Granica niewłaściwa funkcji w punkcie

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie

Źródło: Daniel Odonnell, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Pojęcie granicy funkcji w punkcie było znane intuicyjnie już w czasach starożytnych. Stosowano je do obliczania pól figur za pomocą tzw. „metody wyczerpywania”. Metoda polega na wpisywaniu w daną figurę geometryczną ciągu wzajemnie rozłącznych wielokątów o znanych polach, których suma zbliża się do pola badanej figury.

Granic funkcji używamy w wielu zastosowaniach matematyki i właśnie w niektórych sytuacjach w naukach stosowanych pojawiają się sytuacje nietypowe. Jedną z takich sytuacji przedstawimy Ci w tym materiale.

Twoje cele

- Poznasz pojęcie granicy niewłaściwej w punkcie.
- Wyznaczysz granicę funkcji w punkcie z definicji.
- Wymienisz przykłady funkcji, które nie mają granicy w punkcie.

Przeczytaj

Granice niewłaściwe w kosmosie

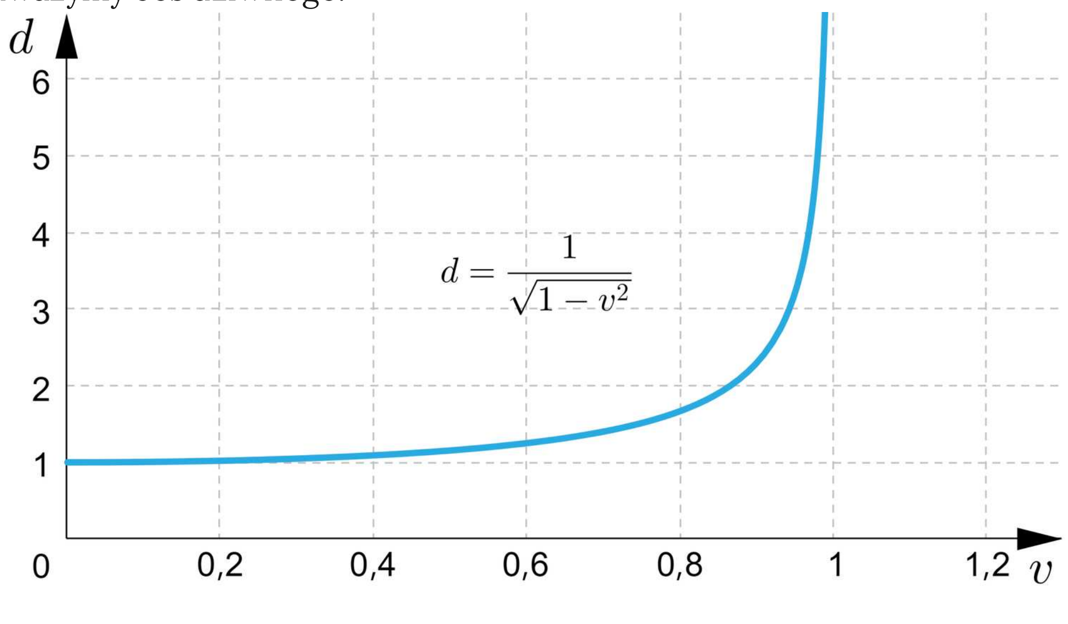
Granicę funkcji w punkcie nazywamy *właściwą*, gdy jest liczbą (skończoną), natomiast *niewłaściwą*, jeżeli jest równa nieskończoności. Wydawałoby się, że poza abstrakcyjną częścią matematyki, w jej zastosowaniach nie powinniśmy otrzymywać w wyniku granic nieskończonych.

Przyjrzyjmy się zatem, odkrytemu przez Alberta Einsteina, zjawisku dylatacji czasu. Nie wchodząc w szczegóły z zakresu fizyki, dylatacja czasu oznacza, że jeżeli ktoś porusza się z dużą prędkością, porównywalną z prędkością światła, to w porównaniu z osobą, która się nie porusza, dla podróżnika czas będzie płynął znacznie wolniej. Możemy na odwrót powiedzieć, że dla osoby, która pozostała nieruchomo, czas będzie płynął znacznie szybciej, niż dla tej, która się porusza.
Zależność tę można przedstawić w postaci funkcji $d(v)$,

$$d(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Tutaj v oznacza prędkość rakiety, mierzoną w częściach prędkości światła. Gdy na przykład poruszamy się z połową prędkości światła, to $v = 0,5$.

Wartości funkcji d, oznaczają czas w sekundach, który upłynie dla obserwatora z Ziemi, gdy w rakiecie podróżnika upłynie jedna sekunda. Jeżeli obejrzymy wykres zależności dylatacji d od v, zauważymy coś dziwnego.



Gdy prędkości są małe, bliskie zera, wartość d jest prawie równa jedności, czyli czas upływa w rakiecie i na Ziemi praktycznie tak samo. Gdy wartości prędkości v są coraz bliższe jedynce, czyli prędkość rakiety zbliża się do prędkości światła, wartość dylatacji nie tylko rośnie gwałtownie, ale rośnie nieograniczenie! Zatem, gdyby rakieta pędziła z prędkością bliską prędkości światła, na przykład $v = 0,999999999999999$ prędkości światła, to gdy w rakiecie upłynie sekunda, na Ziemi upłynie cały rok! Nie jesteśmy ponadto w stanie nigdy przekroczyć prędkości światła, gdyż wówczas czas w rakiecie musiałby płynąć nieskończenie wolno...

Granice niewłaściwe występują wielokrotnie w fizyce, chociażby w zjawisku rezonansu – warto o tym przeczytać w wolnym czasie.

Definicja granicy niewłaściwej w punkcie

Podobnie, jak w przypadku granic właściwych, granice niewłaściwe możemy zdefiniować na dwa równoważne sposoby, według Heinego i Cauchy'ego.

> **Definicja: według Heinego**
>
> Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą równą $+\infty$, gdy poza samym punktem x_0 pewne jego otoczenie należy do dziedziny tej funkcji oraz dla dowolnego ciągu argumentów x_n z dziedziny, dążącego do x_0, wartości $f(x_n)$ dążą do $+\infty$.
>
> **Definicja: według Cauchy'ego**
>
> Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą równą $+\infty$, gdy poza samym punktem x_0 pewne jego otoczenie należy do dziedziny tej funkcji oraz dla dowolnie dużej wartości dodatniej liczby M istnieje taka liczba dodatnia δ, że dla wszystkich argumentów x z dziedziny pomiędzy $x_0 - \delta$ i $x_0 + \delta$ wartości $f(x)$ są większe od M.

Symbolicznie zapisujemy to jako

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Podobnie definiujemy granicę niewłaściwą równą $(-\infty)$.

> **Przykład 1**
>
> Sprawdzimy, używając definicji Heinego, czy funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę niewłaściwą.
>
> **Rozwiązanie**
>
> Weźmy dowolny ciąg argumentów x_n dążący do zera. Wówczas wiemy, że ciąg kwadratów tych argumentów, x_n^2, również dąży do zera, przyjmując tylko wartości dodatnie. Zatem ciąg odwrotności kwadratów, $\frac{1}{x_n^2}$, dąży do $+\infty$, czyli granicą funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ jest $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$

Przykład 2

Sprawdzimy, używając definicji Cauchy'ego, czy funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę niewłaściwą.

Rozwiązanie

Weźmy dowolnie dużą liczbę dodatnią M. Jeżeli zdefiniujemy liczbę dodatnią δ równą odwrotności pierwiastka z M, czyli $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, to wówczas dla wszystkich niezerowych wartości x większych od $\left(-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$ i mniejszych od $\frac{1}{\sqrt{M}}$ wartości funkcji f są większe od M i tym samym granicą funkcji f w punkcie $x = 0$ jest $+\infty$.

Możemy sprawdzić empirycznie, jak wygląda znajdowanie wartości δ w zależności od wartości M.

Należy pamiętać, że im większa wartość M, tym mniejsza jest wartość δ – węższy jest zakres argumentów, dla których wartości funkcji są powyżej zadanej linii – ale za każdym razem można taką wartość znaleźć.

Przykład 3

Wyznaczymy granicę funkcji $f(x) = \frac{2x^2-4}{x^4}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z definicji Heinego. Weźmy dowolny ciąg argumentów x_n dążący do zera. Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^2-4}{x_n^4} = \left[\frac{0-4}{0^+}\right] = -\infty.$$

Przykład 4

Wyznaczymy granicę funkcji $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3-3x^2+3x-1}$ w punkcie $x_0 = 1$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z definicji Heinego. Bierzemy zatem dowolny ciąg argumentów dążących do 1. Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+x_n-2}{x_n^3-3x_n^2+3x_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n-1)(x_n+2)}{(x_n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n+2)}{(x_n-1)^2} = \left[\frac{1+2}{0^+}\right] = \infty$$

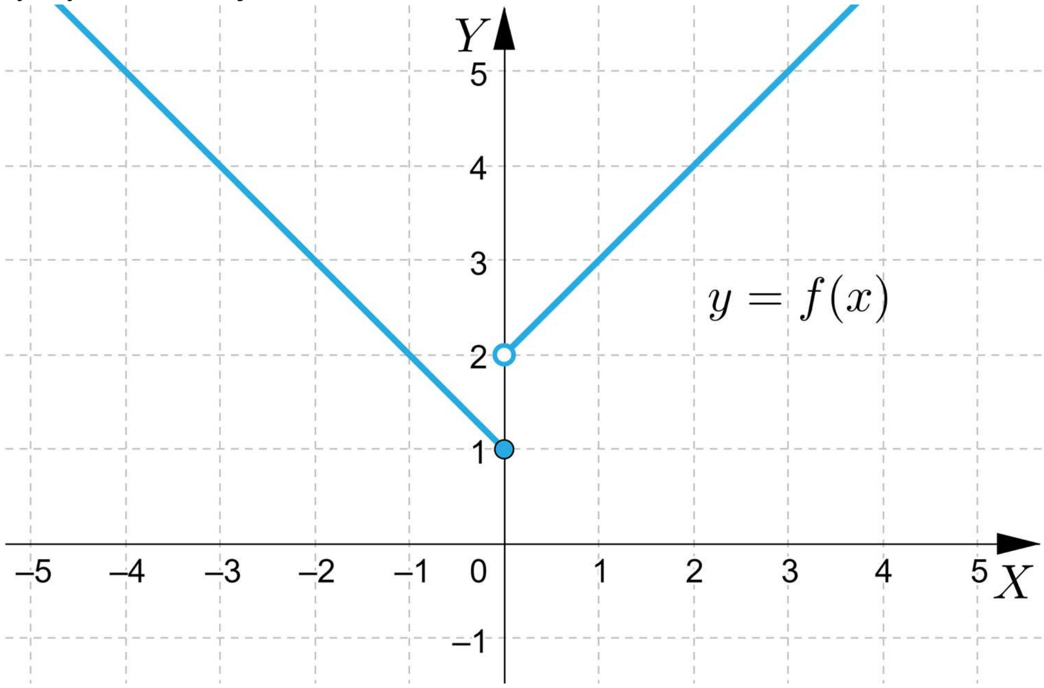
Na koniec rozważań pokażemy przykłady funkcji, które nie mają granicy w punkcie.

Przykład 5

Zbadamy, czy funkcja $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{gdy} x \leqslant 0 \\ x+2 & \text{gdy} x > 0 \end{cases}$ ma granicę dla $x_0 = 0$.

Rozwiązanie

Narysujemy wykres funkcji f:



Wykres funkcji z różnymi granicami jednostronnymi

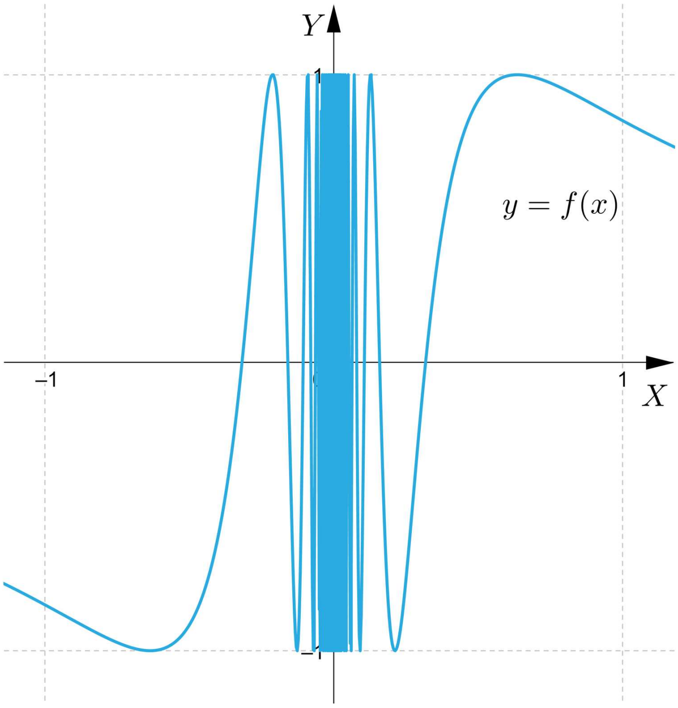
Łatwo zobaczyć, że granica w zerze z lewej strony jest równa 1, zaś z prawej strony jest równa 2, tym samym nie istnieje granica tej funkcji w punkcie $x_0 = 0$, ani skończona, ani nieskończona.

Przykład 6

Zbadamy istnienie granicy funkcji $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie

Przyjrzyjmy się wykresowi funkcji f:



Wykres funkcji bez granic jednostronnych

Gdy wartości x zbliżają się do zera – na przykład z prawej strony – to wartości $\frac{1}{x}$ są coraz większe i sinus tych argumentów oscyluje coraz szybciej pomiędzy (-1) i 1. Taka funkcja w ogóle nie ma granicy, nawet nie posiada granic jednostronnych.

Rozważmy dwa ciągi zbieżne do 0: $x_{n_1} = \frac{2}{4\pi n+\pi}$ oraz $x_{n_2} = \frac{2}{4\pi n+3\pi}$.

Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_{n_1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{2}{4\pi n+\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{4\pi n+\pi}{2}\right) = 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_{n_2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{2}{4\pi n+3\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{4\pi n+3\pi}{2}\right) = -1$$

To dowodzi, że granica $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ w punkcie $x_0 = 0$ nie istnieje.

Słownik

granica właściwa

granica funkcji w punkcie, która jest liczbą rzeczywistą

granica niewłaściwa

granica funkcji w punkcie, która jest nieskończona $(-\infty$ lub $+\infty)$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Uruchom symulację i obserwuj, w jaki sposób, przy korzystaniu z definicji Cauchy'ego, poszukiwać małych wartości δ (delta) przy dowolnie dużych wartościach M.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DKs1bESIl

Polecenie 2

Ustaw suwak wartości M na 1. Odczytaj, jaką wartość przyjmuje δ.

Polecenie 3

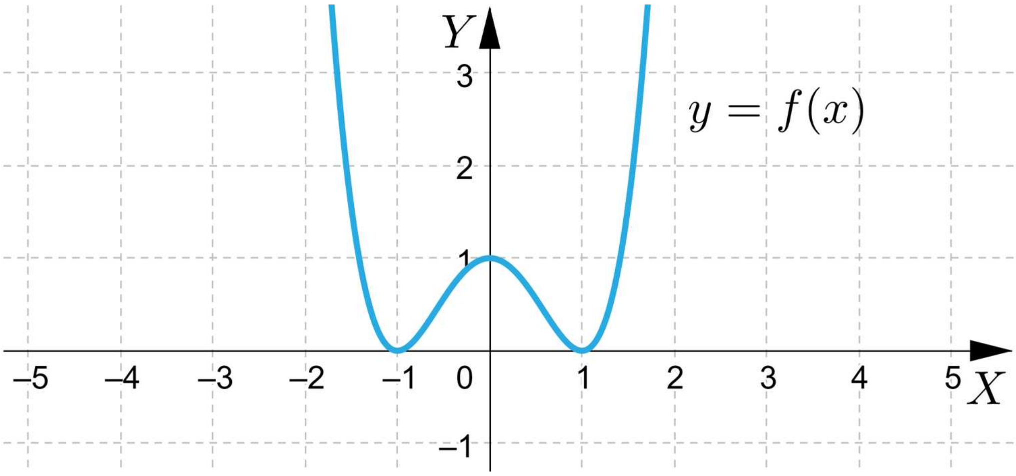
Przesuń suwak wartości M na wartość 4. Odczytaj, jaką wartość przyjmie δ.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

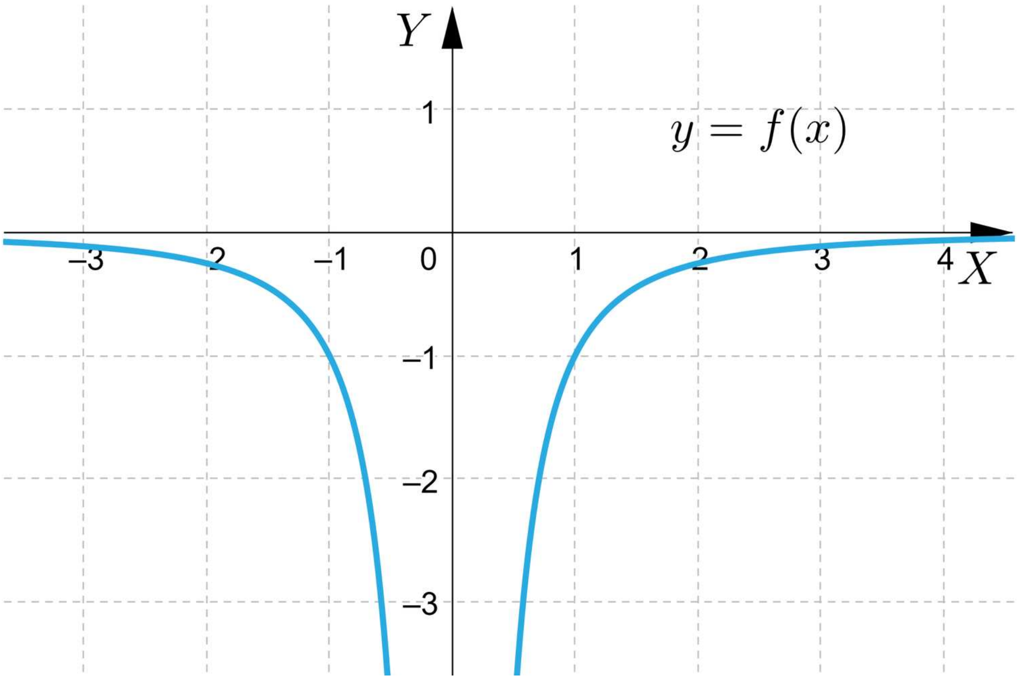
Ćwiczenie 1

Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^2$.



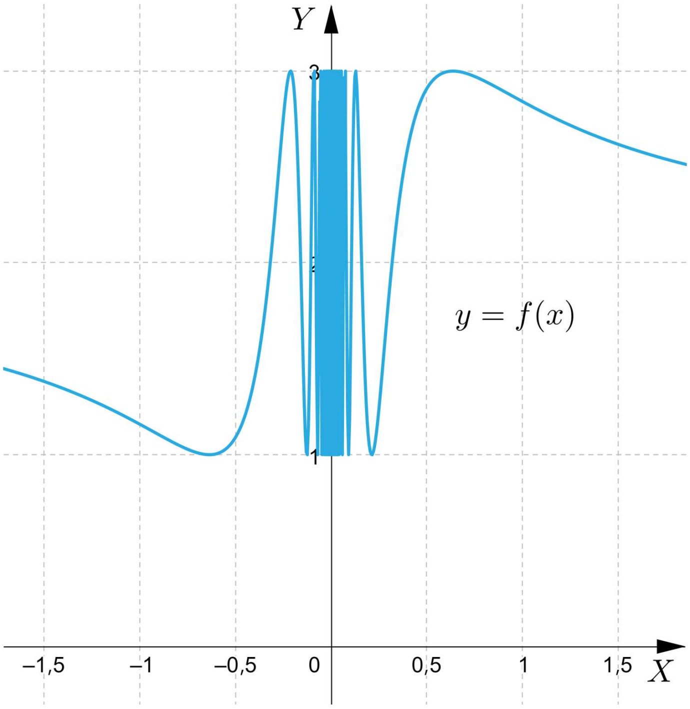
Ćwiczenie 2

Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.



Ćwiczenie 3

Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = 2 + \sin(\frac{1}{x})$.



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak, Aneta Rogalska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Granica niewłaściwa funkcji w punkcie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odróżnia granicę właściwą funkcji w punkcie od niewłaściwej;
- odróżnia przypadek braku granicy jednostronnej w punkcie od granicy niewłaściwej w punkcie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- odwrócona klasa;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie czytają część wprowadzającą lekcji oraz część „Granice niewłaściwe w kosmosie”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej sekcję „Wprowadzenie”, omawia i komentuje z uczniami cele lekcji.
2. Uczniowie formułują kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej część „Definicja granicy niewłaściwej w punkcie” z sekcji „Przeczytaj” oraz omawia ją na forum klasy. Wspomaga się symulacją interaktywną, ilustrującą definicję granicy niewłaściwej według Cauchy'ego.
2. Uczniowie indywidualnie analizują pozostałą część sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie w 3 – 4 osobowych grupach, rozwiązują ćwiczenia interaktywne na czas (od ćwiczenia łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która rozwiąże poprawnie ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy, wątpliwości omawiane.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

Uczniowie zadają sobie nawzajem w ramach 3 – 4 osobowej grupy zadanie, analogiczne do jednego z ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Granice funkcji
- Ciągłość funkcji

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może zostać wykorzystana jako materiał powtórzeniowy.