



Ciąg geometryczny – zadania na dowodzenie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Ciąg geometryczny – zadania na dowodzenie

Źródło: [Gerd Altmann](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Legenda głosi, że pewnego razu chiński filozof Gongsun Long (325 – 250 p.n.e) przekraczał granicę między dwoma chińskimi miastami. Celnicy zażądali od niego myta za białego konia, na którym podróżował.



Wówczas on przeprowadził wywód, w którym udowodnił, że biały koń nie jest koniem.

Bowiem słowo *koń* odnosi się do kształtu nazywanej rzeczy, natomiast słowo *biały* do jej koloru. Nazwa kształtu nie jest nazwą koloru, dlatego można powiedzieć, że biały koń nie jest *koniem*.

Czy to rozumowanie przekonało również Ciebie, że biały koń nie jest koniem?

Tak pokrętnie przeprowadzane dowody uchodzą niestety tylko filozofom, matematyczne dowody są bardziej sformalizowane.

W tym materiale zajmiemy się dowodami związanymi z ciągiem geometrycznym. W rozważaniach, które będziemy prowadzić odejdziemy trochę od ścisłych reguł obowiązujących w klasycznych dowodach (założenie – teza – dowód), na rzecz klarowności zapisów.

Twoje cele

- Wykorzystasz wiadomości na temat ciągów geometrycznych w zadaniach „na dowodzenie”.
- Przeanalizujesz treść zadania i dobierzesz odpowiedni model, związany z ciągiem geometrycznym, do rozwiązania zadania.
- Przeprowadzisz rozumowania, także kilkietapowe, podasz argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

Przeczytaj

Dowód, to ściśle uzasadnienie danego stwierdzenia, przebiegające zgodnie z ustalonymi regułami. Zdanie opisujące własności danych obiektów matematycznych może zostać uznane za twierdzenie, dopiero po przedstawieniu poprawnego dowodu.

W matematyce istnieje wiele rodzajów dowodów. My będziemy posługiwali się dowodem wprost. Prawdziwość tezy będziemy dowodzić bezpośrednio przez dedukcję, korzystając z przyjętych założeń. Kolejne formuły w dowodzie będą wynikały logicznie z poprzednich, albo będą zdaniami, które przyjmuje się za oczywiste (wynikające z przyjętych aksjomatów).

Na początek przypomnienie najważniejszych wzorów dotyczących ciągu geometrycznego, z których będziemy korzystać.

Będziemy przy tym zakładać, że dany ciąg, np. ciąg (a_n) , jest określony dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

Definicja: Ciąg geometryczny

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q , zwaną ilorazem ciągu.

Ciąg geometryczny (a_n)		
Wyraz ogólny ciągu	Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu	Suma n początkowych wyrazów ciągu
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$	$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

W pierwszym z dowodów wykorzystamy wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego, ale również odwołamy się do własności działań na potęgach.

Przykład 1

Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pierwszy wyraz ciągu jest różny od 0. Wykażemy, że każdy wyraz tego ciągu, począwszy od drugiego wyrazu, jest równy różnicy dwóch sąsiadujących z nim wyrazów.

Założenie:

(a_n) – ciąg geometryczny

$$a_1 \neq 0, q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Teza:

$$a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$$

Dowód:

Korzystamy ze wzoru ogólnego ciągu geometrycznego.

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2} = a_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

Zapisujemy różnicę $a_{n+1} - a_{n-1}$ za pomocą uzyskanych wyrażeń.

$$a_{n+1} - a_{n-1} = a_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - a_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

Z prawej strony zapisanej równości wyłączamy wspólne czynniki przed nawias.

$$a_{n+1} - a_{n-1} = a_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1\right]$$

Wykonujemy potęgowanie w drugim nawiasie i zapisujemy uzyskane wyrażenie w najprostszej postaci.

$$a_{n+1} - a_{n-1} = a_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Mnożymy potęgi o tych samych podstawach – dodajemy wykładniki.

$$a_{n+1} - a_{n-1} = a_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Ponieważ $a_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = a_n$, zatem:

$$a_{n+1} - a_{n-1} = a_n$$

c.n.d

Problemy, w których występują parametry, często są przedstawiane jako zadania „na dowodzenie”. Do ich rozwiązania potrzebne są z reguły wiadomości z różnych działów matematyki. W poniższym przykładzie wykorzystamy znajomość sposobów rozwiązywania układów równań.

Przykład 2

Dany jest układ równań z niewiadomymi x, y, z .

$$\begin{cases} x + 5y - z = 5 \\ (-2x) + y + z = 6m \\ x - y + z = 4m + 1 \end{cases}$$

Wykażemy, że istnieją dwie wartości parametru m , dla których rozwiązania x, y, z (w tej kolejności) tego układu równań tworzą [ciąg geometryczny](#).

Sformułowanie założenia i tezy pozostawiamy Ci do samodzielnej pracy, my zaczniemy od dowodu.

Chcemy najpierw znaleźć rozwiązania danego układu równań, nawet gdy rozwiązania będą opisane za pomocą wyrażeń zawierających parametr m .

W tym celu dodajemy stronami pierwsze i drugie równanie układu równań oraz pierwsze i trzecie, aby „wyeliminować” zmienną z .

$$\begin{cases} x + 5y - z = 5 \\ (-2x) + y + z = 6m \\ x - y + z = 4m + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-x) + 6y = 5 + 6m \\ 2x + 4y = 4m + 6 \end{cases}$$

Mnożymy pierwsze równanie otrzymanego układu przez dwa i dodajemy stronami równania układu.

$$+ \begin{cases} (-2x) + 12y = 10 + 12m \\ 2x + 4y = 4m + 6 \end{cases}$$

Uzyskaliśmy równanie z jedną niewiadomą – wyznaczamy y .

$$16y = 16m + 16 \quad | : 16$$

$$y = m + 1$$

Wyznaczone wyrażenie podstawiamy w miejsce y do równania $(-x) + 6y = 5 + 6m$.

$$\begin{cases} y = m + 1 \\ (-x) + 6y = 5 + 6m \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = m + 1 \\ (-x) + 6m + 6 = 5 + 6m \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = m + 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Powracamy do układu równań z trzema niewiadomymi – dołączając trzecie równie początkowego układu.

$$\begin{cases} y = m + 1 \\ x = 1 \\ x - y + z = 4m + 1 \end{cases}$$

Obliczamy z .

$$\begin{cases} y = m + 1 \\ x = 1 \\ 1 - m - 1 + z = 4m + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = m + 1 \\ x = 1 \\ z = 5m + 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem początkowego układu równań są liczby:

$$x = 1, y = m + 1, z = 5m + 1.$$

O liczbach tych wiemy, że tworzą ciąg geometryczny. Na podstawie zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, zapisujemy:

$$(m + 1)^2 = 1 \cdot (5m + 1)$$

Mamy teraz do rozwiązania równanie kwadratowe z niewiadomą m .

$$m^2 + 2m + 1 = 5m + 1$$

$$m^2 - 3m = 0$$

$$m(m - 3) = 0$$

$$m = 0 \text{ lub } m = 3$$

Dla $m = 0$ otrzymujemy: $x = 1, y = 1, z = 1$. Liczby te są kolejnymi wyrazami ciągu stałego, a taki ciąg jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 1.

Dla $m = 3$ otrzymujemy $x = 1, y = 4, z = 16$. Liczby te są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz jest równy 1, a iloraz jest równy 4.

Zatem istnieją dwie wartości liczby m (0 i 3), spełniające warunki zadania, co należało udowodnić.

Trzeci typ zadań „na dowodzenie” związany z ciągiem geometrycznym, to zadania polegające na udowodnieniu własności sumy kolejnych n początkowych wyrazów ciągu.

Przykład 3

Dany jest skończony ciąg geometryczny $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ taki, że $q \neq 0$ i $a_i \neq 0$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Udowodnimy, że suma odwrotności wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa sumie jego wszystkich wyrazów podzielonej przez iloczyn pierwszego i ostatniego wyrazu.

Założenie:

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – ciąg geometryczny

$q \neq 0$ i $a_i \neq 0$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Teza:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{S_n}{a_1 \cdot a_n}$$

Dowód:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej równości, zapisując każdy wyraz ciągu za pomocą pierwszego wyrazu i ilorazu ciągu.

$$L = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot q} + \dots + \frac{1}{a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Wylączamy wspólny czynnik, czyli $\frac{1}{a_1}$ przed nawias.

$$L = \frac{1}{a_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}} \right)$$

Sprowadzamy ułamki w nawiasie do wspólnego mianownika.

$$L = \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1}{q^{n-1}} \right)$$

Rozszerzamy ułamek zapisany w nawiasie przez a_1 – możemy tak postąpić, bo z założenia wynika, że $a_1 \neq 0$.

$$L = \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^{n-2} + \dots + a_1 \cdot q + a_1}{a_1 \cdot q^{n-1}} \right)$$

W liczniku ułamka znajduje się suma kolejnych n wyrazów ciągu geometrycznego, a w mianowniku wyraz a_n .

$$L = \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{S_n}{a_n} \right)$$

$$L = \frac{S_n}{a_1 \cdot a_n}$$

Ostatnia równość dowodzi, że $L = P$, co należało wykazać.

Teraz odwołamy się do wiadomości dotyczących nie tylko ciągu geometrycznego, ale też arytmetycznego.

Przykład 4

Liczby b , c , $2b - a$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Udowodnimy, że liczby ab , b^2 , c^2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Założenie:

$(b, c, 2b - a)$ – ciąg geometryczny

Teza:

(ab, b^2, c^2) – ciąg arytmetyczny

Dowód:

Z własności ciągu geometrycznego wynika, że

$$c^2 = b(2b - a)$$

Przekształcamy otrzymane wyrażenie.

$$c^2 = 2b^2 - ab$$

Wyznaczamy b^2 .

$$2b^2 = c^2 + ab \quad | : 2$$

$$b^2 = \frac{c^2 + ab}{2}$$

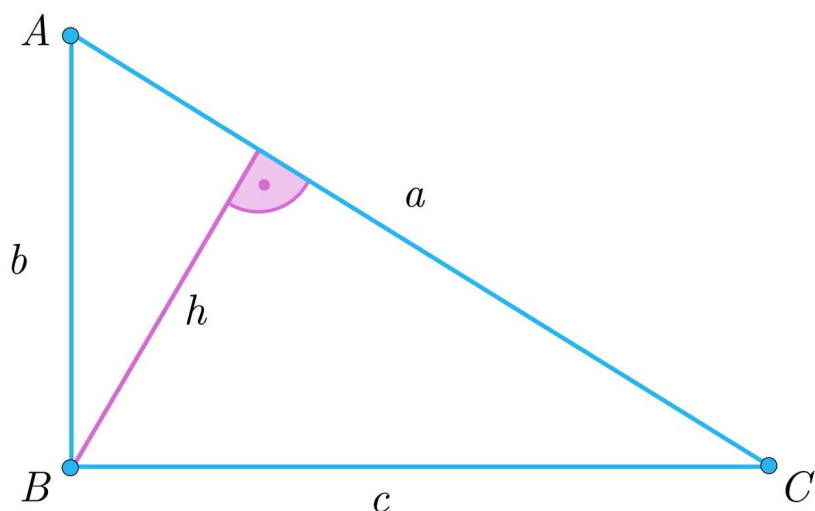
Otrzymana równość oznacza, że liczba b^2 jest średnią arytmetyczną liczb ab i c^2 .

Dowodzi to, że ciąg (ab, b^2, c^2) jest arytmetyczny.

Ostatni przykład pokazuje związek ciągu geometrycznego z geometrią.

Przykład 5

Boki a , b , c trójkąta ABC i wysokość h opuszczona na bok a , tak jak na rysunku, tworzą ciąg geometryczny. Udowodnimy, że trójkąt ABC jest prostokątny.

**Założenie:**

(a, b, c, h) – ciąg geometryczny

$$a > 0, b > 0, c > 0, h > 0$$

Teza:

Trójkąt ABC jest prostokątny.

Dowód:

Z zależności między wyrazami ciągu geometrycznego wynika równość:

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{c}$$

Czyli:

$$ah = bc$$

Mnożymy obie strony równości przez $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc$$

Lewa strona zapisanej równości opisuje pole trójkąta ABC .

$$P = \frac{1}{2}ah$$

Pole tego trójkąta można też obliczyć w nieco inny sposób – znając długości jego dwóch boków i miarę kąta między tymi bokami.

Oznaczmy przez α miarę kąta ABC . Wtedy

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

Porównujemy otrzymane wyrażenia.

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

Ponieważ

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc$$

$$\text{zatem } \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}bc.$$

Stąd wynika, że $\sin \alpha = 1$, czyli $\alpha = 90^\circ$.

Trójkąt ABC jest więc trójkątem prostokątnym, co należało wykazać.

Słownik

ciąg geometryczny

ciągami geometrycznymi nazywamy ciągi liczbowe co najmniej trzywyrazowe, w których każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q , zwaną ilorazem ciągu

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych. Znajdziesz w niej przykład dowodu jednej z własności ciągu geometrycznego. Spróbuj najpierw samodzielnie udowodnić tę własność i porównaj z rozwiązaniem.

Polecenie 2

Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) o wyrazach różnych od zera i nie jest ciągiem stałym oraz iloraz tego ciągu jest różny od (-1) , to ciąg (b_n) określony wyrazem ogólnym $b_n = a_{n+1} + a_n$ jest ciągiem geometrycznym.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Można wykazać, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach różnych, dodatnich i ilorazie q , to ciąg o wyrazie ogólnym $b_n = \log_c a_n$, gdzie $c > 0$, $c \neq 1$ jest ciągiem arytmetycznym.

Wtedy różnica tego ciągu arytmetycznego jest równa:

☐ $\log_q c$

☐ $\log_q c - 1$

☐ $\log_c q$

☐ $\log_c q + 1$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Twierdzenie:

Jeżeli dodatnie liczby a , b , c (w tej kolejności) są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b + c)(a + b + c)$.

W dowodzie tego twierdzenia, korzystamy z tego, że:

☐ $c^2 = ab$

☐ $a^2 = bc$

☐ $b^2 = ac$

**Twierdzenie:**

Jeżeli ciąg (a_n) , gdzie $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$ o wyrazach dodatnich jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \sqrt{2} \cdot a_n^2$ jest też ciągiem geometrycznym.

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

W powyższym twierdzeniu stwierdzenie:

Ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \sqrt{2} \cdot a_n^2$ jest ciągiem geometrycznym to teza.

☐

W powyższym twierdzeniu stwierdzenie:

Jeżeli ciąg (a_n) , gdzie $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$ o wyrazach dodatnich jest ciągiem geometrycznym to teza.

☐

W powyższym twierdzeniu stwierdzenie:

Ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \sqrt{2} \cdot a_n^2$ jest ciągiem geometrycznym to założenie.

☐

W powyższym twierdzeniu stwierdzenie:

Jeżeli ciąg (a_n) , gdzie $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$ o wyrazach dodatnich jest ciągiem geometrycznym to założenie.

Ćwiczenie 4



Twierdzenie: Jeżeli długości boków trójkąta tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q > 1$, to $q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Uzupełnij dowód powyższego twierdzenia, przeciągając odpowiednie znaki lub liczby.

Dowód:

Niech a, aq, aq^2 , gdzie a 0, będą długościami boków trójkąta.

Ponieważ $q > 1$, więc najdłuższy bok trójkąta ma długość .

W trójkącie suma dwóch boków musi być większa od długości trzeciego boku. Aby ten warunek był spełniony, wystarczy sprawdzić, czy suma długości krótszych boków jest większa od długości boku najdłuższego.

$$a + \text{} > \text{}$$

Obie strony nierówności możemy podzielić przez i znak nierówności nie zmienia się, bo a 0.

$$1 + q > \text{}$$

Rozwiązujemy otrzymaną nierówność kwadratową.

$$q^2 - q - 1 \text{ } 0$$

$$\Delta = \text{}$$

$$q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$q_2 = \text{}$$

Zatem

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \text{} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ponieważ $q > 1$, stąd

$$1 < \text{} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Co należało wykazać.

5

>

aq^2

q

<

q

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

>

aq

aq^2

a

q^2

Ćwiczenie 5



Dokończ twierdzenie, przeciągając między podane sumy odpowiedni znak: $<$, $>$ lub $=$.

Twierdzenie:

Jeżeli a , $a - 12$, $a + 12$ w tej kolejności są trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego, o wyrazach różnych od zera, S_n oznacza sumę n kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu, to:

$$- S_{2022} - S_{2021} \boxed{} 0$$

$$- S_{100} - S_{99} \boxed{} 0$$

$$- S_{201} - S_{200} \boxed{} 0$$

$$- S_{1003} - S_{1002} \boxed{} 0$$

=

>

>

>

=

=

<

<

<

Ćwiczenie 6



Poukładaj wyrażenia tak, aby otrzymać twierdzenie prawdziwe.

równe miarom kątów trójkąta DEF .



geometrycznego, długości boków



trójkąta ABC są



Jeżeli długości



trójkąta DEF są równe



długościom wysokości trójkąta ABC ,



boków trójkąta ABC są



to miary kątów



kolejnymi wyrazami ciągu



Ćwiczenie 7



Ciąg $(\sin \alpha, \frac{2}{3}, \cos \alpha)$, gdzie α jest kątem ostrym, tworzą ciąg geometryczny. Wykaż, że $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{3}$.

Ćwiczenie 8



Udowodnij, że jeśli ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny i a, b, c, d są liczbami dodatnimi, to $a + d \geq b + c$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg geometryczny – zadania na dowodzenie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wiadomości na temat ciągów geometrycznych w zadaniach „na dowodzenie”
- analizuje treść zadania i dobiera odpowiedni model, związany z ciągiem geometrycznym, do rozwiązania zadania
- prowadzi rozumowania, także kilkietapowe, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- ocena ważona
- technika kruszenia

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie techniką oceny ważonej przypominają sobie w parach poznane twierdzenia, wzory, definicje, własności związane z ciągiem geometrycznym. Ustalenia zamieszczają na hierarchicznym grafie, który powinien obrazować powiązania między informacjami.
2. Wybrany uczeń omawia efekty pracy swoje i osoby, z którą pracował, pozostali uczniowie ewentualnie korygują wypowiedź lub przedstawiają inne pomysły.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach techniką kruszenia, rozważając przykłady zapisane w sekcji „Przeczytaj”. Po przeczytaniu treści przykładu, ustalają z czego mogą wynikać problemy w rozwiązaniu danego zadania. Zastosowanie tej techniki pozwala na analizę danego problemu z innego punktu widzenia i ułatwia poszukiwanie alternatywnych rozwiązań. Po omówieniu w ten sposób zadania, uczniowie w każdym przypadku ustalają, co należy zrobić, aby wyeliminować trudności, które mogą się pojawić, co należy wiedzieć i jakie wzory zastosować. Następnie porównują swoje przypuszczenia z proponowanym rozwiązaniem.
2. Przykład pokazany w galerii zdjęć interaktywnych rozwiązują samodzielnie, a następnie porównują z rozwiązaniem zapisanym w galerii.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Ciąg arytmetyczny i geometryczny zastosowanie](#)

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać, omawiając własności ciągu geometrycznego.