



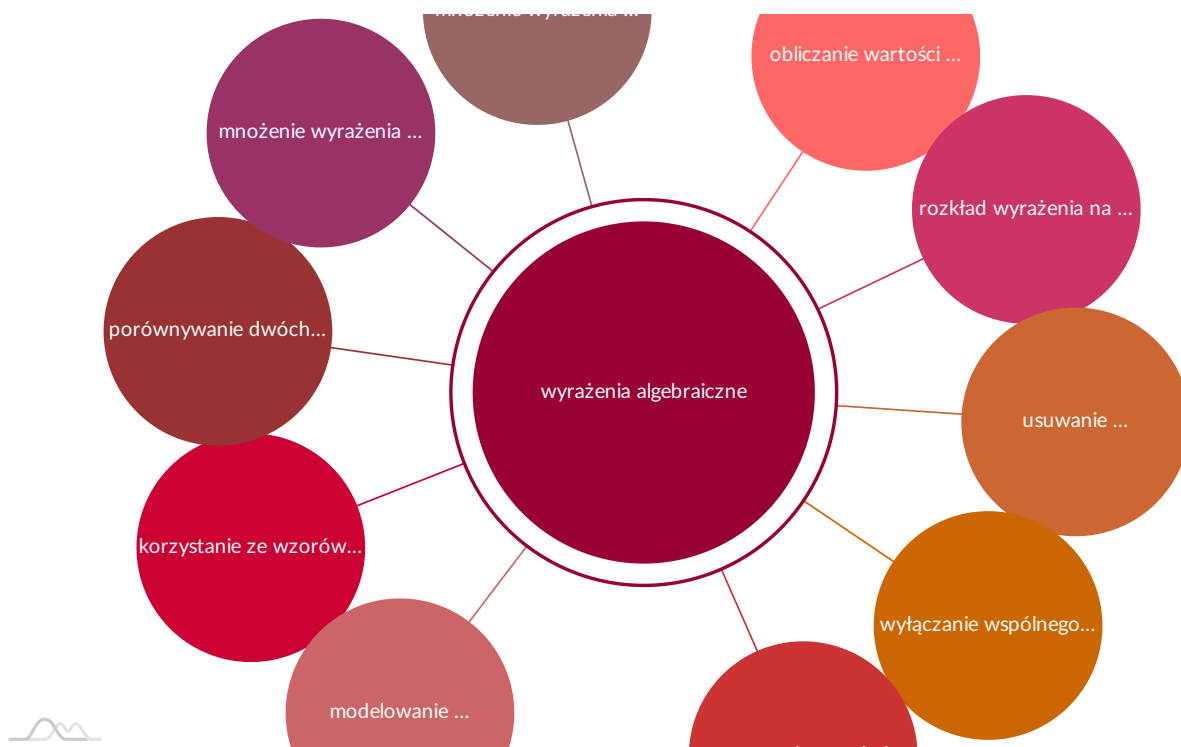
Wyrażenia algebraiczne - zadania

Wyrażenia algebraiczne - zadania

Pokaż ćwiczenia:   

Ta lekcja poświęcona jest zadaniom związanym z wyrażeniami algebraicznymi. Jeżeli chcesz sobie przypomnieć podstawowe wiadomości na temat wyrażeń algebraicznych, zajrzyj do lekcji [Wyrażenia algebraiczne](#).

Czym będziemy zajmować się w tej lekcji? Podpowiedzi znajdziesz w poniższej mapie myśli.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 1

- Zapisz sumę $x^2 + 8x + 16$ w postaci potęgi, wykorzystując wzór skróconego mnożenia.

Sumę

$$x^2 + 8x + 16$$

zapiszemy w postaci kwadratu pierwszego wyrażenia, podwojonego iloczynu obu wyrażeń oraz kwadratu drugiego wyrażenia

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2.$$

Zatem

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x + 4)^2.$$

- Sprawdź, czy wyrażenie $x^2 + 5x + 16$ można zapisać w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń, wykorzystując wzór skróconego mnożenia.

Jeśli wyrażenie

$$x^2 + 5x + 16$$

jest kwadratem sumy dwóch wyrażeń, to oznacza, że pierwszym wyrażeniem jest x , a drugim 4 (kwadraty tych wyrażeń to odpowiednio x^2 i 16). Musimy sprawdzić, czy wyrażenie $5x$ jest podwojonym iloczynem.

$$2 \cdot 4 \cdot x = 8x \neq 5x$$

Z tego wynika, że sumy $x^2 + 5x + 16$ nie można zapisać w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń.

Przykład 2

Podane wyrażenia zapisz, jeśli będzie to możliwe, w postaci iloczynu, wykorzystując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

- $x^2 - 25$

Wyrażenie jest różnicą kwadratów liczb x i 5. Zatem na podstawie wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy:

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5).$$

- $x^2 - 10$

Wyrażenie jest różnicą kwadratów liczb x i $\sqrt{10}$, więc

$$x^2 - 10 = x^2 - (\sqrt{10})^2 = (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10}).$$

- $x^2 + 4$

Wyrażenia nie można zapisać w postaci różnicy liczb rzeczywistych nieujemnych, zatem nie możemy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia.

Przykład 3

Wykaż, że liczba $29 + 12\sqrt{5}$ jest kwadratem liczby $3 + 2\sqrt{5}$.

Aby przeprowadzić dowód, wystarczy wykazać, że

$$(3 + 2\sqrt{5})^2 = 29 + 12\sqrt{5}.$$

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia (na kwadrat sumy) otrzymamy

$$(3 + 2\sqrt{5})^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 = 9 + 12\sqrt{5} + 20 = 29 + 12\sqrt{5}.$$

Z tego wynika, że liczba $29 + 12\sqrt{5}$ jest kwadratem liczby $3 + 2\sqrt{5}$.

Przykład 4

Znajdź liczbę postaci $a + b\sqrt{3}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi, której kwadrat jest równy $19 - 8\sqrt{3}$.

W znalezieniu takiej liczby pomoże wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy. Liczbę $8\sqrt{3}$ możemy zapisać na przykład w postaci

$$8\sqrt{3} = 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}$$

lub

$$8\sqrt{3} = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3},$$

czyli jako podwojony iloczyn liczb odpowiednio 2 i $2\sqrt{3}$ lub 4 i $\sqrt{3}$. Sprawdźmy, w którym przypadku suma kwadratów tych liczb jest równa 19.

- Jeśli przyjmiemy, że $8\sqrt{3} = 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}$, to $2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 \neq 19$.
- Jeśli przyjmiemy, że $8\sqrt{3} = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}$, to $4^2 + (\sqrt{3})^2 = 16 + 3 = 19$.

Z tego wynika, że liczbę $19 - 8\sqrt{3}$ możemy zapisać jako $(4 - \sqrt{3})^2$ lub jako $(\sqrt{3} - 4)^2$.

Zatem istnieją dwie liczby, których kwadrat jest równy $19 - 8\sqrt{3}$. Jest to liczba $4 - \sqrt{3}$ i liczba do niej przeciwna $\sqrt{3} - 4$.

Przykład 5

Wykaż, że liczba $\frac{2}{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Wykażemy, że podana liczba jest całkowita, usuwając niewymierność z mianownika ułamka. W tym celu pomnożymy licznik i mianownik ułamka przez takie wyrażenie, aby w mianowniku otrzymać różnicę kwadratów. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2} &= \frac{2}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2} + \sqrt{2} = \\ &= \frac{2(2-\sqrt{2})}{2} + \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2. \end{aligned}$$

Liczba 2 jest całkowita, zatem liczba $\frac{2}{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Ćwiczenie 1



Oblicz bez użycia kalkulatora. Wpisz rozwiązanie w puste pole.

$$209^2 = \boxed{}$$

$$297^2 = \boxed{}$$

$$203 \cdot 197 = \boxed{}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Zaznacz wszystkie równości, które są prawdziwe dla wszystkich liczb rzeczywistych x i a .

☐ $2(x-4)(x+4) + 32 = 2x^2$

☐ $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

☐ $(x + 3\sqrt{2})^2 = x^2 + 6x\sqrt{2} + 18$

☐ $(a+5)^2 = a^2 + 10a + 25$

☐ $(x-3)^2 = x^2 - 9$

☐ $(2x-4)^2 = 4x^2 - 8x + 16$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Oblicz, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Uzupełnij poniższe luki. Kliknij w nie, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz poprawną odpowiedź.

• $(\sqrt{2} + 3)^2 =$

• $(3 - \sqrt{5})^2 =$

• $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 =$

• $(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3})^2 =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Ile jest równa liczba $\sqrt{2}(5\sqrt{2} - 6) + 3(4 - 2\sqrt{2}) - 22$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $-12\sqrt{2}$

☐ $-6\sqrt{2}$

☐ 0

☐ $6\sqrt{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Ile jest równa wartość wyrażenia $a(3a - 1) + 2a(a - 3)$ dla $a = -1$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 0

☐ 2

☐ -2

☐ 12

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Ile jest równe wyrażenie $(3x^2 - 4)(2x^2 + 6)$ dla dowolnej liczby x ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $6x^4 - 10x^2 - 24$

☐ $6x^4 + 10x^2 - 24$

☐ $6x^4 + 10x^2 + 24$

☐ $6x^4 - 10x^2 + 24$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Ile jest równe wyrażenie $-3a^2 + 3ab + 6b^2$ dla dowolnych liczb a i b ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $-3(a - 2b)(a + b)$

☐ $3(a + 2b)(a - b)$

☐ $3(a - 2b)(a + b)$

☐ $-3(a + 2b)(a - b)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Jeżeli $a = 6x - 4$ i $b = \frac{1}{2}$, to:

☐ $\frac{1}{2}a^2b = 18x^2 + 8$

☐ $\frac{1}{2}a^2b = 9x^2 - 12x + 4$

☐ $\frac{1}{2}a^2b = 36x^2 - 48x + 16$

☐ $\frac{1}{2}a^2b = 18x^2 - 24x + 8$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Ile jest równe wyrażenie $(a - c)(b - a) - (a - b)c$ dla dowolnych liczb a , b i c ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $-a^2$

☐ $bc - a^2$

☐ $ab - a^2$

☐ $ac - a^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Dla pewnej liczby dodatniej a podstawa trójkąta jest równa $4a + 6$. Wysokość opuszczona na tę podstawę jest od niej o $2a - 2$ krótsza. Ile wynosi pole tego trójkąta? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $4a^2 + 10a + 6$

☐ $8a^2 + 44a + 48$

☐ $8a^2 + 20a + 12$

☐ $4a^2 + 22a + 24$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Jaką postać przyjmuje wyrażenie $1 - 5x^2$ po rozłożeniu na czynniki? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $(1 - 5x)(1 + 5x)$

☐ $(1 - \sqrt{5}x)(1 - \sqrt{5}x)$

☐ $(1 - \sqrt{5}x)(1 + \sqrt{5}x)$

☐ $(1 - \sqrt{5}x)(1 + 5x)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Ile wynosi wartość wyrażenia $(3x - 2)(3x + 2)(9x^2 + 4)$ dla $x = \sqrt{2}$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 309

☐ 305

☐ 307

☐ 308

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Ile jest równa liczba $\frac{5}{3-2\sqrt{2}}$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $-2\sqrt{2} - 3$

☐ $15 + 10\sqrt{2}$

☐ $2\sqrt{2} + 3$

☐ $10\sqrt{2} + 15$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Oblicz podane wyrażenia w pamięci i wpisz właściwe odpowiedzi w puste pola.

• $7 \cdot 89 =$

• $6 \cdot 203 =$

• $8 \cdot 397 =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Oblicz podane wyrażenia i wpisz właściwe odpowiedzi w puste pola.

• $2013^{10} - 2011 \cdot 2013^9 - 2 \cdot 2013^9 =$

• $4004^{-25} \cdot (4004^{26} - 4004^{25}) =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Wykonaj mnożenie, zredukuj wyrazy podobne, a następnie uzupełnij poniższe luki. Kliknij w nie, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz poprawną odpowiedź.

- $(1 - 9x)(2 + 6x) =$
- $(2x + 3)(4 - x^2) =$
- $(x + y + z)(xy + y^3 + x^2z) =$
- $\frac{1}{3}(5y - 9)(3y + 4) =$
- $(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3})(\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}) =$
- $(3x^2 + 2x - 1)(2x - 4) =$
- $(4y^3 - 2y + 5)(y^2 + y - 2) =$
- $(5x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{6}) =$
- $\sqrt{3}(a - \sqrt{3})(3a - 4\sqrt{3}) =$
- $(\sqrt{3}x + \sqrt{2})(2\sqrt{3}x - \sqrt{2}) =$

$x^2z^2 + y^3z + x^2yz + xyz + x^3z + y^4 + xy^3 + xy^2 + x^2y$

$-52x^4 - 12x + 2$

$-4x^3 - 6x^2 + 6x + 12$

$x^4z^4 + y^3z + x^2yz + xyz + x^3z + y^2 + xy^3 + xy^4 + x^2y$

$\frac{2}{6}x^2 - \frac{2}{6}x - \frac{4}{6}$

$5y^2 - \frac{7y}{3} - 12$

$8y^3 + 4y^4 - 12y^3 + 6y^4 + 9y - 10$

$3\sqrt{3}a^2 - 21a + 12\sqrt{3}$

$7y^2 - \frac{5y}{4} - 10$

$3x^2 - 4x^2 - 10x + 3$

$5\sqrt{2}x^2 + 4x\sqrt{6}x - 3\sqrt{2}$

$6x^4 + x\sqrt{12} - 2$

$7\sqrt{2}x^2 + 8x\sqrt{3}x - 5\sqrt{2}$

$6x^3 - 8x^2 - 10x + 4$

$4y^5 + 4y^4 - 10y^3 + 3y^2 + 9y - 10$

$-54x^2 - 12x + 2$

$-2x^3 - 3x^2 + 8x + 12$

$6x^2 + x\sqrt{6} - 2$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{9}x - \frac{4}{9}$

$5\sqrt{3}a^2 - 25a + 14\sqrt{3}$

Ćwiczenie 17



Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a. $4ab^3 - 2a^2b + 6ab$

b. $2x^3y + 18x^2y^2 + 9xy^3$

c. $4x(x - 3) + 2x^2(x - 3) - 6x^3(x - 3)$

d. $3a(a + 5)(a - 1) + 9a(a - 1)(a + 3) - 6a(a - 1)(a + 2)$

e. $2(x - 1)^2(x + 3) + 4(x - 1)(x + 3)^2 + 6(x - 1)(x + 3)$

f. $x^2y^2 + x^3y + 3xy$

g. $xz^2 + xyz + x^2z + 3z + x^2y + 3x$

Ćwiczenie 18



Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość liczbową dla podanej wartości x .

a. $(2x - 3)(3x - 1) - 3$ dla $x = 2\sqrt{3}$

b. $4x(x - 3) + 2x(1 - 2x) + 3$ dla $x = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$

c. $3x^2(2x + 1) + x(4 - 3x)$ dla $x = \sqrt[3]{5}$

d. $(4x - 1)(2 - 3x) - (x - 1)(x - 2)$ dla $x = -3\sqrt{5}$

e. $(2x - 3)^2 + 2(x^2 - 4)(x^2 + 4) - 3(10 - 4x)$ dla $x = 3\sqrt{10}$

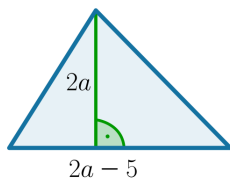
f. $6(x - 1)(x + 1) + 4(x - 3)(x + 3) + 2(x - 5)(x + 5)$ dla $x = 1 + 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 19

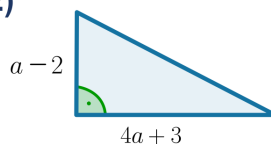


Zapoznaj się z poniższymi rysunkami figur.

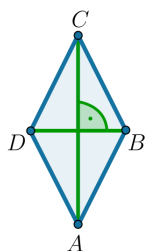
1)



2)



3)

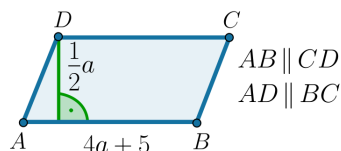


Romb, w którym
długości przekątnych
są równe:

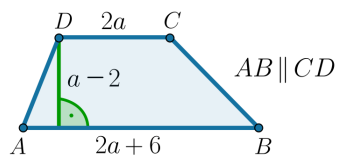
$$|AC| = 4a + 1$$

$$|BD| = a - 2$$

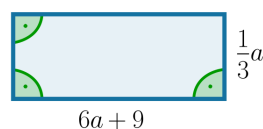
4)



5)



6)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Poniżej znajdują się numery figur oraz wzory na ich pola. Połącz w pary pole figury z odpowiadającym jej numerem.

$$P = 2a^2 - 3\frac{1}{2}a - 1$$

Figura 1

$$P = 2a^2 - 5a$$

Figura 2

$$P = 2a^2 - a - 6$$

Figura 4

$$P = 2a^2 + \frac{5}{2}a$$

Figura 6

$$P = 2a^2 + 3a$$

Figura 5

$$P = 2a^2 - \frac{5}{2}a - 3$$

Figura 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



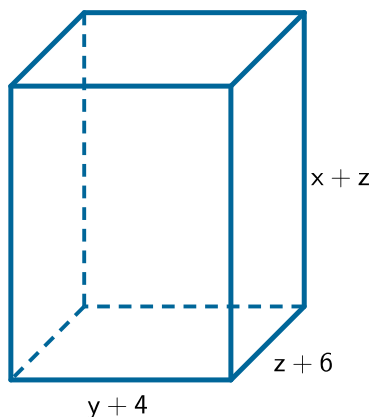
Boki prostokąta są równe $a + 5$ i $2a + 5$, gdzie a jest liczbą dodatnią. O ile zmieni się pole prostokąta, jeśli długość pierwszego boku zwiększymy o 3, a długość drugiego zmniejszymy o 4? Podaj odpowiednie założenia.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Zapisz wyrażenie opisujące pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu przedstawionego na rysunku. Krawędzie prostopadłościanu są równe $y + 4$, $z + 6$, $x + z$, gdzie x, y, z to liczby dodatnie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Wykaż, że równość $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+4} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} - 1$ jest prawdziwa.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23



Wykorzystując znajomość wzorów skróconego mnożenia, połącz w pary wyrażenia sobie równe.

$$x^2 + 2x + 1$$

$$(2x - 1)(2x + 1)$$

$$4x^2 - 1$$

$$(x - 1)^2$$

$$x^2 - 1$$

$$(2x - 1)^2$$

$$4x^2 + 4x + 1$$

$$(x - 1)(x + 1)$$

$$4x^2 - 4x + 1$$

$$(2x + 1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$(x + 1)^2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 24



Poniżej przedstawiono pewne wyrażenia. Połącz w pary wyrażenia z ich słownym opisem.

suma odwrotności dwóch wyrażeń

$$\frac{1}{p+q}$$

potrojony kwadrat sumy dwóch wyrażeń

$$3(p+q)^2$$

kwadrat sumy dwóch wyrażeń

$$(p+q)^2$$

potrojony iloczyn dwóch wyrażeń

$$3pq$$

odwrotność kwadratu różnicy dwóch wyrażeń

$$p^2 + q^2$$

suma kwadratów dwóch wyrażeń

$$\frac{1}{p^2 - q^2}$$

odwrotność różnicy kwadratów dwóch wyrażeń

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

odwrotność sumy dwóch wyrażeń

$$\frac{1}{(p-q)^2}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 25



Poniżej przedstawiono pewne wyrażenia. Połącz w pary te, które są sobie równe.

$$4 - 2\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3} + 1)^2$$

$$7 + 4\sqrt{3}$$

$$(2 + \sqrt{3})^2$$

$$9 + 4\sqrt{2}$$

$$(2 - \sqrt{3})^2$$

$$9 - 4\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{3} - 1)^2$$

$$4 + 2\sqrt{3}$$

$$(2\sqrt{2} + 1)^2$$

$$7 - 4\sqrt{3}$$

$$(2\sqrt{2} - 1)^2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 26



Oblicz. Uzupełnij luki, wpisując odpowiednie wartości.

$$\bullet \quad (2 + \sqrt{7})^2 = \boxed{} + \boxed{}\sqrt{7}$$

$$\bullet \quad (1 + \sqrt{11})^2 = \boxed{} + \boxed{}\sqrt{11}$$

$$\bullet \quad (6 + \sqrt{13})^2 = \boxed{} + \boxed{}\sqrt{13}$$

$$\bullet \quad (4 + \sqrt{6})^2 = \boxed{} + \boxed{}\sqrt{6}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 27



Oblicz. Uzupełnij luki, wpisując odpowiednie wartości.

$$\bullet \left(3 - \sqrt{11}\right)^2 = \boxed{} - \boxed{}\sqrt{11}$$

$$\bullet \left(12 - \sqrt{3}\right)^2 = \boxed{} - \boxed{}\sqrt{3}$$

$$\bullet \left(3 - \sqrt{8}\right)^2 = \boxed{} - \boxed{}\sqrt{8}$$

$$\bullet \left(1 - \sqrt{11}\right)^2 = \boxed{} - \boxed{}\sqrt{11}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 28



Oblicz. Uzupełnij luki, wpisując odpowiednie wartości.

$$\bullet \left(3 - \sqrt{11}\right)\left(3 + \sqrt{11}\right) = \boxed{}$$

$$\bullet \left(12 - \sqrt{3}\right)\left(12 + \sqrt{3}\right) = \boxed{}$$

$$\bullet \left(13 - \sqrt{13}\right)\left(13 + \sqrt{13}\right) = \boxed{}$$

$$\bullet \left(1 - \sqrt{15}\right)\left(1 + \sqrt{15}\right) = \boxed{}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.