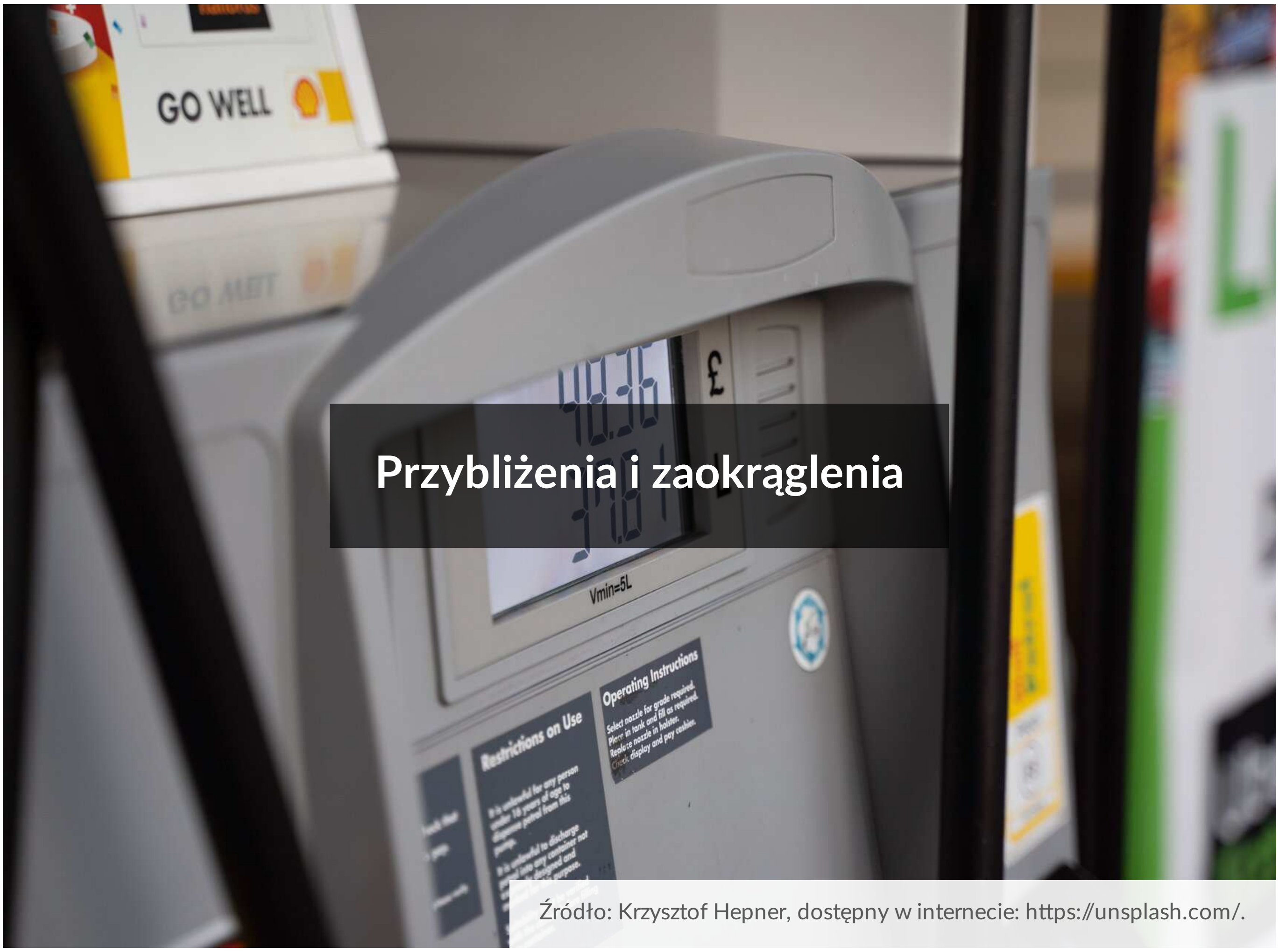
Przybliżenia i zaokrąglenia

Przybliżenia i zaokrąglenia



Źródło: Krzysztof Hepner, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Już wiesz, że jeśli nie znamy albo nie pamiętamy dokładnej wartości danej wielkości, to używamy przybliżeń lub zaokrągleń. Na co dzień te przybliżenia mogą być intuicyjne i mało dokładne. Jednak w matematyce czy przy zapisywaniu wyników różnych badań i eksperymentów staramy się, aby przybliżenia były jak najbardziej precyzyjne i stosujemy ustalone zasady ich wykonywania.

Twoje cele

- Utrwalisz metody wykonywania przybliżeń.
- Utrwalisz zasady i metody wykonywania zaokrągleń.
- Udoskonalisz sprawność w wyznaczaniu przybliżeń i zaokrągleń oraz dostrzeganiu różnic pomiędzy nimi.
- Poznasz pojęcie cyfry znaczącej.

Przeczytaj

Matematyka jest w zasadzie bardzo precyzyjną dziedziną nauki. Zdarza się jednak, że w zadaniach praktycznych potrzebujemy zaokrąglenia lub przybliżenia pewnej liczby.

Przybliżanie to znajdowanie liczby, która jest „bliska” innej liczbie i zwykle obarczone jest pewnym błędem. Jeśli przybliżenie liczby jest od niej mniejsze, to mówimy o **przybliżeniu z niedomiarem**; jeśli jest od niej większe – mówimy, o **przybliżeniu z nadmiarem**.

Aby błąd powstały w trakcie przybliżania był jak najmniejszy, przyjmuje się „reguły zaokrąglania”. Przy zaokrąglaniu liczb przyglądamy się „pierwszej odrzuconej cyfrze” i jeśli:

- jest to jedna z cyfr: $0, 1, 2, 3, 4$, to pozostawione cyfry przepisujemy bez zmian;
- jest to jedna z cyfr $5, 6, 7, 8, 9$, to zwiększamy ostatnią pozostawioną cyfrę o 1, przy czym - jeśli ostatnia pozostawiona cyfra jest równa 9, to zastępujemy ją przez 0 a o 1 zwiększamy cyfrę poprzednią.

Odrzucone cyfry zastępujemy cyfrą 0.

Przykład 1

Podamy przybliżenia i zaokrąglenia liczb 154, 258 oraz 2582.

Rozwiązanie

Liczba a	Przybliżenia liczby a	Zaokrąglenie liczby a

Liczba a	**Przybliżenia liczby** a	**Zaokrąglenie liczby** a
$154,258$	(do rzędu części setnych) $154,25$ $154,26$ $154,30$ $154,20$	(do rzędu części setnych) $154,26$ (ostatnia cyfr została zwiększona o 1, ponieważ kolejna należy do zbioru $\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$)
2582	(do pełnych dziesiątek) 2580 2590	(do pełnych dziesiątek) 2580 (cyfra dziesiątek się nie zmieniła, ponieważ kolejna – cyfra jedności, należy do zbioru $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$)

Możemy więc podać kilka liczb, które są przybliżeniami danej liczby, ale tylko jedna z nich jest zaokrągleniem liczby.

Zaokrąglenia liczb często wykorzystujemy do obliczania przybliżonej wartości liczb niewymiernych. Przybliżając zastępujemy znak „$=$” znakiem „$\approx$”. Przybliżamy do rzędu wielkości wskazanego w zadaniu. Podczas wykonywania działań korzystamy z dokładniejszych przybliżeń, a otrzymany wynik przybliżamy do wskazanego rzędu wielkości.

Przykład 2

Obliczymy wartości liczb przybliżone:

a. do części setnych: $\sqrt{2}+\sqrt{5}$
b. do części tysięcznych: $3\sqrt{6}-\sqrt[3]{6}$
c. do części setnych: $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$

Rozwiązanie

> Chcąc otrzymać wynik z zadaną dokładnością bezpiecznie jest wykonywać działania na dokładniejszych przybliżeniach:
>
> a. $\sqrt{2}+\sqrt{5}\approx 1,414+2,236=3,650=3,65$
>
> b. $3\sqrt{6}-\sqrt[3]{6}\approx 3\cdot 2,4494-1,8171=5,5311\approx 5,53$
>
> c. $\frac{\sqrt{3}-2}{2}\approx\frac{1,732-2}{2}=\frac{-0,268}{2}=-0,134\approx -0,13$

Warto zauważyć, że wykonując działania na mniej dokładnych przybliżeniach możemy otrzymać inny wynik, np: $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1,41+1,73=3,14$, podczas gdy:
$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1,414+1,732=3,146\approx 3,15$

> **Przykład 3**
>
> Obliczymy wartość liczby $\sqrt{7}+\sqrt{11}$ w przybliżeniu do części setnych.
>
> **Rozwiązanie**
>
> Wykonując działanie na dokładniejszych przybliżeniach i przybliżając wynik do wskazanego rzędu wielkości otrzymujemy:
>
> $\sqrt{7}+\sqrt{11}\approx 2,646+3,317=5,963\approx 5,96.$
>
> Przybliżając od razu do części setnych mamy natomiast:
>
> $\sqrt{7}+\sqrt{11}\approx 2,65+3,32=5,97.$

Przy zapisywaniu wyników różnych badań i eksperymentów lub wykonywaniu obliczeń opartych na wynikach pomiarów możemy się również spotkać z pojęciem **cyfr znaczących**. Cyfry te mówią nam o dokładności wykonanego pomiaru. Cyframi znaczącymi są wszystkie cyfry w zapisie dziesiętnym liczby oprócz zer na początku, np.

- w liczbie $0,00203$ są trzy cyfry znaczące: 2, 0 i 3 stojące na trzecim, czwartym i piątym miejscu po przecinku;

- w liczbie $12,0090$ jest 5 cyfr znaczących: $1, 2, 0, 0, 9$.

Do cyfr znaczących zalicza się nadto te zera końcowe, które nie wynikły z zaokrąglenia, lecz z rachunku.

> **Przykład 4**
>
> Określimy liczbę cyfr znaczących przybliżeń: $401,2$; $0,023$; $0,1000$ i $102,030$.
>
> **Rozwiązanie**
>
> - $401,2$ – cztery cyfry znaczące,
> - $0,023$ – dwie cyfry znaczące,
> - $0,1000$ – jedna cyfra znacząca,
> - $102,030$ – pięć cyfr znaczących.
>
> Zera tuż po przecinku nie są cyframi znaczącymi, chyba że znajdują się między cyframi niezerowymi. Ale są nimi zera na końcu liczby.

Przybliżenia są także wykorzystywane w metrologii i geodezji. W tych dziedzinach nauki stosowane są zasady zaokrąglania liczb i działania na liczbach przybliżonych. Nazywane są one regułami Bradis - Kryłowa.

Przeanalizujmy reguły dotyczące wykonywania działań w kolejnych przykładach.

> **Przykład 5**
>
> Mnożenie i dzielenie.
>
> Przybliżymy wyniki działań:
>
> - $2,75 \cdot 0,15$

- $15,04 \cdot 12,201$
- $75,020 : 2,04$

zgodnie z regułami Bradis - Kryłowa.

Rozwiązanie

Wykonujemy działanie, a następnie przybliżamy wynik tak, aby zawierał tyle cyfr znaczących, ile jest ich w czynniku, który ma najmniej cyfr znaczących.

$$2{,}75 \cdot \underbrace{0{,}15}_{\text{dwie cyfry znaczące}} = 0{,}4125 \approx \underbrace{0{,}41}_{\text{dwie cyfry znaczące}}$$

$$\underbrace{15{,}04}_{\text{cztery cyfry znaczące}} \cdot 12{,}201 = 183{,}50304 \approx \underbrace{183{,}5}_{\text{cztery cyfry znaczące}}$$

$$75{,}020 : \underbrace{2{,}04}_{\text{trzy cyfry znaczące}} \approx 36{,}7745098 \approx \underbrace{36{,}8}_{\text{trzy cyfry znaczące}}$$

Przykład 6

Dodawanie i odejmowanie.

Przybliżymy wyniki działań:

- $154,35 + 12,4$
- $167,658 - 15,61$

zgodnie z regułami Bradis - Kryłowa.

Rozwiązanie

W tym przypadku istotne jest z jaką dokładnością podane są dodawane (odejmowane) liczby.

Wynik końcowy powinien mieć tyle cyfr po przecinku, ile ma ich liczba o najmniejszej dokładności.

$$154{,}35 + 12{,}4 = 166{,}75 \approx 166{,}8$$

dokładność do części dziesiątych — dokładność do części dziesiątych

$$167{,}658 - 15{,}61 = 152{,}048 \approx 152{,}05$$

dokładność do części setnych — dokładność do części setnych

Przykład 7

Potęgi i pierwiastki.

Przybliżymy liczby:

- $10,4^3$
- $\sqrt[3]{220,10}$

zgodnie z regułami Bradis - Kryłowa.

Rozwiązanie

> Wynik powinien mieć tyle cyfr znaczących, ile ma liczba potęgowana/liczba podpierwiastkowa.
>
> $$\underbrace{10{,}4}_{\text{trzy cyfry znaczące}}{}^3 = 1124{,}864 \approx \underbrace{112}_{\text{trzy cyfry znaczące}}0$$
>
> $$\sqrt[3]{\underbrace{220{,}10}_{\text{pięć cyfr znaczących}}} \approx 6{,}03772527 \approx \underbrace{6{,}0377}_{\text{pięć cyfr znaczących}}$$

W regułach Bradis - Kryłowa ponadto:

- Liczby będące wynikami pośrednimi zapisujemy, uwzględniając dodatkowo kolejną cyfrę, pomimo powyższych reguł. W końcowym rozwiązaniu dodatkową cyfrę opuszczamy lub zapisujemy mniejszą czcionką.
- Jeśli niektóre dane zawierają więcej znaków dziesiętnych lub cyfr znaczących niż pozostałe dane w działaniach, wówczas zaokrąglamy je zachowując o jedną cyfrę więcej niż wynika z powyższych reguł.
- Jeżeli chcemy uzyskać wynik końcowy o k cyfrach, to do obliczeń należy brać dane z taką liczbą cyfr, które, zgodnie z powyższymi regułami, w końcowym rozwiązaniu dadzą $k+1$ cyfr.

Słownik

> **przybliżenie liczby**
>
> podanie wartości liczby z pewną dokładnością

> **zaokrąglenie liczby**

podanie wartości liczby z pewną dokładnością, zgodnie z ustalonymi zasadami

cyfry znaczące

wszystkie cyfry przybliżonej liczby, z wyjątkiem zer położonych na lewo od pierwszej różnej od zera cyfry

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę edukacyjną, a następnie wykonaj polecenie 2.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Korzystając z podanych wartości przybliżeń pierwiastków, uporządkuj liczby w kolejności malejącej. Zastanów się, do którego miejsca po przecinku musisz przybliżać liczby, aby móc prawidłowo wykonać to zadanie.

$\sqrt[3]{2} \approx 1,2599211$	$\sqrt[4]{2} \approx 1,18920712$	$\sqrt[5]{2} \approx 1,14869836$
$\sqrt[3]{3} \approx 1,4422496$	$\sqrt[4]{3} \approx 1,3160742$	$\sqrt[5]{3} \approx 1,2457310$
$\sqrt[3]{4} \approx 1,58740105$	$\sqrt[4]{4} \approx 1,4142356$	$\sqrt[5]{4} \approx 1,31950791$
$\sqrt[3]{5} \approx 1,70997595$	$\sqrt[4]{5} \approx 1,49534878$	$\sqrt[5]{5} \approx 1,37972966$

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Korzystając z wartości pierwiastków przedstawionych w ćwiczeniu 2, podaj przybliżenia liczb A, B i C z dokładnością do części setnych.

$$A = \frac{\sqrt[3]{5}+2}{7}$$

$$B = \frac{2\sqrt[4]{3}-3}{4}$$

$$C = \frac{8-\sqrt[4]{4}}{5}$$

Ćwiczenie 8

Wykonaj działania, podaj wyniki z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku.

a. $4\frac{3}{8} + 2,2634 - \pi$

b. $4\pi - 2\sqrt{3}$

c. $5\sqrt[5]{5} + 4\sqrt[4]{4}$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przybliżenia i zaokrąglenia

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i rozróżnia pojęcia przybliżenia i zaokrąglenia
- wyznacza przybliżenia i zaokrąglenia liczb, stosując poznane zasady
- wykonuje obliczenia na liczbach wymiernych i niewymiernych oraz ich zaokrągleniach

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja
- konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego
- praca w grupach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie, pracując w parach, informacje na temat przybliżeń i zaokrągleń.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” i „Gra edukacyjna”.
2. Nauczyciel kontroluje pracę grup, wyjaśnia wątpliwości.
3. Uczniowie pracują indywidualnie metodą konkursu zadaniowego. Rozwiązują ćwiczenia interaktywne. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność. Osoby, które rozwiążą zadania bezbłędnie, otrzymują oceny z aktywności.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Zaokrąglanie liczb dziesiętnych]

Wskazówki metodyczne:

Gra edukacyjna może być wykorzystana przez chętnych uczniów do utrwalenia metod szacowania.