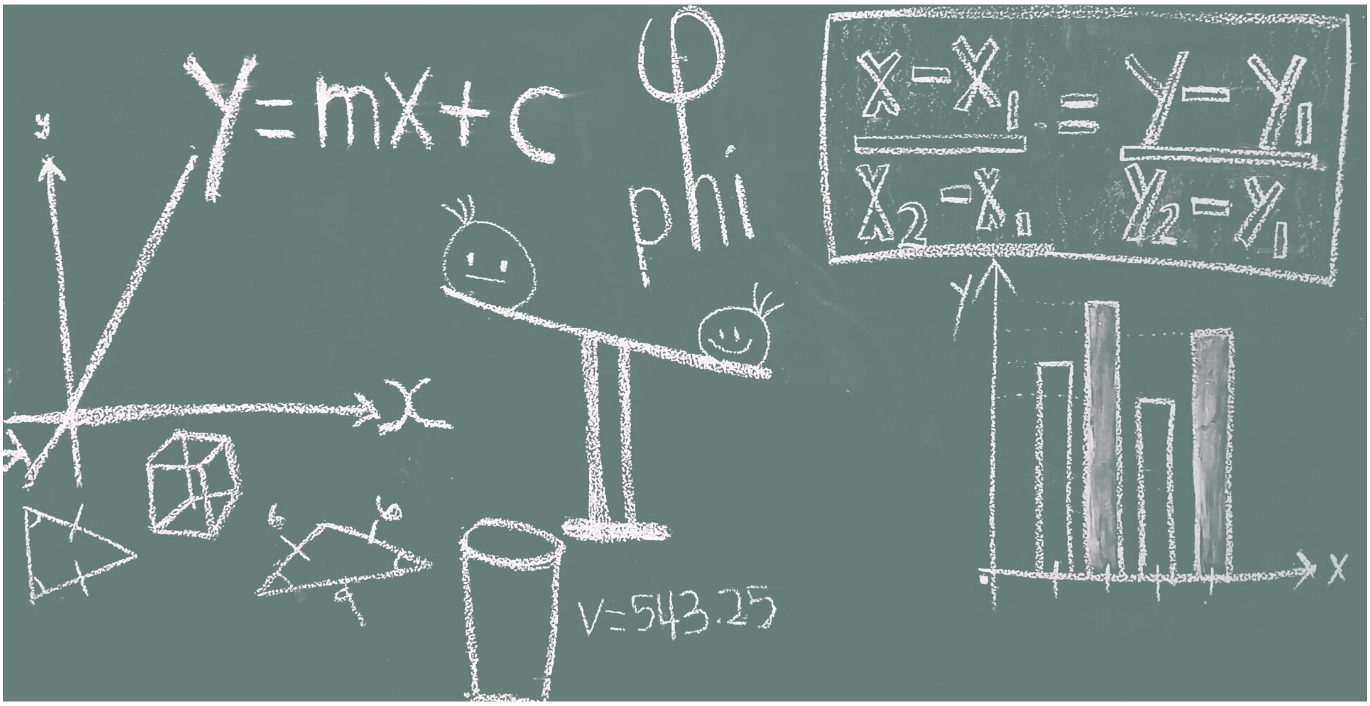

Działania na wielomianach - powtórzenie wiadomości

Działania na wielomianach - powtórzenie wiadomości

Źródło: CJ Dayrit, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wielomian przypomina funkcję zmiennej x, ale w odróżnieniu od niej oznaczony jest najczęściej dużą literą W, zamiast małą literą f. Możemy narysować wykres wielomianu, określić dziedzinę, zbiór wartości lub znaleźć pierwiastki. Wielomiany przypominają wyrażenia algebraiczne dowolnego stopnia. Te informacje wskazują, że możemy rozważać ich sumy, różnice, iloczyny i ilorazy. Trzy pierwsze działania, a więc dodawanie, odejmowanie i mnożenie, wykonuje się w stosunkowo łatwy sposób, jednak dzielenie jest już nieco trudniejsze, za to można wykonać je na dwa sposoby, które poznasz w dalszej części materiału.

Twoje cele

- Rozpoznasz wielomian, określisz stopień wielomianu.
- Wyznaczysz sumę, różnicę, iloczyn lub iloraz dwóch wielomianów.
- Określisz stopień wielomianu powstałego po wykonaniu odpowiedniego działania.

Przeczytaj

W poniższym materiale przypomnimy pojęcia dotyczące wielomianów oraz działania, które możemy na nich wykonać.

Wielomianem zmiennej x nazywamy jednomian zmiennej x lub sumę takich jednomianów. Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy **wyrazami** wielomianu.

> **Definicja: Postać ogólna wielomianu**
>
> Wielomiany mają postać ogólną: $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, gdzie: $a_n, \ldots, a_0$ nazywamy współczynnikami wielomianu, a a_0 wyrazem wolnym.

Każdy wielomian jest sumą pewnych jednomianów (lub jednomianem). Zatem suma dwóch wielomianów również będzie wielomianem.

Działania na wielomianach

Przypomnijmy – na wielomianach możemy wykonać cztery działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Zacznijmy od pierwszego z nich.

> **Definicja: Suma wielomianów**
>
> Dane są wielomiany $F(x)$ i $G(x)$.
>
> - **Sumą wielomianów** $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy taki wielomian $W(x)$, że dla każdej liczby rzeczywistej a spełniony jest warunek
>
> $$W(a) = F(a) + G(a).$$

W pierwszym przykładzie dodamy dwa wielomiany.

> **Przykład 1**
>
> Wyznaczymy sumę wielomianów $F(x) = 6x^4 + 5x^2 - 2x - 8$ oraz $G(x) = 7x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 5x$ i przedstawimy wynik w postaci uporządkowanej sumy algebraicznej.
>
> **Rozwiązanie**
>
> Gdy dodajemy dwa wielomiany, redukujemy wyrazy podobne, czyli dodajemy współczynniki stojące przed zmienną x w tej samej potędze. Rozważaną sumę zapisujemy:
>
> $$W(x) = F(x) + G(x) = 6x^4 + 5x^2 - 2x - 8 + 7x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 5x =$$
> $$= 7x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x - 8.$$

Szukany wielomian jest postaci $W(x)=7x^5+2x^4+2x^3+5x^2-7x-8$.

Kolejnym działaniem na wielomianach jest odejmowanie.

Definicja: Różnica wielomianów

- **Różnicą wielomianów** $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy taki wielomian $W(x)$, że dla każdej liczby rzeczywistej a spełniony jest warunek

$$W(a)=F(a)-G(a).$$

Przykład 2

Wyznaczamy różnicę wielomianów $F(x)=10x^4-x^3+6x^2-1$ oraz $G(x)=6x^5-17x^4+12x^2-4$ i przedstawiamy wynik w postaci uporządkowanej sumy algebraicznej.

Rozwiązanie

Gdy odejmujemy dwa wielomiany, redukujemy wyrazy podobne, czyli odejmujemy współczynniki stojące przed zmienną x w tej samej potędze. Rozważaną różnicę zapisujemy:

$$W(x)=F(x)-G(x)=10x^4-x^3+6x^2-1-\left(6x^5-17x^4+12x^2-4\right)=$$
$$=10x^4-x^3+6x^2-1-6x^5+17x^4-12x^2+4=-6x^5+27x^4-x^3-6x^2+3.$$

Szukany wielomian jest postaci $W(x)=-6x^5+27x^4-x^3-6x^2+3$.

Ważne!

Pamiętaj o zmianie znaków współczynników drugiego wielomianu podczas odejmowania!

Ważnym pojęciem związanym z wielomianem jest ich stopień, czyli najwyższy ze stopni składników wielomianu o niezerowych współczynnikach.

Wprowadzimy teraz oznaczenie $\mathrm{deg(W(x))}$ dla stopnia wielomianu (od angielskiego *degree*, czyli stopień) oraz oznaczenie $\max(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, gdzie $a_1,a_2,\ldots,a_n$ to dowolne liczby rzeczywiste.

Zauważ, że wielomian utworzony z sumy lub różnicy dwóch wielomianów może być innego stopnia niż dwa tworzące go wielomiany. Tę zależność opisuje poniższe twierdzenie.

Własność: Stopień sumy oraz różnicy wielomianów

- $\deg(W(x)+P(x))\leqslant\max(\deg(W(x)),\deg(P(x)))$ lub $W(x)+P(x)$ jest wielomianem zerowym.
- $\deg(W(x)-P(x))\leqslant\max(\deg(W(x)),\deg(P(x)))$ lub $W(x)-P(x)$ jest wielomianem zerowym.

Zauważmy, że w przykładzie 1 i 2 stopnie wielomianów powstałych odpowiednio poprzez dodanie lub odjęcie dwóch różnych wielomianów stopnia 4 i 5 są również stopnia 5, a więc ich stopnie spełniają powyższe nierówności.

Przejdziemy teraz do iloczynu dwóch wielomianów.

Definicja: Iloczyn wielomianów

Dane są wielomiany $F(x)$ i $G(x)$. Iloczynem wielomianów $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy taki wielomian $W(x)$, że dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek:

$$W(a) = F(a) \cdot G(a).$$

Iloczynem dowolnego wielomianu $F(x)$ przez wielomian zerowy jest wielomian zerowy.

Przykład 3

Pomnóż wielomiany $F(x) = 3x^4 - 2x^3 + x$ oraz $G(x) = x^3 - 2x^4 + 1$ i przedstaw wynik w postaci uporządkowanej sumy algebraicznej.

Rozwiązanie

Wyznaczymy iloczyn podanych wielomianów, mnożąc każdy współczynnik pierwszego wielomianu przez każdy współczynnik drugiego wielomianu. Rozważany iloczyn zapisujemy:

$$\begin{aligned}&W(x) = F(x) \cdot G(x) = \left(3x^4 - 2x^3 + x\ \right) \cdot \left(x^3 - 2x^4 + 1\right) = \\ &= 3x^7 - 6x^8 + 3x^4 - 2x^6 + 4x^7 - 2x^3 + x^4 - 2x^5 + x = \\ &= -6x^8 + 7x^7 - 2x^6 - 2x^5 - 2x^3 + 4x^4 + x.\end{aligned}$$

Zatem szukany wielomian jest postaci
$W(x) = -6x^8 + 7x^7 - 2x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x$.

Stopień wielomianu i jego zależność między stopniami tworzących go wielomianów możemy rozważać dla sumy i różnicy, ale również dla iloczynu.

Własność: Stopień iloczynu wielomianów

- Jeżeli $F(x)$ i $G(x)$ nie są wielomianami zerowymi, to $\deg(F(x) \cdot G(x)) = \deg(F(x)) + \deg(G(x))$.
- Jeżeli $F(x)$ lub $G(x)$ jest wielomianem zerowym, to $F(x) \cdot G(x)$ jest wielomianem zerowym.

Na podstawie przykładu 3. widać, że wielomian $W(x)$ powstał przez pomnożenie wielomianu $F(x)$ stopnia 4 oraz wielomianu $G(x)$ stopnia 3, zatem jego stopień jest równy 7.

Ostatnim działaniem na wielomianach jest dzielenie dwóch wielomianów.

Twierdzenie: Podzielność wielomianów

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez niezerowy wielomian $F(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $G(x)$ taki, że $W(x) = F(x) \cdot G(x)$.

W kolejnym przykładzie pokażemy, jak wyznaczyć taki iloraz. Opisany sposób będzie przypominał dzielenie dwóch liczb sposobem pisemnym.

Przykład 4

Wykonamy dzielenie wielomianu $W(x) = 12x^5 - 4x^4 - 30x^3 + 4x^2 + 15$ przez wielomian $F(x) = 2x^2 - 5$.

Rozwiązanie

$$
\begin{array}{l}
\quad 6x^3 - 2x^2 - 3 \\
\hline
\quad 12x^5 - 4x^4 - 30x^3 + 4x^2 + 15 \; : 2x^2 - 5 \\
-\left(12x^5 \qquad\quad - 30x^3\right) \\
\hline
\qquad\qquad - 4x^4 + 4x^2 + 15 \\
\qquad\quad -\left(- 4x^4 + 10x^2\right) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad - 6x^2 + 15 \\
\qquad\qquad\qquad -\left(- 6x^2 + 15\right) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Wielomian $W(x) = 12x^5 - 4x^4 - 30x^3 + 4x^2 + 15$ zapiszemy zatem w postaci:

$$W(x) = \left(6x^3 - 2x^2 - 3\right)\left(2x^2 - 5\right).$$

Rozważymy teraz stopień ilorazu wielomianów przy dzieleniu bez reszty.

Własność: Stopień ilorazu wielomianów - dzielenie bez reszty

- Jeżeli $W(x)$, $F(x)$ i $G(x)$ nie są wielomianami zerowymi oraz $W(x) : F(x) = G(x)$, to $\deg(G(x)) = \deg(W(x)) - \deg(F(x))$.
- Jeżeli $W(x) : F(x) = G(x)$ oraz $F(x)$ jest wielomianem zerowym, to nie możemy wykonać dzielenia.
- Jeżeli $W(x) : F(x) = G(x)$ oraz $G(x)$ jest wielomianem zerowym, to $W(x)$ również jest wielomianem zerowym.

Zauważ, że w przykładzie 4, stopień wielomianu $W(x)$ jest równy 5, a wielomianu $F(x)$ jest równy 2, stąd stopień wielomianu $G(x)$ jest równy 3.

Dzielenie wielomianów nie zawsze musi odbywać się bez reszty. Wyjaśni to kolejne twierdzenie i przykład 5.

> **Twierdzenie: Dzielenie wielomianów z resztą**
>
> Dla każdego wielomianu $W(x)$ i niezerowego wielomianu $F(x)$ istnieją wielomiany $G(x)$ i $R(x)$ takie, że $W(x) = F(x) \cdot G(x) + R(x)$, przy czym wielomian $R(x)$, nazywany **resztą z dzielenia**, jest stopnia mniejszego niż stopień wielomianu $F(x)$ lub jest wielomianem zerowym.

Jeżeli $R(x)$ jest wielomianem zerowym, to dzielenie odbywa się bez reszty.

> **Przykład 5**
>
> Wykonamy dzielenie wielomianu $W(x) = 8x^3 - 22x^2 + 36x - 24$ przez wielomian $F(x) = 4x - 5$.
>
> **Rozwiązanie**
>
> $$\begin{array}{l}
\underline{\quad 2x^2 - 3x + 5 \qquad\qquad\qquad} \\
\quad 8x^3 - 22x^2 + 36x - 24 \; : 4x - 5 \\
\underline{-(8x^3 - 10x^2) \qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad -12x^2 + 36x - 24 \\
\qquad\quad \underline{-(-12x^2 + 15x)} \\
\qquad\qquad\qquad 21x - 24 \\
\qquad\qquad \underline{-(20x - 25)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x + 1
\end{array}$$
>
> Wielomian $W(x) = 8x^3 - 22x^2 + 36x - 24$ zapiszemy zatem w postaci:
>
> $W(x) = \left(2x^2 - 3x + 5\right)(4x - 5) + x + 1.$
>
> Dwumian liniowy $R(x) = x + 1$ jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $F(x)$.

Rozważymy teraz stopień reszty przy dzieleniu wielomianów.

> **Własność: Stopień reszty z dzielenia dwóch wielomianów**

- Jeżeli $W(x)$, $F(x)$, $G(x)$ i $R(x)$ nie są wielomianami zerowymi oraz $W(x) = F(x) \cdot G(x) + R(x)$, to $\deg(R(x)) < \deg(G(x))$, jeżeli szukamy ilorazu wielomianów $W(x)$ i $F(x)$.
- Jeżeli $W(x)$, $F(x)$, $G(x)$ i $R(x)$ nie są wielomianami zerowymi oraz $W(x) = F(x) \cdot G(x) + R(x)$, to $\deg(R(x)) < \deg(F(x))$, jeżeli szukamy ilorazu wielomianów $W(x)$ i $G(x)$.

W przykładzie 4. wielomian $R(x) = x + 1$, który jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $F(x)$, jest stopnia 1 i jego stopień jest mniejszy od stopnia wielomianu $G(x) = 2x^2 - 3x + 5$ równego 2 .

Słowniczek

jednomian jednej zmiennej

wyrażenie postaci ax^k, w którym x jest zmienną rzeczywistą, a jest liczbą rzeczywistą różną od zera, a wykładnik k jest liczbą naturalną oznaczającą stopień jednomianu

dwumian liniowy

suma dwóch jednomianów, którego stopień jest równy 1

Prezentacja multimedialna

Dzielenie wielomianów, które pokazaliśmy, nie jest jedynym sposobem, w jaki można wykonać to działanie, ale jest jedynym uniwersalnym. Drugim sposobem dzielenia wielomianów jest schemat Hornera. Niestety, możemy go używać jedynie wtedy, gdy dzielimy wielomian w uporządkowanej formie przez dwumian liniowy postaci $(x+a)$ lub $(x-a)$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Prezentacja multimedialna zawarta w Poleceniu 1 wyjaśni jego sposób działania.

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, która dotyczy schematu Hornera. Na jej podstawie rozwiąż polecenia 2 i 3.

Polecenie 2

Polecenie 3

Wykonaj dzielenie, używając schematu Hornera: $\left(-2x^3+6x^2+25x-25\right):(x-5)$. Określ stopień otrzymanego ilorazu.

Polecenie 4

Podziel wielomian $W(x)=x^3-5x-2$ przez dwumian liniowy $P(x)=x+1$. Spróbuj to zrobić więcej niż jednym sposobem. Swoje rozwiązanie porównaj z przedstawionym w samouczku.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Dane są wielomiany $W(x) = 5x^3 - \left(m^2 - 4m\right)x^2 - x + 4$, $F(x) = x - 1$ oraz $G(x) = 5x^2 - 3x - 4$. Wyznacz wartość parametru m, dla którego równość $W(x) = F(x) \cdot G(x)$ jest prawdziwa.

Dla nauczyciela

Autor: Adam Jackowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Działania na wielomianach - powtórzenie wiadomości

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne:

I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych,

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje wielomian, określia stopień wielomianu,
- wyznacza sumę, różnicę, iloczyn lub iloraz dwóch wielomianów,
- określa stopień wielomianu powstałego po wykonaniu odpowiedniego działania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- rosnące plakaty
- zadania z kubka
- stoliki eksperckie

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi wybranych uczniów (uczniowie ci będą pełnili rolę ekspertów na lekcji) o zapoznanie się w domu z materiałem z sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą rosnących plakatów. Najpierw za pomocą burzy mózgów przypominają sobie wszystko, co wiedzą na temat wielomianów (jednomian, stopień wielomianu, działania na wielomianach), a następnie przedstawiają graficznie uzyskane wiadomości. Powstały plakat uzupełnią w końcowej części zajęć o nowo uzyskane informacje. W ten sposób plakat „rozrośnie się".
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w 3 grupach. Zapoznają się z działaniami na wielomianach. Przechodzą do trzech stolików eksperckich.
2. Stoliki:
    - pierwszy: Dodawanie i odejmowanie wielomianów.
    - drugi: Mnożenie wielomianów.
    - trzeci: Dzielenie wielomianów.
3. Przy każdym stoliku siedzi ekspert – uczeń, który wcześniej zapoznał się z rozwiązaniami zadań z grupy, którą określa nazwa stolika (są to zadania z bloku Przeczytaj). Kartki z zadaniami schowane są w kubku. Wskazany przez eksperta uczeń losuje zadanie z kubka i próbuje je rozwiązać, objaśniając przy tym na głos wykonywane

czynności. Pozostali członkowie grupy mogą mu podsuwać pomysły na rozwiązanie. Jeśli w określonym czasie grupa nie upora się z zadaniem, może poprosić o pomoc eksperta.
4. Uczniowie zapoznają się Prezentacją multimedialną. Analizują w grupach dzielenie wielomianów z zastosowanie schematu Hornera.
5. Ostatnim elementem wspólnej pracy jest wzbogacenie rosnących plakatów o wiadomości zdobyte w czasie zajęć.
6. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy omawiają pracę swoich grup, wskazują na trudności, prezentują wykonane plakaty.
2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć i zdobyte wiadomości.
3. Nauczyciel ocenia pracę uczniów – wskazuje na mocne i słabe strony.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji oraz plecenia w sekcji „Prezentacja multimedialna”.

Materiały pomocnicze:

- Stopień wielomianu
- Suma i różnica wielomianów
- Iloczyn wielomianów
- Podzielność wielomianów

Wskazówki metodyczne:

Prezentację można zastosować na lekcji poświęconej dzieleniu wielomianów.