



Zastosowania wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych z wartością bezwzględną

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

An aerial photograph showing a paved road that curves through a dense, lush green forest. The trees are vibrant green, and the road is a light grey color. The perspective is from directly above, looking down on the landscape.

Zastosowania wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych z wartością bezwzględną

Źródło: Kelly Lacey, dostępny w internecie: www.pexels.com.

W tym materiale wykorzystamy znane zależności trygonometryczne (suma i różnica cosinusów; sinus podwojonego kąta, cosinus podwojonego kąta; cosinus różnicy argumentów) do rozwiązywania równań trygonometrycznych, w których występuje wartość bezwzględna. W związku z tym przypomnimy sobie definicję i własności wartości bezwzględnej oraz metodę rozważania przypadków.

Twoje cele

- Przypomnisz sobie zależności trygonometryczne i wykorzystasz je do rozwiązywania równań trygonometrycznych z wartością bezwzględną.
- Nauczysz się wykorzystywać własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania równań trygonometrycznych.

Przeczytaj

Przypomnimy podstawowe pojęcia, własności i twierdzenia konieczne do rozwiązywania równań z wartości bezwzględnej.

Zacznijmy od definicji pojęcia wartości bezwzględnej z liczby x (będziemy też używać nazwy: moduł z x):

Definicja: wartość bezwzględna

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę na to, że definicję tę możemy także zapisać następująco:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x > 0 \\ -x, & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

Wprost z definicji wynikają dwie przydatne własności:

Twierdzenie: własności modułu

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą równości:

1. $|x|^2 = x^2$,

2. $\sqrt{x^2} = |x|$.

Bardzo przydatne do rozwiązywania zadań są twierdzenia o działaniach na modułach.

Twierdzenie: iloczyn modułów

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x oraz dowolnej liczby rzeczywistej $y \neq 0$ zachodzi równość: $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Do rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną przydają się dwa twierdzenia:

Twierdzenie: nierówności na modułach

1. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
Równość $|x + y| = |x| + |y|$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x \cdot y \geq 0$.

2. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność: $||x| - |y|| \leq |x + y|$.
Równość $||x| - |y|| = |x + y|$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x \cdot y \leq 0$.

Zaprezentujemy różne przykłady równań trygonometrycznych z wartością bezwzględną.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie: $|\cos x - \frac{1}{2}| = \sin x - \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Rozważmy dwa przypadki:

Przypadek 1.

Niech $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

Wówczas równanie ma postać: $\cos x = \sin x$.

Równanie jest równoważne równaniu:

$$\operatorname{tg} x = 1.$$

Zatem

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Po uwzględnieniu założenia $\cos x \geq \frac{1}{2}$ otrzymujemy odpowiedź w przypadku 1:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przypadek 2.

Niech $\cos x < \frac{1}{2}$.

Wówczas równanie przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2} - \cos x = \sin x - \frac{1}{2}, \text{ czyli}$$

$$\cos x + \sin x = 1.$$

Dzielimy równanie stronami przez $\sqrt{2}$ i otrzymujemy:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Korzystamy ze wzoru na cosinus różnicy argumentów i otrzymujemy:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } \frac{\pi}{4} - x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

A zatem $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Po uwzględnieniu założenia $\cos x < \frac{1}{2}$, otrzymujemy odpowiedź w przypadku 2:
 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie: $5 + 2 \cos 2x = 3|2 \sin x - 1|$.

Rozwiązanie

Korzystamy ze [wzoru na cosinus podwojonego kąta](#):

$$5 + 2(1 - 2 \sin^2 x) = 3|2 \sin x - 1|.$$

Równanie ma zatem postać:

$$|6 \sin x - 3| = -4 \sin^2 x + 7.$$

Rozważmy dwa przypadki

Przypadek 1:

$$\text{Niech } \sin x \geq \frac{1}{2}.$$

Wówczas równanie ma postać:

$$6 \sin x - 3 = -4 \sin^2 x + 7,$$

czyli

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 5 = 0.$$

$$\text{Wówczas: } \sin x = 1 \text{ lub } \sin x = -\frac{5}{2}.$$

Uwzględniając założenia otrzymujemy rozwiązanie w przypadku 1: $\sin x = 1$, czyli
 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przypadek 2

$$\text{Niech } \sin x < \frac{1}{2}.$$

Wówczas równanie przyjmuje postać:

$$3 - 6 \sin x = -4 \sin^2 x + 7,$$

czyli

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ lub } \sin x = 2.$$

Po uwzględnieniu założenia $\sin x < \frac{1}{2}$ otrzymujemy warunek $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Zatem rozwiązaniami w przypadku 2 są:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Odpowiedź: } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 3

Rozwiążemy równanie: $|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x$.

Rozwiązanie

Rozważymy przypadki.

Przypadek 1

Niech $\cos x \geq 0$.

Wówczas równanie ma postać:

$$\cos x - \cos 3x = \sin 2x.$$

Korzystamy [ze wzoru na różnicę cosinusów](#) i otrzymujemy:

$$-2 \sin(-x) \sin 2x = \sin 2x$$

$$2 \sin x \sin 2x = \sin 2x$$

$$2 \sin x \sin 2x - \sin 2x = 0$$

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynu

$$\sin 2x(2 \sin x - 1) = 0.$$

A stąd otrzymujemy alternatywę warunków:

$$\sin 2x = 0 \text{ lub } 2 \sin x - 1 = 0.$$

Zatem

$$2x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Po uwzględnieniu warunku $\cos x \geq 0$ otrzymujemy odpowiedź w przypadku 1:

$$x = 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przypadek 2

Niech $\cos x < 0$.

Wówczas równanie ma postać:

$$-\cos x - \cos 3x = \sin 2x$$

Korzystamy ze wzoru na sumę cosinusów i otrzymujemy:

$$-2 \cos(-x) \cos 2x = \sin 2x$$

$$-2 \cos x \cos 2x = \sin 2x$$

Korzystamy ze wzoru na sinus podwojonego kąta i otrzymujemy:

$$-2 \cos x \cos 2x = 2 \sin x \cos x$$

Ponieważ $\cos x < 0$, dzielimy równanie stronami przez $2 \cos x$:

$$-\cos 2x = \sin x$$

$$\cos 2x = -\sin x$$

Wykorzystujemy wzory redukcyjne i otrzymujemy:

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Równanie ma rozwiązanie:

$$2x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z},$$

czyli

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Po uwzględnieniu założenia $\cos x < 0$, otrzymujemy rozwiązanie w przypadku 2:

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Odpowiedź: $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie: $|\sin 2x + \cos x| = ||\sin 2x| - |\cos x||$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia opisanego na początku lekcji:

Równość $||a| - |b|| = |a + b|$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot b \leq 0$.

W naszym równaniu niech: $a = \sin 2x, b = \cos x$.

Wówczas równanie z zadania jest równoważne warunkowi:

$$\sin 2x \cdot \cos x \leq 0$$

$$2 \sin x \cdot \cos^2 x \leq 0$$

$$\sin x (1 - \sin^2 x) \leq 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$-1 \leq \sin x \leq 0 \text{ lub } \sin x \geq 1.$$

Zatem odpowiedź jest następująca:

$$x \in \langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Słownik

cosinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

sinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

wzory na sumę oraz różnicę cosinusów

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę edukacyjną. Do równania trygonometrycznego dopasuj jego rozwiązanie w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $|\sin 2x + \cos x| = |\sin 2x| + |\cos x|$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rozwiązaniami równania $|\cos x - 2 \sin x| + \cos x = 0$ są liczby:

☐ $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$ lub $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 2



Rozwiązaniami równania $\sin x = \cos|x|$ są:

☐ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 3



Wstaw takie wyrażenie, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

$\cos x = \sin|x|$ wtedy i tylko wtedy, gdy (, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ i $k \geq 0$) lub (, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ i $k \leq 0$).

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Ćwiczenie 4



Wstaw takie wyrażenie, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

$|\cos 2x| = |6 \sin^2 x - 1|$ wtedy i tylko wtedy, gdy lub lub , gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \pi + 2k\pi$$

$$x = k\pi$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Ćwiczenie 5



Połącz w pary równanie z równoważną mu nierównością.

$$|\sin x - \cos x| = |\sin x| + |\cos x|$$

$$\sin 2x \geq 0$$

$$|\sin x \cos x + \cos 2x| = |\sin x \cos x| +$$

$$\sin 2x \leq 0$$

$$|\sin x + \cos x| = |\sin x| + |\cos x|$$

$$\sin 4x \geq 0$$

$$|\sin x \cos x - \cos 2x| = |\sin x \cos x| +$$

$$\sin 4x \leq 0$$

Ćwiczenie 6



Wszystkimi rozwiązaniami równania $|\sin 2x| = \cos x$ są:

☐ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 7



Rozwiąż równanie: $\sin x \cdot \sin|x| = \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie: $|1 - 2 \sin x + \cos x| + 2 \sin x + 1 = \cos 2x$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowania wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych z wartością bezwzględną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzory trygonometryczne w przekształcanie równań;
- wykorzystuje własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania równań trygonometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- gra dydaktyczna;

- metoda tekstu przewodniego;
- metoda stolików eksperckich.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat zajęć: „Zastosowania wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych z wartością bezwzględną” i prosi, by na jego podstawie uczniowie sformułowali cel lekcji oraz kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie indywidualnie analizują treść polecenia numer 1 „Zagraj w grę edukacyjną. Do równania trygonometrycznego dopasuj jego rozwiązanie w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ ” oraz materiał z sekcji „Gra edukacyjna”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Zastosowania wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych z wartością bezwzględną”.