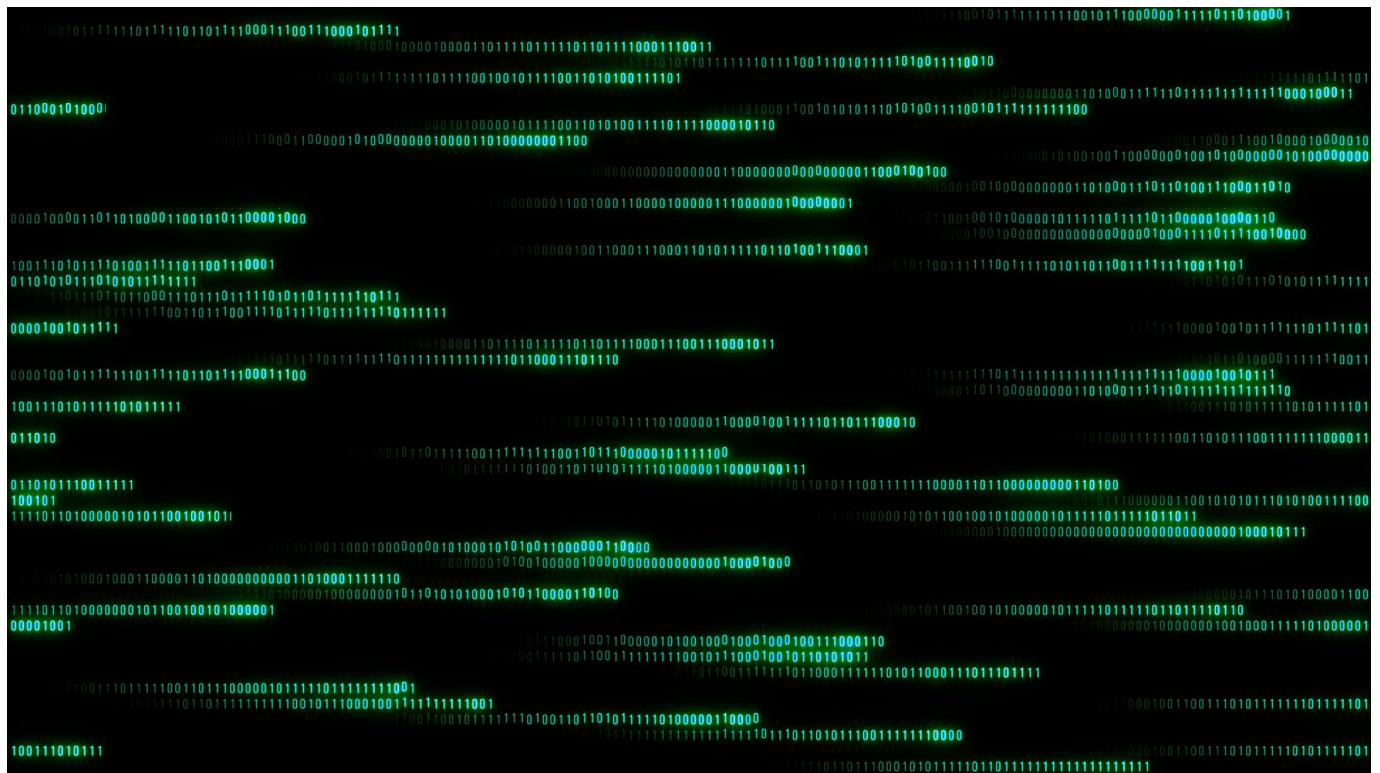




Reprezentacja liczb ujemnych w systemie binarnym

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



W tym e-materiale powtarzamy wiadomości ze szkoły podstawowej.

Wiesz już, czym są pozycyjne systemy liczbowe. Potrafisz też konwertować liczby zapisane w systemie dziesiętnym na ich odpowiedniki binarne. Jak jednak zapisuje się liczby ujemne w systemie dwójkowym?

Najczęściej stosujemy kod uzupełnień do dwóch (skrótowo określany jako U2) – pamiętaj, że dotyczy on tylko liczb całkowitych. System ten pozwala zapisywać zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Tym właśnie systemem zajmiemy się w e-materiale.

Inne zagadnienia związane z systemami liczbowymi przedstawione są w:

- [Systemy liczbowe,](#)
- [Konwersje liczb pomiędzy systemami liczbowymi,](#)
- [Reprezentacja ułamków w systemie binarnym.](#)

Więcej zadań dotyczących systemów liczbowych? [Systemy liczbowe – zadania maturalne.](#)

Twoje cele

- Wyjaśniesz, w jaki sposób zapisuje się liczby w systemie U2.

- Nauczysz się, jak zamieniać liczby dodatnie i ujemne zapisane w systemie dziesiętnym na ich odpowiedniki w kodzie uzupełnień do dwóch.
- Rozwiążesz kilka zadań polegających na konwersji liczb z systemu dziesiętnego na U2 i odwrotnie.

Przeczytaj

Kod uzupełnień do dwóch – podstawy

W przeciwieństwie do systemu binarnego, w kodzie uzupełnień do dwóch (U2) **najstarszy bit** ma wagę ujemną. Pozostałe elementy w systemie U2 są takie same jak w klasycznym zapisie binarnym:

Wartość bitów na kolejnych pozycjach	x_{n-1}	x_{n-2}	...	x_1	x_0
Waga pozycji w systemie dwójkowym	-2^{n-1}	2^{n-2}	...	2^1	2^0

W efekcie kod uzupełnień do dwóch pozwala na zapisywanie liczb całkowitych dodatnich oraz ujemnych. W przypadku użycia n bitów zakres wartości liczb całkowitych w systemie U2 mieści się w granicach:

$$[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$$

Zauważmy, że zapis taki jest niesymetryczny. W przypadku liczb ośmiobitowych możemy przedstawić wartości od -128 do $+127$ (liczba -2^7 nie ma „dodatniego” odpowiednika).

Ważne!

Skoro waga najstarszego bitu liczby jest ujemna, to kiedy jej mnożnik x_{n-1} :

- ma wartość 1 – liczba jest ujemna;
- ma wartość 0 – liczba jest dodatnia lub równa zero.

Najstarszy bit nazywany jest **bitem znaku**.

Przekształcanie zapisu U2 do postaci dziesiętnej

Jeżeli chcemy przekształcić do postaci dziesiętnej liczbę zapisaną w kodzie U2, korzystamy ze wzoru poznanego w czasie poprzedniej lekcji. Pamiętajmy, że waga najstarszego bitu jest ujemna.

Wartość liczby zapisanej w systemie U2 $\{x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1 x_0\}_{(U2)}$ wynosi:

$$x_{n-1} (-2^{n-1}) + x_{n-2} 2^{n-2} + \dots + x_1 2^1 + x_0 2^0$$

Przykład 1

Przekształćmy do postaci dziesiętnej liczbę $11000011_{(U2)}$:

$$11000011_{(U2)} = 1 \cdot (-2^7) + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$

$$= -128 + 64 + 2 + 1 = -61$$

Ponieważ bit znaku miał wartość 1, otrzymaliśmy liczbę ujemną. Spróbujmy przekształcić do systemu dziesiętnego liczbę, której bit znaku jest równy 0.

Przykład 2

Przekształćmy liczbę $01010100_{(U2)}$ do postaci dziesiętnej:

$$01010100_{(U2)} = 0 \cdot (-2^7) + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 =$$

$$= 64 + 16 + 4 = 84$$

Tym razem otrzymaliśmy liczbę dodatnią.

Zapisywanie liczb w kodzie U2

Chcąc zamienić dodatnią liczbę zapisaną w systemie dziesiętnym na postać w 8-bitowym kodzie U2, przekształcimy ją najpierw do postaci dwójkowej (postępując według poznanego wcześniej schematu). Otrzymaną liczbę uzupełnia się z lewej strony tyloma zerami, aby powstał ciąg złożony z ośmiu bitów.

Przykład 3

Przedstawmy liczbę 35 zapisaną w kodzie uzupełnień do dwóch:

$$35 = 100011_{(2)} = 00100011_{(U2)}$$

Liczba przeciwna

Gdybyśmy chcieli zmienić znak liczby z ostatniego przykładu, możemy zrobić to na dwa sposoby.

I sposób

Zamiana na liczbę przeciwną polega na wykonaniu następujących czynności:

- zanegowaniu wszystkich bitów liczby (zamiany 1 na 0 oraz 0 na 1),

- dodaniu 1 do otrzymanej liczby.

Przykład 4

Zamieńmy liczbę $00100011_{(U_2)}$ w liczbę przeciwną.

- dokonujemy inwersji (negujemy wszystkie bity):

$$\sim 00100011$$

$$11011100$$

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

- do wyniku dodajemy 00000001:

$$11011100$$

$$+ 00000001$$

$$11011101$$

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Liczby $00100011_{(U_2)}$ oraz $11011101_{(U_2)}$ mają takie same wartości bezwzględne, ale przeciwne znaki.

II sposób

Dla liczb n-bitowych wartości przeciwnie uzyskujemy, odejmując liczbę od dwukrotnej wagi najstarszego bitu:

$$2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

Przykład 5

Zamieńmy liczbę $00100011_{(U_2)}$ w liczbę przeciwną korzystając z drugiej metody:

$$\begin{array}{r}
 100000000 \\
 - 00100011 \\
 \hline
 11011101
 \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Otrzymaliśmy ten sam wynik co w poprzednim przykładzie.

Działania na liczbach zapisanych w kodzie U2

Operacje dodawania i odejmowania na liczbach zapisanych w kodzie uzupełnień do dwóch wykonuje się tak samo jak na zwykłych liczbach dwójkowych. Mnożenie, dzielenie i pierwiastkowanie są z kolei bardziej skomplikowane i pracochłonne.

Przykład 6

Wykonajmy dodawanie dwóch liczb w systemie U2: 00111010 oraz 10100100:

$$\begin{array}{r}
 00111010 \\
 + 10100100 \\
 \hline
 11011110
 \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Przykład 7

Teraz wykonajmy operację odejmowania wykorzystując liczby w U2: 00101011 oraz 11100100:

$$\begin{array}{r}
 00101011 \\
 - 11100100 \\
 \hline
 01000111
 \end{array}$$

Zauważmy, że w przypadku odejmowania dwóch najstarszych bitów możemy „zapożyczyć” $10_{(2)}$ z lewej strony, poza zapisanymi liczbami. Dzieje się tak ponieważ najstarszy bit to bit znaku – umożliwia nam to przekształcenie odejmowania liczby ujemnej na dodawanie liczby dodatniej. Taki sam wynik otrzymalibyśmy, gdybyśmy zamienili liczbę odejmowaną na liczbę dodatnią, po czym zapisali działanie jako dodawanie.

Słownik

najstarszy bit

bit mający największą wagę (w słowie maszynowym wysunięty najbardziej w lewo); nazywany również najbardziej znaczącym bitem liczby

bit znaku

w kodzie binarnym najbardziej znaczący bit liczby, decydujący o znaku liczby

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P6aHhq26f>

1

Pokażemy, w jaki sposób zapisać w kodzie U2 liczbę -85. Zaczniemy od konwersji jej wartości bezwzględnej na system binarny, a skończymy na dwóch metodach zamiany liczby na przeciwną.

2

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P6aHhq26f>

Wartość bezwzględna liczby -85 wynosi 85:

$$|-85| = 85$$

Możemy zamienić ją na liczbę w postaci dwójkowej.

$$\begin{array}{r|l}
 85 : 2 & \\
 42 & 1 \\
 21 & 0 \\
 10 & 1 \\
 5 & 0 \\
 2 & 1 \\
 1 & 0 \\
 0 & 1
 \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P6aHhq26f>

Omówiliśmy już sposób zamiany liczby zapisanej w systemie dziesiętkowym na postać binarną. Przypomnimy go pokrótce. Dzielimy liczbę 85 przez podstawę systemu dwójkowego, czyli 2. Otrzymujemy iloraz całkowity oraz resztę z dzielenia. Czynności takie wykonujemy aż do momentu, w którym iloraz całkowity wyniesie zero.

$$\begin{array}{r|l}
 85 : 2 & \\
 42 & 1 \\
 21 & 0 \\
 10 & 1 \\
 5 & 0 \\
 2 & 1 \\
 1 & 0 \\
 0 & 1
 \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P6aHhq26f>

Otrzymany ciąg zer i jedynek odczytujemy od końca, tak jak zaznaczono na rysunku.

$$85 = 1010101_{(2)}$$

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P6aHhq26f>

5

Następnie zapisujemy liczbę w 8-bitowym kodzie U2. Uzupełniamy ciąg o tyle zer z lewej strony, aby otrzymać liczbę 8-bitową:

$$1010101_{(2)} = 01010101_{(U2)}$$

6

~ 01010101

10101010

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P6aHhq26f>

Teraz zamienimy liczbę na przeciwną. Najpierw skorzystamy z pierwszej metody opisanej w poprzedniej sekcji. Dokonujemy więc inwersji wszystkich bitów w ciągu $01010101_{(U2)}$ (jedynek zastępujemy zerami, a zera jedynekami).

$$\begin{array}{r} 10101010 \\ + 00000001 \\ \hline 10101011 \end{array}$$

7

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P6aHhq26f>

Do wyniku dodajemy 1 i w rezultacie
otrzymujemy liczbę przeciwną do $01010101_{(U2)}$.

8

$$\begin{array}{r} 100000000 \\ - 01010101 \\ \hline 10101011 \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P6aHhq26f>

Teraz zamieniamy liczbę drugim sposobem.
W tym celu należy odjąć liczbę od dwukrotnej
wagi najstarszego bitu.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P6aHhq26f>

9

Możemy sprawdzić poprawność wykonanych
operacji, czyli przedstawić wartość liczby
zapisanej za pomocą kodu U2 w systemie
dziesiętnym. Pamiętajmy o ujemnej wadze
najstarszego bitu.

10

$$\begin{aligned} 10101011_{(U2)} &= \\ &= 1 \cdot (-2)^7 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= -128 + 32 + 8 + 2 + 1 = \\ &= -85 \end{aligned}$$

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P6aHhq26f>

Otrzymana liczba to -85. Wykonaliśmy zatem następujące czynności:

- konwersja z systemu dziesiętnego na system binarny,
- zamiana liczby na przeciwną,
- prezentacja postaci dziesiętnej liczby zapisanej w systemie U2.

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Polecenie 2

Zapoznaj się ze symulacją interaktywną, w której możesz zaobserwować proces zamiany ujemnej liczby dziesiętnej na liczbę zapisaną w systemie U2.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1BaUMfEw>

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż, jaki jest zakres liczb możliwych do zapisania za pomocą ośmiobitowego kodu U2.

☐ [-128; 128]

☐ [-127; 128]

☐ [-128; 127]

☐ [-127; 127]

Ćwiczenie 2



Dokończ zdanie.

Liczba $1011010001_{(U2)}$ jest...

☐ ujemna.

☐ dodatnia.

Ćwiczenie 3



Wskaż, które stwierdzenia opisujące najstarszy bit w kodzie U2 są prawdziwe.

☐ nie zawiera informacji na temat wartości liczby

☐ decyduje o tym, czy dana liczba jest dodatnia, czy ujemna

☐ ma wagę 2^n

☐ jest interpretowany jako bit znaku

Ćwiczenie 4



Połącz w pary liczby o tej samej wartości.

11000001_(U2)

-63

01000010_(U2)

-86

01111111_(U2)

66

10000001_(U2)

-127

10101010_(U2)

127

Ćwiczenie 5



Zapisz, jaką postać ma liczba 48 zapisana w ośmiobitowym kodzie U2.

Ćwiczenie 6



Uzupełnij zdania.

Aby zamienić liczbę na w systemie uzupełnieniowym U2, należy wykonać dwie czynności.

Najpierw wszystkie bity, czyli zamieniamy 1 na .

Następnie wyniku wartość 1.

dodajemy do

0

przeciwną

odejmujemy od

odwracamy

odwrotną

negujemy

Ćwiczenie 7



Wskaż, która z podanych liczb ma taką samą wartość bezwzględną, ale przeciwny znak niż $010011_{(U2)}$.

☐ $101100_{(U2)}$

☐ $010100_{(U2)}$

☐ $101110_{(U2)}$

☐ $101101_{(U2)}$

Ćwiczenie 8



Wskaż, która z podanych wartości jest liczbą przeciwną $10000101_{(U2)}$.

☐ $00011011_{(U2)}$

☐ $01111011_{(U2)}$

☐ $01111010_{(U2)}$

☐ $01101101_{(U2)}$

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Reprezentacja liczb ujemnych w systemie binarnym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

- I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.
- II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

- I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 2) stosuje przy rozwiązywaniu problemów z różnych dziedzin algorytmy poznane w szkole podstawowej oraz algorytmy:

- a) na liczbach: badania pierwszości liczby, zamiany reprezentacji liczb między pozycyjnymi systemami liczbowymi, działań na ułamkach z wykorzystaniem NWD i NWW,

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 2) wykorzystuje znane sobie algorytmy przy rozwiązywaniu i programowaniu rozwiązań następujących problemów:

- b) wykonywania działań na liczbach w systemach innych niż dziesiętny,

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Wyjaśnisz, w jaki sposób zapisuje się liczby w systemie U2.
- Nauczysz się, jak zamieniać liczby dodatnie i ujemne zapisane w systemie dziesiętnym na ich odpowiedniki w kodzie uzupełnień do dwóch.
- Rozwiążesz kilka zadań polegających na konwersji liczb z systemu dziesiętnego na U2 i odwrotnie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Reprezentacja liczb ujemnych w systemie binarnym”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Wyświetlenie przez nauczyciela tematu i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Uczniowie analizują treści z sekcji „Przeczytaj” wyświetlone na tablicy.
2. Nauczyciel pozostawia wyświetloną zawartość sekcji „Przeczytaj”, czyta treść polecenia nr 1: „Z prezentacji dowiesz się, jak wyznaczyć 8-bitowy kod U2 liczby zapisanej w systemie dziesiętnym. Przećwicz te operacje, przekształcając kilka innych liczb”. Prosi uczniów, aby w parach przeanalizowali rozwiązanie problemu. Wybrana para prezentuje wynik swojej pracy na forum klasy.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje pytania podsumowujące, np.
 - jak zapisuje się liczby ujemne w systemie dwójkowym?
 - w jaki sposób przeprowadzamy mnożenie, dzielenie i pierwiastkowanie na liczbach zapisanych w kodzie uzupełnień do dwóch?
2. Nauczyciel prosi uczniów o podsumowanie zgromadzonej wiedzy.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi) do tematu lekcji („Reprezentacja liczb ujemnych w systemie binarnym”).

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać treści w sekcjach: „Przeczytaj”, „Prezentacja multimedialna”, „Sprawdź się” jako materiał do lekcji powtórkowej.