



Funkcje liczbowe

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Funkcje liczbowe

Źródło: Tim Evans, dostępny w internecie: unsplash.com.

Wiemy, że funkcja jest przyporządkowaniem elementów jednego zbioru elementom zbioru drugiego. Dziedziną funkcji mogą być różne zbiory. Elementami dziedziny mogą być np. uczniowie jednej klasy, państwa świata, samochody zarejestrowane w danym państwie, itp. Zbiór wartości funkcji mogą tworzyć liczby, kody liczbowo-literowe, wyniki uzyskane podczas zawodów sportowych, itd. Szczególne znaczenie dla analizy matematycznej mają funkcje, których dziedziną i zbiorem wartości są zbiory liczbowe. Tego typu funkcjami będziemy się obecnie zajmowali.

Twoje cele

- Utworzysz różne przyporządkowania zbiorów liczbowych.
- Nauczysz się rozróżniać te przyporządkowania, które są funkcjami.
- Odróżnisz przyporządkowania jednoznaczne od niejednoznacznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję funkcji.

Definicja: Funkcja

Dane są dwa niepuste zbiory X i Y .

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y .

Symbolicznie oznaczamy $f : X \rightarrow Y$ i czytamy „funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y ”.

- Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a jego elementy argumentami funkcji f
- Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji. Każdy element y zbioru Y , który został przyporządkowany co najmniej jednemu argumentowi x nazywamy wartością funkcji f dla argumentu x , co zapisujemy symbolicznie $y = f(x)$. Zbiór tych elementów y nazywamy zbiorem wartości funkcji.

W zależności od tego, jakimi zbiorami są zbiory X i Y , funkcje określa się różnymi nazwami.

Gdy dziedzina funkcji $X \subset \mathbb{R}$ i zbiór wartości funkcji $Y \subset \mathbb{R}$, to funkcję nazywa się **funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej**.

Jeżeli tylko zbiór wartości funkcji $Y \subset \mathbb{R}$, to funkcję f nazywa się **funkcją rzeczywistą**.

Funkcje, których dziedzina i zbiór wartości są liczbami rzeczywistymi, nazywa się także **funkcjami liczbowymi**.

Zbiór wartości funkcji nie musi być identyczny z całą przeciwdziedziną.

Jeśli każdy element $y \in Y$ jest wartością funkcji f dla pewnego $x \in X$, to wówczas mówimy, że f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y .

Poniższe przykłady pomogą zrozumieć pojęcie funkcji liczbowej.

Przykład 1

Dana jest funkcja f , która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje jej czwartą część powiększoną o 5. Określimy jej dziedzinę i zbiór wartości oraz wzór opisujący tę funkcję.

Rozwiązanie

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$ZW = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 0,25x + 5$$

Jest to przykład **funkcji liczbowej**. Każdej liczbie rzeczywistej możemy przyporządkować dokładnie jedną wartość, którą wyznaczymy zgodnie z ustalonym wzorem. Dziedzina i zbiór wartości tej funkcji są zbiorami liczb rzeczywistych. Jest to też przykład odwzorowania „na”.

Przykład 2

Dana jest funkcja f , która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje jej sześcian powiększony o 2. Określimy jej dziedzinę, zbiór wartości, wzór opisujący tę funkcję oraz wykonamy tabelkę częściową.

Rozwiązanie

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$ZW = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 + 2$$

argumenty i wartości funkcji									
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-62	-25	-6	1	2	3	10	29	66

Jest to przykład funkcji liczbowej, ponieważ każdej liczbie rzeczywistej możemy przyporządkować dokładnie jedną wartość, którą wyznaczymy zgodnie z ustalonym wzorem. Dziedzina i zbiór wartości tej funkcji są zbiorami liczb rzeczywistych. Jest to przykład odwzorowania „na”.

Przykład 3

Dana jest funkcja f , która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje iloczyn tej liczby przez 5 powiększony o jej kwadrat. Określimy jej dziedzinę, zbiór wartości, wzór opisujący tę funkcję oraz sporządzimy tabelkę częściową.

Rozwiązanie

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$ZW = \langle -6, 25, \infty \rangle$$

$$f(x) = 5x + x^2$$

argumenty i wartości funkcji

argumenty i wartości funkcji

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-6	-6	-4	0	6	14	24	36

Jest to przykład **funkcji liczbowej**. Każdej liczbie rzeczywistej możemy przyporządkować dokładnie jedną wartość, którą wyznaczymy zgodnie z ustalonym wzorem. Dziedzina i zbiór wartości tej funkcji są zbiorami liczbowymi.

Przykład 4

Dana jest funkcja f , która każdej liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 10. Określimy dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

Rozwiązanie

$$D_f = \mathbb{N}_+$$

$$ZW = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Jest to przykład funkcji liczbowej, ponieważ dziedzina i zbiór wartości są zbiorami liczbowymi.

Przykład 5

Czy przyporządkowanie, które każdej liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje wszystkie jej dzielniki większe od jednośc, jest funkcją?

Rozwiązanie

Jest to przykład przyporządkowania, które nie jest funkcją. Np. liczbie dwanaście możemy przyporządkować pięć różnych liczb: dwa, trzy, cztery, sześć, dwanaście.

Przykład 6

Dana jest funkcja f , która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje kwadrat tej liczby pomniejszony o 7. Określimy jej dziedzinę, zbiór wartości, wzór opisujący tę funkcję oraz wykonamy tabelkę częściową.

Rozwiązanie

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$ZW = \langle -7, \infty \rangle$$

$$f(x) = x^2 - 7$$

argumenty i wartości funkcji

argumenty i wartości funkcji									
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	9	2	-3	-6	-7	-6	-3	2	9

Jest to przykład [funkcji liczbowej](#). Każdej liczbie rzeczywistej możemy przyporządkować dokładnie jedną wartość, którą wyznaczymy zgodnie z ustalonym wzorem. Dziedzina i zbiór wartości tej funkcji są pewnymi zbiorami liczb rzeczywistych.

Słownik

funkcja liczbowa

funkcja, której dziedzina i zbiór wartości są zbiorami liczb rzeczywistych

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w prezentacji multimedialnej, a następnie rozwiąż polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DvvrVYxFF>

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Która z poniższych tabel przedstawia funkcję, której dziedzina to: $\{-5, -3, 1, 3, 5\}$?

A.

x	-5	-3	1	3	5
y	2	2	2	2	2

B.

x	-5	-2	1	3	5
y	2	7	8	10	2

C.

x	-6	-3	1	3	5
y	3	6	2	2	2

D.

x	-5	-3	0	3	5
y	2	2	4	7	2

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ D

☐ C

☐ A

☐ B

Ćwiczenie 2



Która z poniższych tabel przedstawia funkcję, której dziedzina to: $\{2, 5, 7, 24, 28\}$?

A.

x	-5	-3	1	3	5
y	2	2	2	2	2

B.

x	-5	-2	1	3	5
y	2	5	7	24	28

C.

x	-6	-3	1	3	5
y	3	6	2	2	2

D.

x	-5	-3	0	3	5
y	2	2	4	7	2

Wskaż poprawną odpowiedź.

☐ D

☐ C

☐ A

☐ B

Ćwiczenie 3



Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje liczbę o 35% od niej mniejszą. Wskaż wzór, który opisuje tę funkcję.

☐ $f(x) = x - 35$

☐ $f(x) = x - 0,35x$

☐ $f(x) = 0,35x$

☐ $f(x) = x + 0,35x$

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Funkcja $f(x) = (n + 3) \cdot x - 6$ dla $x = 2$ przyjmuje wartość (-8) . Wynika z tego, że n jest równe:

☐ -4

☐ -1

☐ 0

☐ 7

Ćwiczenie 6



Liczbę przekątnych dowolnego n - kąta opisuje następująca funkcja $p(n) = 0,5(n - 3) \cdot n$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 3. Połącz w pary nazwę wielokąta z liczbą jego przekątnych.

dwunastokąt

90

siedmiokąt

5

pięciokąt

35

dziesięciokąt

54

piętnastokąt

14

Ćwiczenie 7



Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-4, -3, -2, -1, 6, 1, 2, 3, 5\}$ przyporządkowuje liczbę przeciwną do sześcianu tej liczby. Który ze zbiorów uporządkowanych par opisuje tę funkcję?

☐ $\{(-4, 64), (-3, 27), (-2, -8), (-1, -1), (0, 0), (1, -1), (2, 8), (3, -27), (5, 125)\}$

☐ $\{(-4, -64), (-3, -27), (-2, -8), (-1, -1), (0, 0), (1, -1), (2, -8), (3, -27), (5, -125)\}$

☐ $\{(-4, -64), (-3, 27), (-2, 8), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, 8), (3, 27), (5, 125)\}$

☐ $\{(-4, 64), (-3, 27), (-2, 8), (-1, 1), (6, -216), (1, -1), (2, -8), (3, -27), (5, -125)\}$

Ćwiczenie 8



Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru $f(x) = 3x^2 + 3$, gdy $x \in \{-3, -1, 0, 1\}$. Z podanych liczb wybierz te, które należą do zbioru wartości tej funkcji.

☐ 0

☐ 30

☐ -3

☐ 9

☐ 15

☐ 3

☐ 6

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcje liczbowe

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- poznaje różne przyporządkowania zbiorów liczbowych
- rozróżnia te przyporządkowania, które są funkcjami
- odróżnia przyporządkowania jednoznaczne od niejednoznacznych
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji
- analizuje podane warunki i buduje na ich podstawie funkcję liczbową

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi chętnych uczniów o przygotowanie prezentacji przypominającej definicję i sposób opisywania funkcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje przykłady przyporządkowań, a uczniowie określają, czy to jest funkcja.
2. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.
3. Uczniowie oglądają prezentację przygotowaną przez swoich kolegów. Jest ona wprowadzeniem do lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, podzieleni na sześć grup, analizują przykłady zamieszczone w sekcji Przeczytaj.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w większe grupy i porównują między sobą własne przemyślenia.
3. Uczniowie metodą burzy mózgów szukają odpowiedzi na pytanie: jakie funkcje nazywamy funkcjami liczbowymi? Weryfikują pomysły i formułują wnioski.
4. Uczniowie oglądają prezentację multimedialną, a następnie dyskutują o sposobach zapisu funkcji liczbowych.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.
2. Zadanie dla chętnych: Funkcja f jest określona za pomocą opisu słownego: „Każdej liczbie całkowitej z przedziału $\langle -20, 8 \rangle$ funkcja przyporządkowuje różnicę wartości bezwzględnej tej liczby i liczby 5”.
 - a) Napisz wzór funkcji f .
 - b) Podaj zbiór wartości funkcji f .
 - c) Naszkicuj wykres tej funkcji.

Materiały pomocnicze:

[Sposoby opisywania funkcji liczbowych](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną uczniowie mogą przeanalizować przed lekcją, przygotować własną prezentację i przedstawić ją na forum klasy.