



Funkcje trygonometryczne kąta $90 - \alpha$

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Funkcje trygonometryczne kąta $90 - \alpha$

Źródło: dostępny w internecie: pikrepo.com, domena publiczna.

Zastanawiałeś się kiedyś, czy można znaleźć długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, znając jedynie długość drugiej przyprostokątnej oraz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego? Jeśli nie, to pomyśl o tym teraz!

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa możemy zbudować układ trzech równań z trzema niewiadomymi... Na szczęście problem okazuje się być dużo łatwiejszy. Musimy tylko wykorzystać trygonometrię!

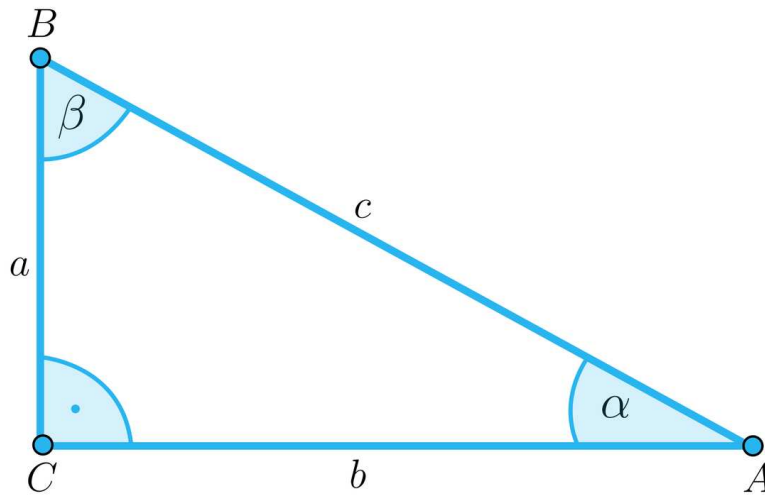


Twoje cele

- Wyprowadzisz wzory na wartości funkcji trygonometrycznych kąta $90 - \alpha$.
- Obliczysz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $90 - \alpha$ znając wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

Przeczytaj

Popatrzmy na trójkąt prostokątny i przypomnijmy raz jeszcze definicje wartości funkcji trygonometrycznych kątów tego trójkąta.



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

Suma miar kątów w trójkącie wynosi 180° , więc $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, a zatem $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Problem 1

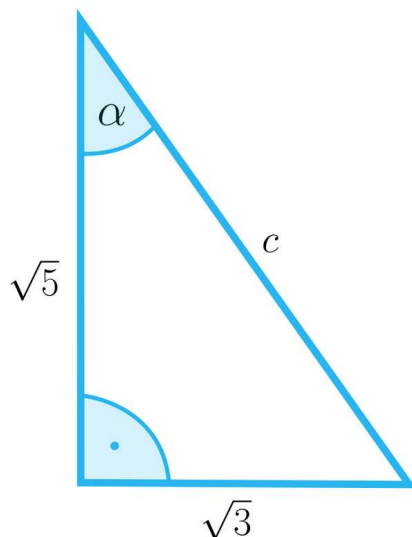
Biorąc pod uwagę powyższe rozważania sformułujmy twierdzenie wiążące funkcje trygonometryczne kątów α oraz $90^\circ - \alpha$.

Powyższe twierdzenie jest najprostszym przykładem [wzorów redukcyjnych](#).

Zanim przejdziemy do zarysowanego we wstępie problemu znalezienia długości przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, gdy znamy długość drugiej przyprostokątnej i wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, rozważmy łatwiejszy przykład.

Przykład 1

Korzystając z danych na rysunku obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta $90^\circ - \alpha$.



Rozwiązanie

Zaczniemy od obliczenia długości przeciwprostokątnej c . Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$c^2 = 3 + 5 = 8.$$

Zatem $c = 2\sqrt{2}$.

Wykorzystamy twierdzenie o funkcjach trygonometrycznych kąta $(90^\circ - \alpha)$:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos^\circ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin^\circ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

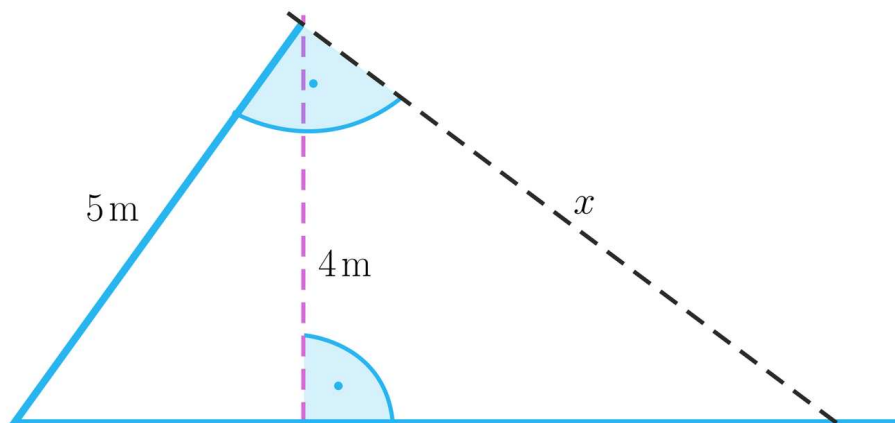
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Przykład 2

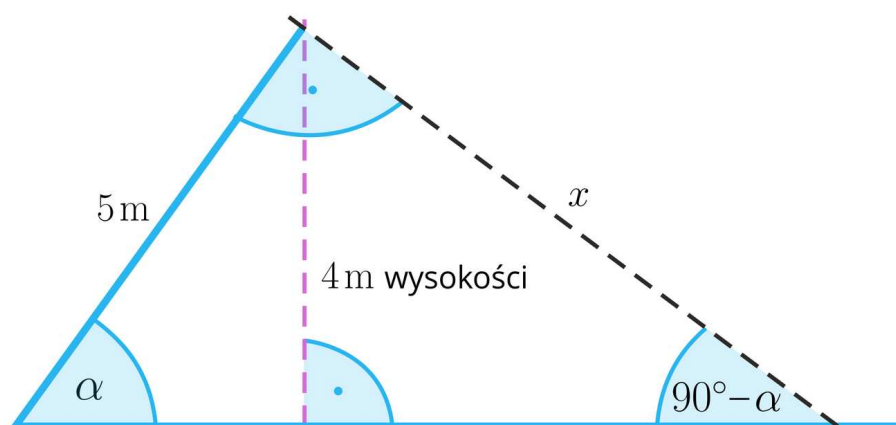
Harcerze chcą wybudować bramę na obozie harcerskim. Chcą, aby brama miała kształt trójkąta prostokątnego, którego wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 4 m, a jedno z ramion ma długość 5 m. Obliczymy, jaka będzie długość drugiego ramienia.

Rozwiązanie

Zacznijmy od rysunku.



Nie znamy szerokości bramy, ani długości x , więc nie możemy korzystać z twierdzenia Pitagorasa. Popatrzmy na kąty w powstałych trójkątach.



Z definicji sinusa wiemy, że $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Zatem $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{5}$.

Skorzystamy z jedynki trygonometrycznej, gdyż, żeby policzyć x , potrzebujemy znać $\sin(90^\circ - \alpha)$.

$$\sin^2(90^\circ - \alpha) = 1 - \cos^2(90^\circ - \alpha) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$$

Z definicji sinusa wiemy, że $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{x}$.

Zatem $\frac{3}{5} = \frac{4}{x}$, więc $x = \frac{20}{3}$.

Odpowiedź

Drugie ramię powinno mieć długość około 6 metrów i 67 centymetrów.

Twierdzenie o wartościach funkcji trygonometrycznych kąta $90^\circ - \alpha$ wykorzystujemy nie tylko w planimetrii. Niejednokrotnie ułatwia ono rachunki i pozwala unikać korzystania z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych. Rozważmy kilka przykładów.

Przykład 3

Obliczmy $\sin 22^\circ - \cos 68^\circ$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $22^\circ = 90^\circ - 68^\circ$.

Możemy więc przekształcić wyjściową równość

$$\sin 22^\circ - \cos 68^\circ = \sin 22^\circ - \cos(90^\circ - 22^\circ)$$

a następnie skorzystać z faktu, że

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

i zapisać równanie:

$$\sin 22^\circ - \cos(90^\circ - 22^\circ) = \sin 22^\circ - \sin 22^\circ = 0.$$

Zwróćmy uwagę, że mogliśmy rozwiązać to zadanie korzystając z faktu, że $22^\circ = 90^\circ - 68^\circ$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ otrzymując ciąg równości:

$$\sin 22^\circ - \cos 68^\circ = \sin(90^\circ - 68^\circ) - \cos 68^\circ = \cos 68^\circ - \cos 68^\circ = 0.$$

Przykład 4

Obliczmy wartość wyrażenia

$$\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Mnożenie jest przemienne oraz $80^\circ = 90^\circ - 10^\circ$, $70^\circ = 90^\circ - 20^\circ$, $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, $50^\circ = 90^\circ - 40^\circ$, więc wyjściową równość możemy zapisać jako:

$$\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 10^\circ) \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 20^\circ) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 40^\circ).$$

Ponieważ $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ nasze równanie przyjmuje postać:

$$\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 20^\circ} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 1.$$

Przykład 5

Udowodnimy, że

$$\sin^2 32^\circ + \sin^2 58^\circ + \sin 83^\circ \cdot \cos^2 7^\circ + \cos 7^\circ \cdot \cos^2 83^\circ + (-\operatorname{tg} 44^\circ) \cdot \operatorname{tg} 46^\circ = \cos 7^\circ.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że: $32^\circ + 58^\circ = 90^\circ$, $44^\circ + 46^\circ = 90^\circ$ i $7^\circ + 83^\circ = 90^\circ$,

zatem

$$\sin^2 58^\circ = \cos^2 32^\circ, \cos 7^\circ = \sin 83^\circ \text{ oraz } \operatorname{tg} 46^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 44^\circ}.$$

Mamy:

$$\begin{aligned} & \sin^2 32^\circ + \sin^2 58^\circ + \sin 83^\circ \cdot \cos^2 7^\circ + \cos 7^\circ \cdot \cos^2 83^\circ - \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ = \\ & = \sin^2 32^\circ + \cos^2 32^\circ + \cos 7^\circ \cdot (\sin 83^\circ \cdot \cos 7^\circ + \cos^2 83^\circ) - \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 44^\circ} = \\ & = 1 + \cos 7^\circ \cdot (\sin 83^\circ \cdot \sin 83^\circ + \cos^2 83^\circ) - 1 = \\ & = \cos 7^\circ \cdot (\sin^2 83^\circ + \cos^2 83^\circ) = \cos 7^\circ \cdot 1 = \cos 7^\circ. \end{aligned}$$

c. n. u.

Słownik

wzory redukcyjne

wzory, które pozwalają przekształcić funkcje trygonometryczne kątów postaci $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$, ... w funkcje trygonometryczne kąta α

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę, a następnie spróbuj odszyfrować hasło.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DXtjslSdD>


Polecenie 2

W trójkącie prostokątnym mniejszy z kątów ma miarę α . Przyprostokątne tego trójkąta mają długość 1 cm i 8 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α oraz $(90^\circ - \alpha)$.

Polecenie 3

Uprość wyrażenie $(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ) + \operatorname{tg} 23^\circ \operatorname{tg} 67^\circ$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

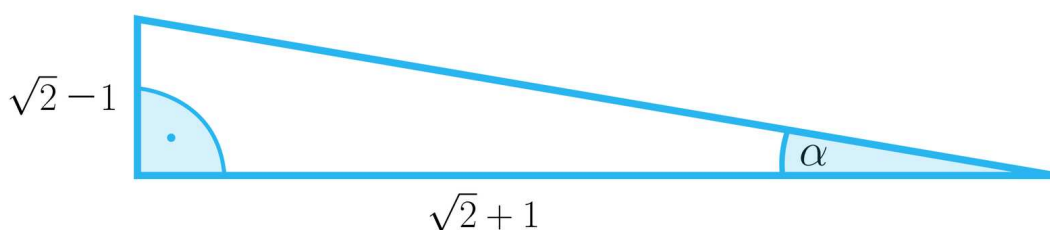
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Dany jest trójkąt prostokątny jak na rysunku poniżej.



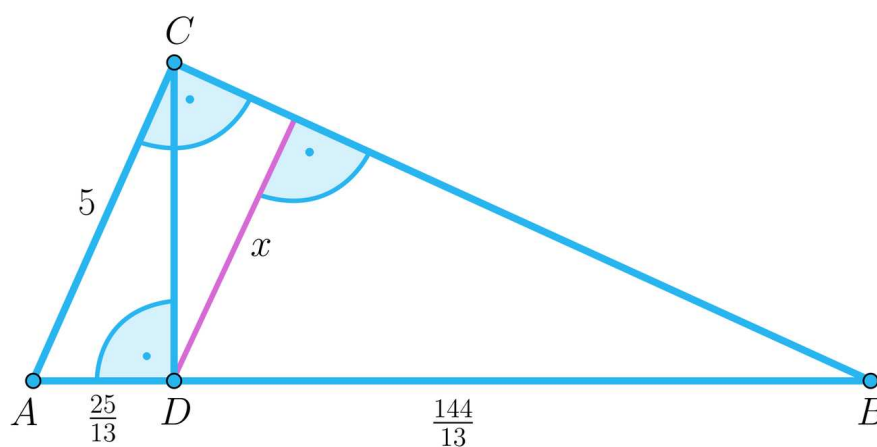
Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Korzystając z informacji przedstawionych na rysunku, oblicz x . Uzupełnij tekst, przeciągając odpowiednie wyrażenia we właściwe miejsce.



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Doprowadź wyrażenie:

$$\sin 28^\circ \cdot \cos 62^\circ + \sin^4 14^\circ + \sin^2 14^\circ \cdot \sin^2 76^\circ + \cos^2 14^\circ + \frac{\cos 62^\circ \cdot \cos 28^\circ}{\operatorname{tg} 28^\circ}$$

do najprostszej postaci.

Ćwiczenie 7



Dany jest trapez równoramienny o polu $44\sqrt{6}$ i wysokości $4\sqrt{6}$, w który można wpisać okrąg. Oznaczmy przez α kąt ostry tego trapezu. Wyznacz wartość funkcji $\cos(90^\circ - \alpha)$.

Dla nauczyciela

Autor: Julia Wódka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcje trygonometryczne kąta $90 - \alpha$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne:

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta $90 - \alpha$ znając wartości funkcji trygonometrycznych kąta α ,
- wyprowadza wzory na wartości funkcji trygonometrycznych kąta $90 - \alpha$.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Gra edukacyjna”.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji w temacie: „Funkcje trygonometryczne kąta $90 - \alpha$ ”.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.

3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończony na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Funkcje trygonometryczne kąta $90 - \alpha$ ”.