$$

Wykres funkcji f ma dokładnie jedną asymptotę pionową.

Nie ma takiej wartości a .

Wykres funkcji f ma dokładnie dwie asymptoty pionowe.

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak, Aneta Rogalska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Czy każdy wykres funkcji ma asymptotę?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Zakres rozszerzony. Uczeń:

1) Oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza asymptoty pionowe, poziome i ukośne, jeżeli istnieją
- podaje przykłady funkcji, których wykresy nie mają asymptot

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda odwróconej klasy
- analiza przypadku
- dyskusja
- pogadanka z wykorzystaniem prezentacji

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg zajęć:**Przed lekcją:**

1. Na podstawie sekcji „Przeczytaj” uczniowie przypominają sobie pojęcia asymptot oraz zapoznają się z „Eksperymentem myślowym ze stygnięciem kawy”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Troje chętnych uczniów omawia pojęcia asymptoty pionowej, poziomej i ukośnej.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z przykładami funkcji z sekcji „Przeczytaj”, których wykresy nie mają asymptot i dyskutują nad wątpliwościami.
2. Nauczyciel wyświetla i omawia przykład z prezentacji multimedialnej.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują polecenie umieszczone pod medium bazowym, konsultując się ewentualnie z nauczycielem.
4. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1, 4, 6, 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność.

Faza podsumowująca:

1. Po ustalonym czasie nauczyciel sprawdza odpowiedzi uczniów, wyjaśnia pomyłki, omawia poprawne rozwiązania na forum klasy.

Praca domowa

Uczniowie rozwiązują pozostałe ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”. W parach zadają sobie nawzajem zadanie analogiczne do jednego z ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Granice funkcji](#)

Granice funkcji w nieskończoności

Asymptoty funkcji elementarnych

Wykres funkcji

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną można również wykorzystać przy tematach „Asymptota ukośna wykresu funkcji” lub „Asymptota pionowa wykresu funkcji” oraz w trakcie powtórzenia przed sprawdzianem.