Rozkład liczby na czynniki pierwsze

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Źródło: Andrew Buchanan, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Można śmiało zaryzykować twierdzenie, że wśród liczb naturalnych najciekawsze i najważniejsze są liczby pierwsze. Badał je już Euklides na przełomie IV i III wieku przed naszą erą. To od niego pochodzi dowód na to, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, przez wielu uznawany za „dowód z Księgi”. Określenie to pochodzi od **Paula Erdősa** – jednego z najwybitniejszych matematyków XX wieku. Mawiał on, że wszystkie najelegantsze dowody Bóg trzyma spisane w Księdze i tylko czasami pozwala do niej zajrzeć jakiemuś człowiekowi.

Paul Erdős (1992)

Źródło: Kmhkmh, dostępny w internecie: https:\\wikimedia.commons.org, licencja: CC BY 3.0.

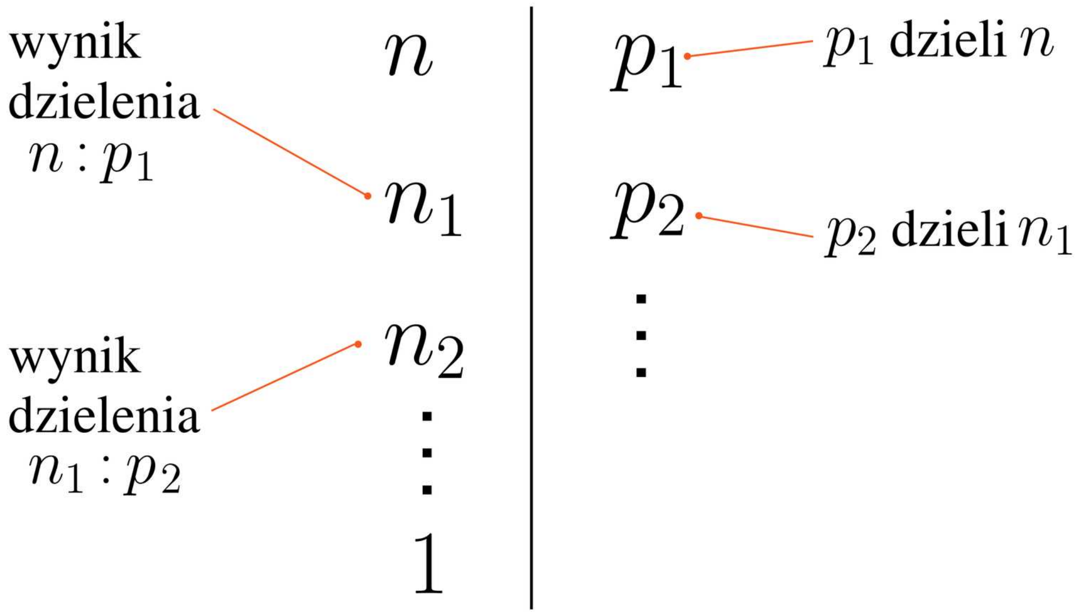
Z liczb pierwszych możemy budować inne liczby wykorzystując do tego mnożenie. W tej lekcji przypomnimy algorytm rozkładania liczby na czynniki pierwsze.

> **Twoje cele**
>
> - Zastosujesz algorytm rozkładania liczby na czynniki pierwsze.
> - Wykorzystasz rozkład liczby na czynniki pierwsze do wyznaczania liczby dzielników danej liczby.

Przeczytaj

Przypomnijmy algorytm rozkładania liczby naturalnej na czynniki pierwsze:

1. Po prawej stronie rozważanej liczby naturalnej n stawiamy pionową kreskę.
2. Szukamy jakiejkolwiek liczby pierwszej p_1, która dzieli daną liczbę – zapisujemy ją po prawej stronie kreski na wysokości liczby n.
3. Dzielimy liczbę n przez liczbę p_1 – wynik n_1 tego dzielenia zapisujemy po lewej stronie kreski pod liczbą n.
4. Czynności 2) i 3) powtarzamy dla liczby n_1 – liczbę pierwszą p_2 dzielącą liczbę n_1 zapisujemy pod liczbą p_1. Wynik n_2 tego dzielenia zapisujemy pod liczbą n_1.
5. Algorytm kontynuujemy, aż po lewej stronie kreski pojawi się liczba 1.



Wobec powyższego $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Przykład 1

Przedstawmy liczbę 360 w postaci iloczynu czynników pierwszych.

Zauważmy przy okazji, że kolejność znajdowania czynników pierwszych nie ma znaczenia – efekt jest taki sam, chociaż przyjęło się, że zaczynamy dzielenie od najmniejszych liczb pierwszych.

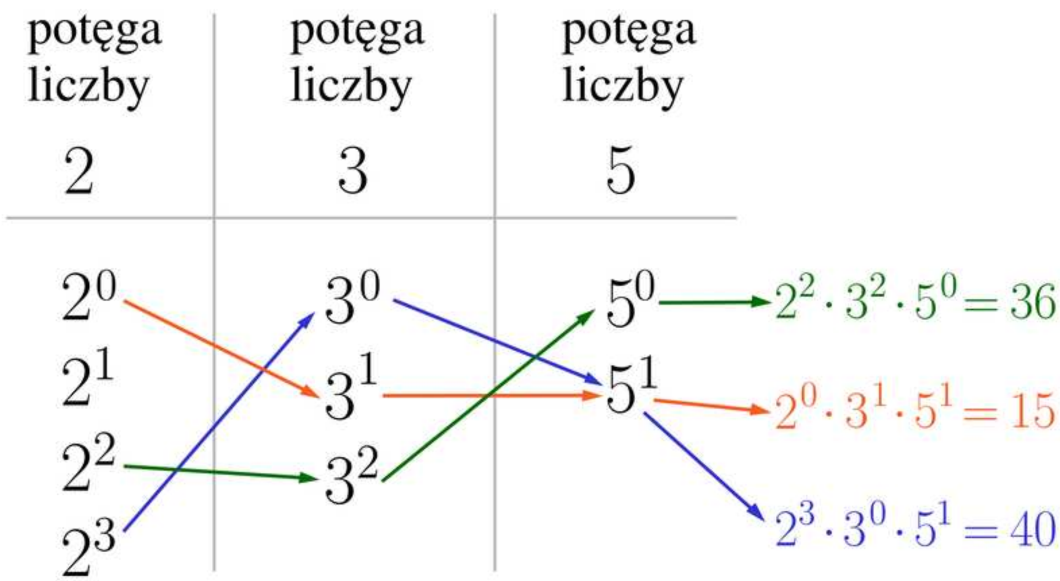
$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 3 \\ 30 & 3 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 360 & 3 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 3 \\ 10 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Zatem możemy zapisać $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Zauważmy, że każdy dzielnik liczby 360 jest pewną kombinacją jego dzielników pierwszych.

Na przykład liczba 360 dzieli się przez 8 (bo $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$), ale nie przez 16 (bo $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$), 360 dzieli się przez 45 (bo $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$), ale nie przez 135 (bo $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$). Liczba 360 nie dzieli się też przez 13, ani przez 26 (bo $26 = 2 \cdot 13$).

Zatem każdy dzielnik d liczby 360 jest postaci $d = 2^{w_1} \cdot 3^{w_2} \cdot 5^{w_3}$, przy czym $w_1 \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $w_2 \in \{0,\ 1,\ 2\}$, $w_3 \in \{0,\ 1\}$.



Ponieważ tworząc dzielnik d liczby 360 możemy użyć dowolnej spośród potęg liczby 2 o wykładniku 0, 1, 2, 3 (co daje 4 możliwości), dowolnej spośród potęg liczby 3 o wykładniku 0, 1, 2 (co daje 3 możliwości) oraz dowolnej spośród potęg liczby 5 o wykładniku 0, 1 (co daje 2 możliwości), to wszystkich dzielników liczby 360 jest $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Zauważmy jeszcze, że $1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0$.

Ogólnie jeśli liczba naturalna x przedstawia się jako iloczyn liczb pierwszych w następujący sposób

$$p_1{}^{k_1} \cdot p_2{}^{k_2} \cdot p_3{}^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_n{}^{k_n}$$

to każdy jej dzielnik d jest postaci:

$$p_1{}^{w_1} \cdot p_2{}^{w_2} \cdot p_3{}^{w_3} \cdot \ldots \cdot p_n{}^{w_n}$$

gdzie:
$w_1 \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k_1\}, w_2 \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k_2\}, w_3 \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k_3\}, \ldots,$
$w_n \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k_n\}$.

Wszystkich dzielników liczby

$$p_1{}^{k_1} \cdot p_2{}^{k_2} \cdot p_3{}^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_n{}^{k_n}$$

jest

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot (k_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_n + 1)$$

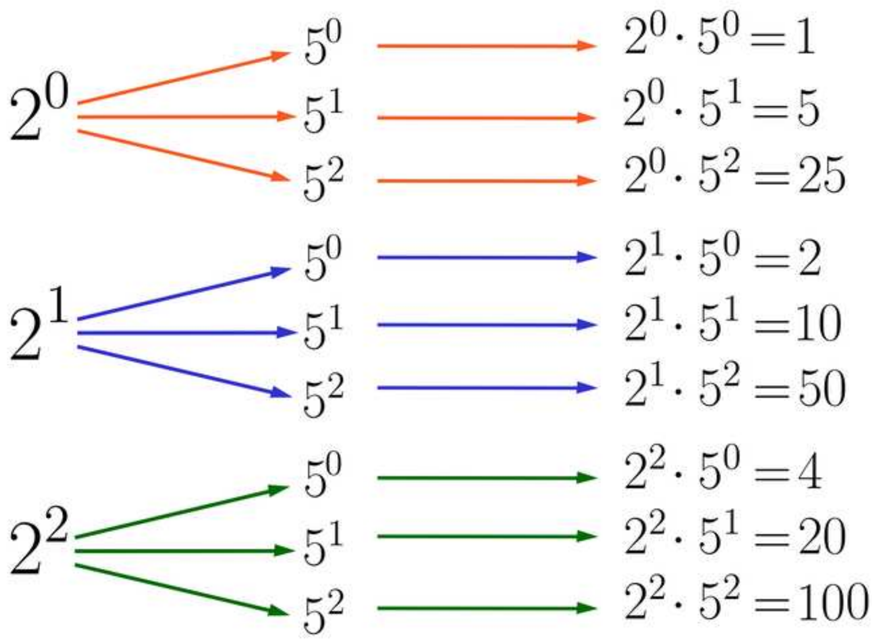
Przykład 2

Wyznaczymy liczbę wszystkich dzielników liczb

a) 100

b) 600

a) Każdy dzielnik liczby $100 = 2^2 \cdot 5^2$ ma swoim rozkładzie na czynniki pierwsze tylko i wyłącznie zerową, pierwszą lub drugą potęgę liczby 2 oraz zerową, pierwszą lub drugą potęgę liczby 5. Czyli dzielnik liczby 100 może zawierać jedynie jedną z trzech potęg liczby 2 (1, 2 lub 4) oraz jedną z trzech potęg liczby 5 (1, 5 lub 25). Zatem wszystkich dzielników liczby 100 jest $3 \cdot 3 = 9$. Wypiszmy je wszystkie:



b) Dzielniki d liczby $600 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 3$ są postaci

> $d = 2^{w_1} \cdot 5^{w_2} \cdot 3^{w_3}$
>
> gdzie:
> $w_1 \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}, w_2 \in \{0,\ 1,\ 2\}, w_3 \in \{0,\ 1\}$.
>
> Zatem tworząc dzielnik liczby 600 możemy użyć jednej z czterech potęg liczby 2, jednej z trzech potęg liczby 5 oraz jednej z dwóch potęg liczby 3, co daje $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ dzielniki.

Podsumujmy dotychczasowe rozważania w postaci twierdzenia.

> **Twierdzenie: Zasadnicze twierdzenie arytmetyki**
>
> Każda liczba naturalna większa od 1 albo jest liczbą pierwszą, albo można ją jednoznacznie przedstawić w postaci **iloczynu liczb pierwszych**.

Jednoznaczność oznacza, że jeśli dana liczba jest przedstawiona jako iloczyn pewnych liczb pierwszych na dwa sposoby, to oba te iloczyny zawierają te same czynniki, a różnią się jedynie ich kolejnością.

Przedstawienie liczby w postaci iloczynu nazywamy rozkładem na czynniki lub faktoryzacją. Często pod pojęciem faktoryzacji rozumiemy rozkład na czynniki nierozkładalne, czyli w przypadku liczb – na czynniki będące liczbami pierwszymi, czasami jednak nazywamy tak dowolne przedstawienie danego obiektu matematycznego w postaci iloczynu. Znaczenie rozpoznajemy na podstawie kontekstu.

Słownik

> **rozkład na czynniki pierwsze**
>
> przedstawienie liczby naturalnej w postaci iloczynu liczb pierwszych; zapis zwykle zawiera naturalne potęgi liczb pierwszych

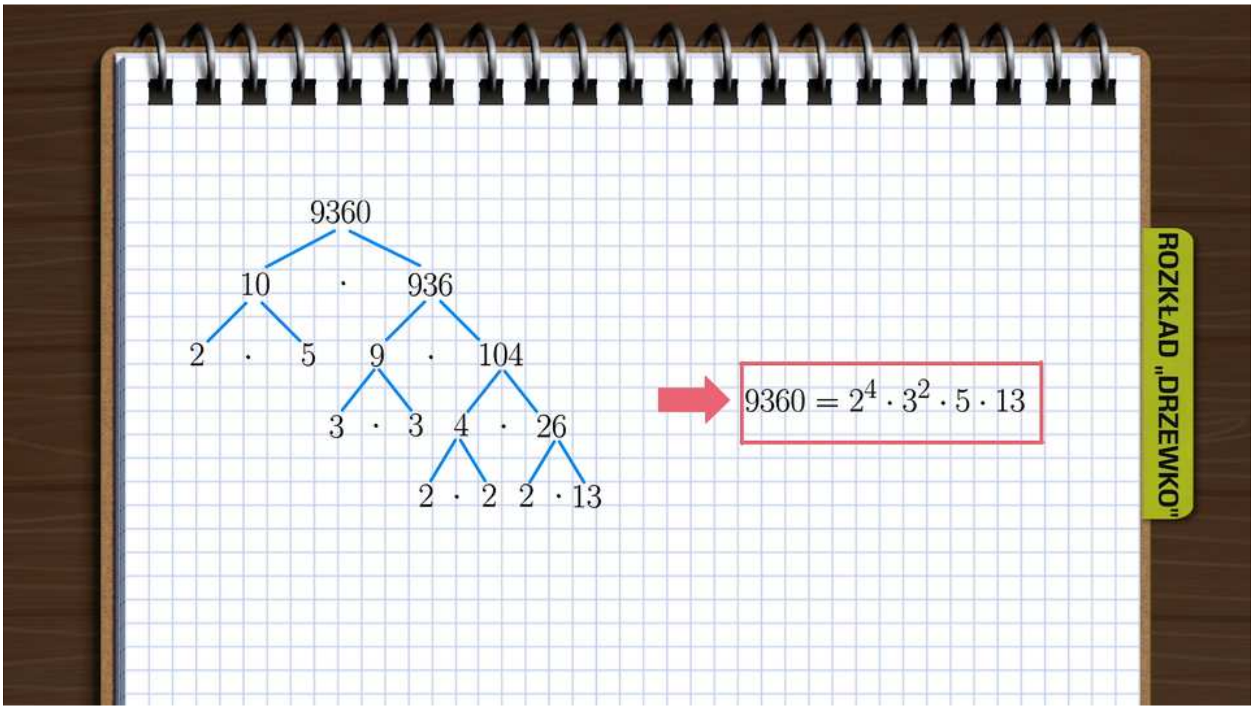
> **faktoryzacja**

1) czynność prowadząca do przedstawienia liczby lub wyrażenia algebraicznego w postaci nietrywialnych (w przypadku liczb – różnych od 1) czynników;
2) przedstawienie liczby lub wyrażenia w postaci iloczynu nietrywialnych (w przypadku liczb – różnych od 1) czynników

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj zaprezentowane w animacji sposoby rozkładania liczb naturalnych na czynniki pierwsze.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1VdznIVxNWRW

Nagranie dotyczące rozkładu liczb na czynniki.

Polecenie 2

Każdą z liczb 3480 i 4950 rozłóż na czynniki pierwsze korzystając z obu przedstawionych metod.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Rozłóż podane liczby na czynniki pierwsze:

a) 936

b) 528

c) 1575

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Znana jest cecha podzielności przez 7.

Liczba n dzieli się przez 7, dokładnie wtedy, gdy przez 7 dzieli się suma iloczynów kolejnych cyfr liczby n (licząc od rzędu jedności) przez kolejne naturalne potęgi liczby 3 (licząc od potęgi zerowej).

Sprawdzimy, czy liczba 52647 dzieli się przez 7. Rozważmy sumę iloczynów kolejnych cyfr tej liczby przez kolejne naturalne potęgi liczby 3:

$$7 \cdot 3^0 + 4 \cdot 3^1 + 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 = 7 + 12 + 54 + 54 + 405 = 532$$

Aby stwierdzić, czy liczba 532 dzieli się przez 7, możemy ponownie zastosować cechę podzielności:

$$2 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 = 2 + 9 + 45 = 56$$

Ponieważ 56 dzieli się przez 7, więc 532 dzieli się przez 7, a z tego wynika, że liczba 52647 również dzieli się przez 7.

Stosując cechę podzielności przez 7 zbadaj, czy liczba 7 występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze następujących liczb.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż: a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych, b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Zastosujesz algorytm rozkładania liczby na czynniki pierwsze.
- Wykorzystasz rozkład liczby na czynniki pierwsze do wyznaczania liczby dzielników danej liczby.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- wykład;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 z sekcji „Animacja” - „Przeanalizuj zaprezentowane w animacji sposoby rozkładania liczb naturalnych na czynniki pierwsze”. Uczniowie zapoznają się z treścią zawartą w materiale, w razie wątpliwości zadają pytania nauczycielowi na forum klasy.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązania ćwiczeń w temacie: „Rozkład liczby na czynniki pierwsze”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają

je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

Rozkładanie liczb na czynniki pierwsze

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Rozkład liczby na czynniki pierwsze”.