



Losowanie kombinatoryczne

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: Seattle Municipal Archives, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 2.0.

Istnieje wiele gier karcianych rozgrywanych tradycyjnymi taliami. Organizowane są nawet międzynarodowe rozgrywki np. w pokera, cieszące się znaczną popularnością.

W matematyce mamy do czynienia z kartami najczęściej w zadaniach związanych z rachunkiem prawdopodobieństwa.

W tym materiale pokażemy, jak losowanie kart można wykorzystać w zadaniach kombinatorycznych.

Zawarte tu problemy są tak dobrane, aby można było określić liczbę zliczanych obiektów, wykorzystując kombinacje.

Twoje cele

- Określisz liczbę zdarzeń elementarnych w danym doświadczeniu losowym.
- Określisz liczbę zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu.
- Wykorzystasz narzędzia kombinatoryki do zliczania wyników doświadczeń losowych.

Przeczytaj

W standardowej talii są 52 karty. Karty są w czterech kolorach, po 13 kart w każdym.



pik (z franc. grot)



kier (z franc. serce)



karo (z franc. czworokąt)



trefl (z franc. koniczyna)

Każdy z kolorów posiada dziewięć kart numerowanych od 2 do 10 oraz trzy figury: król, dama, walet oraz dodatkową kartę – as.

W zadaniach dotyczących określania liczby wyników losowania kart, będziemy korzystać ze wzoru na [kombinacje](#).

Twierdzenie: Liczba kombinacji

Liczba C_n^k wszystkich kombinacji k -elementowych zbioru n -elementowego jest równa

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

gdzie:

$n \in \mathbb{N}_+$, $k \in \mathbb{N}_+$ i $k \leq n$.

Przykład 1

Z talii 52 kart losujemy bez zwracania pięć kart. Obliczymy, ile istnieje możliwych wyników losowania, w których otrzymamy dwa kiery.



Mamy wylosować dwa kiery spośród 13 wszystkich kierów znajdujących się talii i jeszcze trzy inne karty spośród pozostałych 39.

Kiery losujemy na C_{13}^2 sposobów.

Pozostałe trzy karty losujemy na C_{39}^3 sposobów.

Kolejność losowania nie ma znaczenia. Aby wyznaczyć wszystkie możliwości, korzystamy z reguły mnożenia.

$$C_{13}^2 \cdot C_{39}^3 = \frac{13!}{2! \cdot 11!} \cdot \frac{39!}{3! \cdot 36!} = \frac{13 \cdot 12}{2} \cdot \frac{39 \cdot 38 \cdot 37}{6} = 712842$$

Odpowiedź:

Istnieją 712842 sposoby wylosowania dwóch kierów i trzech innych kart z talii.

Przykład 2

Z talii 52 kart losujemy bez zwracania 9 kart. Obliczymy, ile jest możliwych wyników losowania, w których są dokładnie 2 asy i 4 damy.

W talii są 4 asy. Mamy spośród nich wylosować dwa na

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ sposobów.}$$

W talii są 4 damy. Mamy spośród nich wylosować cztery na

$$\binom{4}{4} = 1 \text{ sposób.}$$

Do tego dobieramy trzy karty spośród pozostałych (bez asów i dam) $52 - 8 = 44$ kart na

$$\binom{44}{3} = \frac{44!}{3! \cdot 41!} = \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{6} = 13244 \text{ sposobów.}$$

Obliczamy, ile jest wszystkich możliwości

$$6 \cdot 1 \cdot 13244 = 79464$$

Odpowiedź:

Wszystkich możliwości jest 79464.

Przykład 3

Obliczymy, ile jest możliwości rozdań 52 kart czterem graczom: Antoniemu, Bogdanowi, Czesławowi i Dariuszowi.

Każdy z graczy otrzyma po

$$52 : 4 = 13 \text{ kart.}$$

Najpierw wybieramy 13 kart dla pierwszego gracza, np. Antoniego, spośród 52 kart.

Można to zrobić na $\binom{52}{13}$ sposobów.

Teraz wybieramy karty dla drugiego gracza, np. Bogdana, spośród pozostałych $52 - 13 = 39$ kart.

Można to zrobić na $\binom{39}{13}$ sposobów.

Wybieramy karty dla trzeciego gracza, np. Czesława, spośród pozostałych $39 - 13 = 26$ kart.

Można to zrobić na $\binom{26}{13}$ sposobów.

Dla czwartego gracza, np. Dariusza pozostało już tylko 13 kart, które otrzymuje.

Obliczamy, na ile sposobów otrzyma karty każdy z graczy.

$$\text{Antoni: } \binom{52}{13} = \frac{52!}{13! \cdot 39!}$$

$$\text{Bogdan: } \binom{39}{13} = \frac{39!}{13! \cdot 26!}$$

$$\text{Czesław: } \binom{26}{13} = \frac{26!}{13! \cdot 13!}$$

Dariusz: na $\binom{13}{13} = 1$

Obliczamy ile jest wszystkich możliwości.

$$\frac{52!}{13! \cdot 39!} \cdot \frac{39!}{13! \cdot 26!} \cdot \frac{26!}{13! \cdot 13!} \cdot 1 = \frac{52!}{(13!)^4}$$

Otrzymaliśmy dużą liczbę, zatem pozostawiamy ją w wyznaczonej postaci.

Odpowiedź:

Czterem graczom można rozdać karty na $\frac{52!}{(13!)^4}$ sposobów.

Przykład 4

Na ile sposobów z talii 52 kart można wylosować 10 kart tak, aby wśród nich był co najmniej jeden król?

Obliczymy najpierw ile jest możliwości wyboru 10 kart, w których nie ma ani jednego króla.

$$\binom{48}{10} = \frac{48!}{10! \cdot 38!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{10!}$$

Możliwości wyboru dowolnych 10 kart spośród 52 jest

$$\binom{52}{10} = \frac{52!}{10! \cdot 42!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{10!}$$

Więc możliwości wyborów, w których jest co najmniej jeden król jest

$$W = \binom{52}{10} - \binom{48}{10}$$

$$W = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{10!} - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{10!}$$

$$W = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot (52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 - 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39)}{10!}$$

$$W = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot (6497400 - 2686320)}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$W = \frac{381108 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 44 \cdot 43}{168} = 43 \cdot 47 \cdot 253 \cdot 18148 = 9279308324$$

Odpowiedź:

Karty można wylosować na 9279308324 sposoby.

Przykład 5

Obliczymy, na ile sposobów z talii 52 kart można wylosować sześć kart tak, aby wśród nich były karty wszystkich kolorów.

Mamy dwie możliwości:

- w jednym kolorze mamy trzy karty, a w każdym z pozostałych po jednej karcie;
- w dwóch kolorach mamy po dwie karty, a w pozostałych po jednej.

W pierwszym przypadku jest

$$4 \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} = 8 \cdot 11 \cdot 13^4 \text{ możliwości.}$$

W drugim przypadku jest

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} = 6^3 \cdot 13^4 \text{ możliwości.}$$

Zgodnie z regułą dodawania, otrzymujemy:

$$88 \cdot 13^4 + 216 \cdot 13^4 = 304 \cdot 13^4$$

Odpowiedź:

Wszystkich sposobów wylosowania sześciu kart tak, aby wśród nich były karty wszystkich kolorów jest $304 \cdot 13^4$.

Słownik

liczba kombinacji

liczba C_n^k wszystkich kombinacji k -elementowych zbioru n -elementowego jest równa

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

gdzie:

$$n \in \mathbb{N}_+, k \in \mathbb{N}_+ \text{ i } k \leq n$$

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w filmie edukacyjnym, a następnie wykonaj Polecenie 2.

Trwa wczytywanie danych..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D41Fw8b04>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej losowania kombinatorycznego.

Polecenie 2



Z talii 52 kart losujemy równocześnie pięć kart. Oblicz, ile istnieje możliwych wyników losowania, w których wylosowano dokładnie trzy asy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Z talii 52 kart wylosowano trzy karty. Ile istnieje możliwości wylosowania dokładnie jednego króla? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\binom{48}{2} \cdot \binom{4}{1}$

☐ $\binom{52}{2} \cdot \binom{48}{1}$

☐ $\binom{52}{2} \cdot \binom{4}{1}$

☐ $\binom{52}{1} \cdot \binom{4}{2}$

Ćwiczenie 2



Na ile sposobów można potasować talię złożoną z 52 kart? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{52 \cdot 51}{2}$

☐ $52!$

☐ $\binom{52}{52}$

☐ 52^{52}

Ćwiczenie 3



Oznaczmy przez:

K – zdarzenie polegające na tym, że brydżysta otrzymał w rozdaniu dokładnie 5 kierów,

D – zdarzenie polegające na tym, że brydżysta otrzymał w rozdaniu dokładnie 2 damy.

Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu K jest równa $\binom{13}{5} \cdot \binom{13}{8}$.	☐	☐
Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu D jest równa $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11}$.	☐	☐
Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $K \cap D$ jest równa $\binom{12}{4} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{36}{7} +$ $+ \binom{12}{5} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{39}{6}$.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Połącz w pary zadanie i odpowiedź.

Z talii 52 kart losujemy trzynaście kart.
Ile jest możliwości otrzymania trzech
asów, dwóch dam i jednego króla?

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{1}$$

Z talii 52 kart losujemy trzynaście kart.
Ile jest możliwości otrzymania dwóch
dam i jednego króla?

$$\binom{4}{4}$$

Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Ile
jest możliwości wylosowania dokładnie
czterech asów?

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{44}{10}$$

Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Ile
jest możliwości wylosowania dokładnie
trzech asów?

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{40}{7}$$

Ćwiczenie 5



Uzupełnij zdanie, wpisując odpowiednią liczbę.

Z talii 24 kart losujemy jedną, zwracamy ją, tasujemy karty i losujemy drugą kartę.

Wyników takiego losowania jest .

Ćwiczenie 6



Z talii zawierającej 52 karty losujemy jedną.

Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie liczby naturalne.

Zdarzeń sprzyjających wylosowaniu króla lub asa jest .

Zdarzeń sprzyjających wylosowaniu karty, która jest pikiem, karo lub dziesiątką jest

.

Zdarzeń sprzyjających wylosowaniu karty, która nie jest ani pikiem, ani asem jest

.

26

36

8

39

28

Ćwiczenie 7



Z talii 52 kart losujemy 13 kart. Oblicz, ile jest możliwości wylosowania co najwyżej jednej dwójki w kolorze pik lub karo.

Ćwiczenie 8



Talia kart do gry w pikietę składa się z 32 kart od siódemki do asa.

Z takiej talii losujemy trzy karty. Ile jest możliwości wylosowania dziesiątki i dwóch dziewiątek?

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Losowanie kombinatoryczne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa liczbę zdarzeń elementarnych w danym doświadczeniu losowym;
- określa liczbę zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu;
- wykorzystuje narzędzia kombinatoryki do zliczania wyników doświadczeń losowych;
- tworzy modele matematyczne sytuacji z kontekstem realistycznym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- drama.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer;
- talie kart.

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają wiadomości na temat sposobów zliczania obiektów kombinatorycznych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z filmem pokazującym zastosowanie kombinatoryki w zadaniach „z kartami”.
2. Następnie uczniowie pracują w pięciu grupach. Każda z grup zapoznaje się z jednym z problemów zapisanych w sekcji „Przeczytaj”.
3. Zadaniem grup jest przedstawienie danego problemu w formie dramy pozostałym grupom, które problem muszą rozwiązać.
4. Po prezentacji zadań, uczniowie wspólnie rozwiązują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wymyślenie zabawnej historyjki opisującej dwa zadania „z kartami”. Historyjkę należy przesłać do dwóch wybranych koleżanek lub kolegów, którzy powinni rozwiązać ukryte w historyjce zadania.

Materiały pomocnicze:

[Liczba podzbiorów zbioru \$n\$ -elementowego. Kombinacje](#)

Wskazówki metodyczne:

Film edukacyjny można wykorzystać na zajęciach dotyczących wyznaczania liczby zdarzeń elementarnych w doświadczeniach losowych.