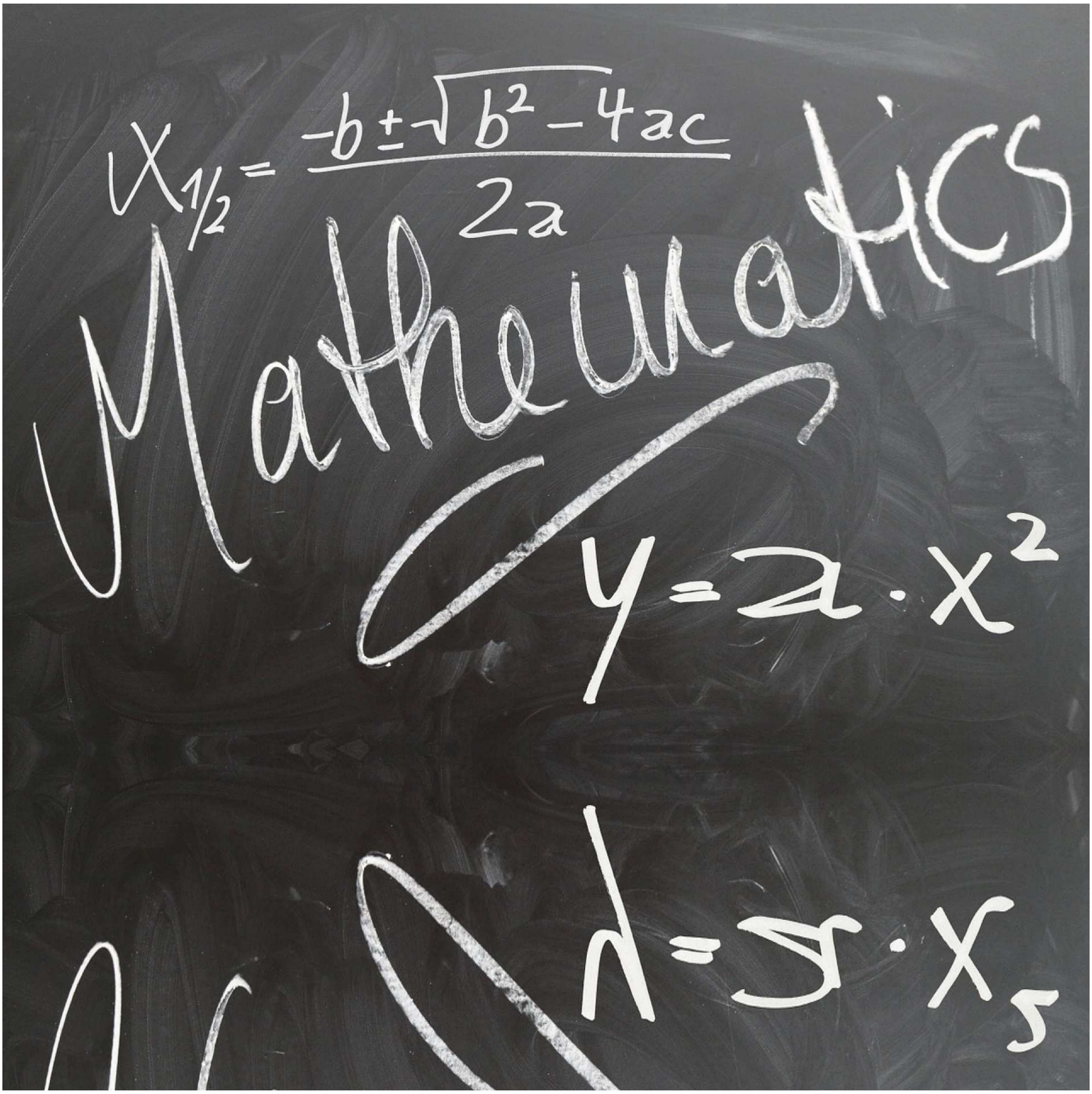
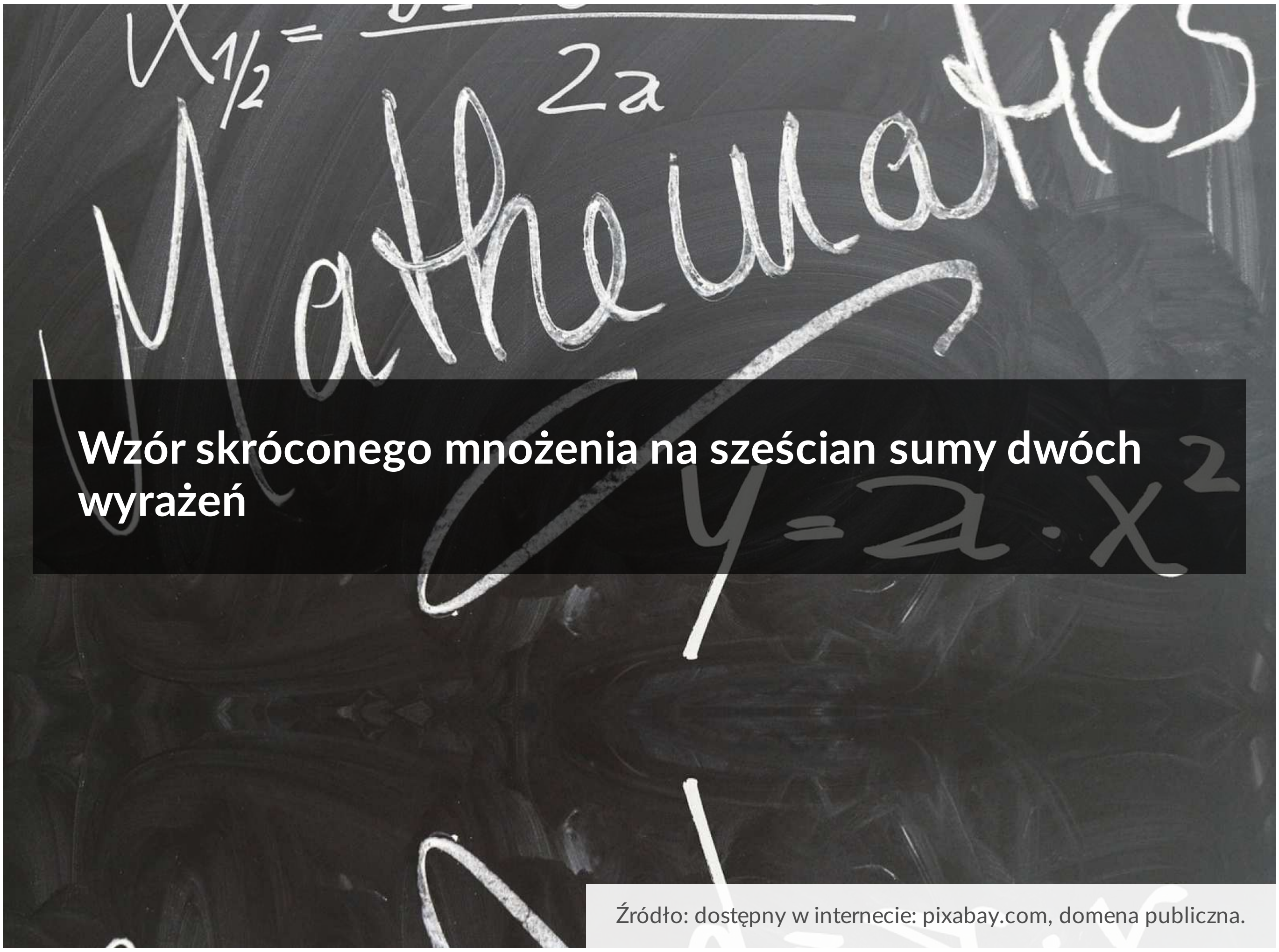


Wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń



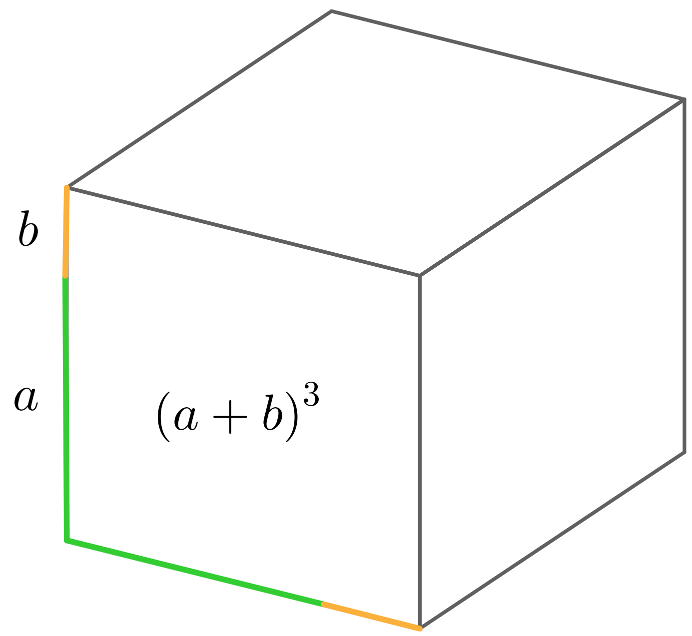
Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wiemy już, że wzory skróconego mnożenia przydają się przy mnożeniu lub potęgowaniu wyrażeń algebraicznych. Znamy już takie wzory stopnia drugiego. Teraz zajmiemy się wzorami skróconego mnożenia stopnia trzeciego. Na początek pierwszy z nich **wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń**.

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń.
> - Zapiszesz sześcian sumy dwóch wyrażeń w postaci sumy.
> - Przekształcisz wyrażenia algebraiczne, wykorzystując wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń.

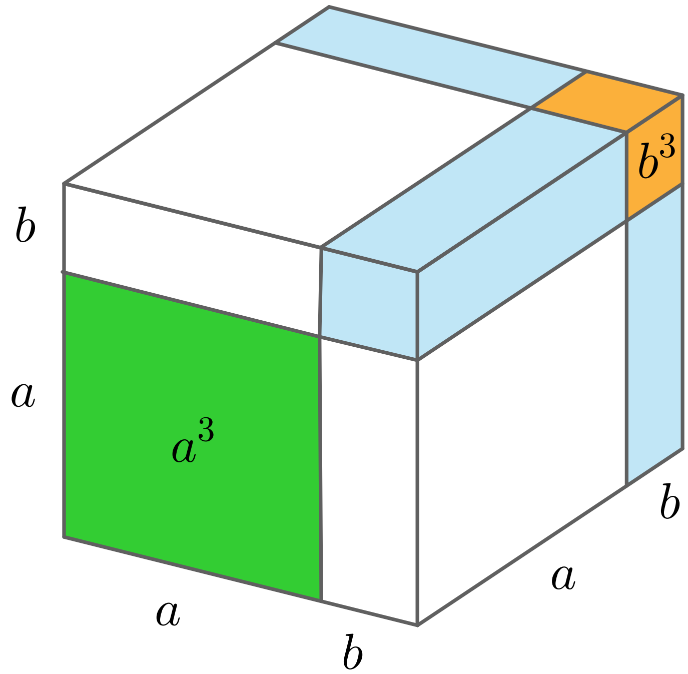
Przeczytaj

Obliczymy dwoma sposobami objętość sześcianu przedstawionego na rysunku. Zakładamy, że $a > 0, b > 0$.



Krawędź sześcianu ma długość $a + b$, zatem:

$$V = (a+b)^3$$



Objętość sześcianu obliczamy teraz jako sumę objętości sześcianu o krawędzi długości a, sześcianu o krawędzi długości b, trzech prostopadłościanów o krawędziach długości a, a, b oraz trzech prostopadłościanów o krawędziach długości a, b, b.

$$V = a^3 + b^3 + 3 \cdot a \cdot a \cdot b + 3 \cdot a \cdot b \cdot b = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Porównując otrzymane wyrażenia, otrzymujemy:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Otrzymana równość zwana jest wzorem skróconego mnożenia na **sześcian sumy dwóch wyrażeń**.

Wzór na sześcian sumy dwóch wyrażeń:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Sześcian sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie sześcianów tych wyrażeń plus potrojony iloczyn kwadratu pierwszego wyrażenia przez drugie plus potrojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez kwadrat drugiego wyrażenia.

Powyższy wzór można też uzyskać, zapisując sześcian sumy w postaci iloczynu i wykonując mnożenie.

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right) =$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Korzystając ze wzoru na sześcian sumy, można podnosić do sześcianu dwumiany, nie wykonując mnożenia.

> **Przykład 1**
>
> Zapiszemy każde z wyrażeń w postaci sumy.
>
> $$(x+1)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 1 + 3\cdot x\cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$
>
> $$\left(a+\sqrt[3]{2}\right)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot\sqrt[3]{2} + 3\cdot a\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 =$$
>
> $$= a^3 + 3\sqrt[3]{2}a^2 + 3\sqrt[3]{4}a + 2$$
>
> $$\left(x^2+3\right)^3 = x^6 + 3\cdot x^4\cdot 3 + 3\cdot x^2\cdot 9 + 3^3 = x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27$$
>
> $$(2x+5a)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 5a + 3\cdot 2x\cdot(5a)^2 + (5a)^3 =$$
>
> $$= 8x^3 + 60ax^2 + 150a^2x + 125a^3$$

> **Przykład 2**
>
> Przekształcimy potęgi na sumy algebraiczne, wykorzystując wzór na sześcian sumy.
>
> $$\left(xy+2\sqrt{5}\right)^3 = (xy)^3 + 3\cdot(xy)^2\cdot 2\sqrt{5} + 3\cdot xy\cdot\left(2\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^3 =$$
>
> $$= x^3y^3 + 6\sqrt{5}x^2y^2 + 60xy + 40\sqrt{5}$$
>
> $$\left(a^4x^3+0{,}1\right)^3 = a^{12}x^9 + 3\cdot a^8x^6\cdot 0{,}1 + 3\cdot a^4x^3\cdot(0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 =$$
>
> $$= a^{12}x^9 + 0{,}3a^8x^6 + 0{,}03a^4x^3 + 0{,}001$$

Jeżeli oba składniki sumy, którą należy podnieść do sześcianu, poprzedzone są znakiem „$-$", można wyłączyć (-1) przed nawias i zastosować poznany wzór skróconego mnożenia. W wyniku zmieniamy znaki otrzymanej sumy na przeciwne.

Na przykład:

$$(-4x-y)^3 = [(-1)(4x+y)]^3 = (-1)^3\left(64x^3 + 48x^2y + 12xy^2 + y^3\right) =$$

$$= -64x^3 - 48x^2y - 12xy^2 - y^3$$

Wykorzystanie wzoru na sześcian sumy dwóch wyrażeń znacznie ułatwia przekształcanie wyrażeń algebraicznych.

Przykład 3

Zapiszemy podane wyrażenie w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość dla $x = -\sqrt[3]{7}$.

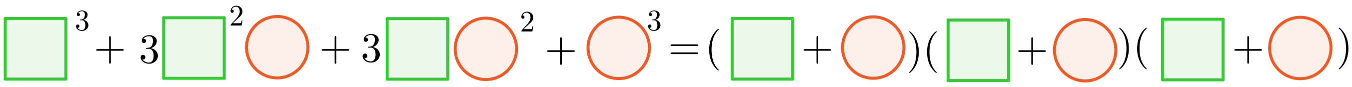
$$3 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 - x \cdot (3x + 1) = 3 \cdot \left(x^3 + x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{27}\right) - 3x^2 - x = 3x^3 + \frac{1}{9}$$

$$3 \cdot \left(-\sqrt[3]{7}\right)^3 + \frac{1}{9} = -20\frac{8}{9}$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia jest równa $-20\frac{8}{9}$.

Ważnym zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy jest zapisywanie sum algebraicznych w postaci iloczynu.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Przykład 4

Zapiszemy sumy algebraiczne w postaci iloczynów.

$$125a^3 + 75a^2 + 15a + 1 = (5a + 1)(5a + 1)(5a + 1)$$

$$27x^3 + 216x^2y + 576xy^2 + 512y^3 = (3x + 8y)(3x + 8y)(3x + 8y)$$

$$3a^3 + 3\sqrt[3]{9}a^3 + 3\sqrt[3]{3}a^3 + a^3 = \left(\sqrt[3]{3}a + a\right)\left(\sqrt[3]{3}a + a\right)\left(\sqrt[3]{3}a + a\right)$$

$$k^3 + 1{,}5k^2m + 0{,}75km^2 + 0{,}125m^3 = (k + 0{,}5m)(k + 0{,}5m)(k + 0{,}5m)$$

Wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy można zastosować obliczając wartości wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 5

$$\left(2 + \sqrt{2}\right)^3 - 14\sqrt{2} = 8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot 2 + \sqrt{8} - 14\sqrt{2} =$$

$$= 20 + 14\sqrt{2} - 14\sqrt{2} = 20$$

$$\left(4+3\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\right)-\left(1+\sqrt[3]{3}\right)^2=\left(1+\sqrt[3]{3}\right)^3-\left(1+\sqrt[3]{3}\right)^2=$$

$$=\left(1+\sqrt[3]{3}\right)^2\left(1+\sqrt[3]{3}-1\right)=\sqrt[3]{3}\left(1+\sqrt[3]{3}\right)^2$$

Słownik

wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy

sześcian sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie sześcianów tych wyrażeń plus potrojony iloczyn kwadratu pierwszego wyrażenia przez drugie plus potrojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez kwadrat drugiego wyrażenia

Film samouczek

Polecenie 1

Zapisz podane iloczyny w postaci sum, wykonując odpowiednie mnożenia.

a) $(1+m)(1+m)(1+m)$

b) $(x+2y)(x+2x)(x+2y)$

c) $\left(2x^2+3x\right)\left(2x^2+3x\right)^2$

d) $\left(4+\sqrt{2}\right)^2\left(4+\sqrt{2}\right)$

Zapoznaj się z filmem samouczkiem i jeszcze raz zamień iloczyny na sumy – tym razem korzystając z odpowiedniego wzoru. Porównaj otrzymane wyniki.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1Dpnjpwm

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wzorów skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń.

Polecenie 2

Oblicz objętość sześcianu o boku długości $(a+2)$. Podaj ilustrację geometryczną wykonanego działania.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawne stwierdzenia.

- [ ] Jeśli $(x+5)^3 = x^3 + ax^2 + bx + c$ to $a+b+c=215$.
- [ ] Równość $(-x-9)^3 = -(x+9)^3$ jest prawdziwa tylko jeśli x jest liczbą dodatnią.
- [ ] Wyrażenie $(x+1)(x+1)(x+1)^2$ to sześcian sumy liczb x i 1.
- [ ] Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $\left(2x+3y^2\right)\left(3y^2+2x\right)^2$ jest równe $\left(2x+3y^2\right)^3$.

Ćwiczenie 2

Dopasuj działanie do wyniku.

$(10a+0{,}1b)^3$	$a^3+1000b^3+30a^2b+$ $+300ab^2$
$(-10a-10b)^3$	$-1000a^3-1000b^3-3000a^2b-3000$
$(10a+b)^3$	$1000a^3+0{,}001b^3+30a^2b+$ $+0{,}3ab^2$
$(a+10b)^3$	$1000a^3+b^3+300a^2b+30ab^2$

Ćwiczenie 3

Oceń, czy poprawnie wykonano potęgowanie. Zaznacz prawidłowe odpowiedzi.

- [ ] $(xy+2x)^3 = x^3\left(y^3+6y^2+12y+8\right)$
- [ ] $\left(x+x^3\right)^3 = x^3+x^9$
- [ ] $\left(x+\sqrt{2}\right)^3 = x\left(x^2+3\sqrt{2}x+6+2\sqrt{2}\right)$
- [ ] $\left(\frac{1}{3}+3x\right)^3 = 9x^2(3x+1)+x+\frac{1}{27}$

Ćwiczenie 4

Uzupełnij zapisy, przeciągając poprawne wyrażenia w odpowiednie miejsca.

$(x+y)^3 = x^3+3xy^2+$ ______

$\left(x^2+x^3\right)^3 =$ ______ $+x^6+x^9$

$\left(y+x^2\right)^3 = y^3+$ ______ $+3yx^4+x^6$

$3x^2y^2+y^3$ | $3y^2x^2$ | $3yx^2$ | $3x^6+3x^9$ | $3x^7+3x^8$ | $2x^5+2x^7$ | $3x^2y+y^3$ | $3y^2x$ | $3x^2y+y^2$

Ćwiczenie 5

Przeciągnij w odpowiednie miejsca poprawne liczby.

Współczynnik liczbowy przy najwyższej potędze x, po wykonaniu potęgowania $\left(5x^4+x^6\right)^3$ i redukcji wyrazów podobnych wynosi ______.

Liczba wyrazów, które otrzymamy po wykonaniu wskazanych działań w wyrażeniu $(x+1)^3-(1+x)^2-2x^2$ i redukcji wyrazów podobnych wynosi ______.

Liczba k, dla której zachodzi równość $\left(3\sqrt{3}+k\right)^3=270+162\sqrt{3}$ wynosi ______.

0 4 2 3 5 1

Ćwiczenie 6

Połącz w pary równe liczby.

$\left(2\sqrt{2}+1\right)^3$	$9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$
$\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^2\left(1+\sqrt[3]{2}\right)$	$162\sqrt{2}+132\sqrt{3}$
$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3$	$25+22\sqrt{2}$
$\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\cdot\cdot\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$	$3+3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}$

Ćwiczenie 7

Uzupełnij działania, przeciągając odpowiednie wyrażenia algebraiczne .

$8 + 12x + 6x^2 + x^3 = (\boxed{} + x)^3$

$(x+3)(x+3)(x+3) = x^3 + 9x^2 + \boxed{} + 27$

$2\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) = \left(\sqrt[2]{2} + \boxed{}\right)^3$

$27x$ | $\sqrt[3]{27}x$ | 1 | $\sqrt[3]{3}x$ | 2 | $\sqrt[3]{2}x$ | $2x$ | x | 27

Ćwiczenie 8

Wykaż, że sześcian liczby naturalnej nieparzystej jest liczbą nieparzystą.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje sześcian dwumianu w postaci sumy, wykorzystując odpowiedni wzór skróconego mnożenia
- zamienia sumę algebraiczną na iloczyn, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy
- przekształca wyrażenia algebraiczne, z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy
- analizuje problem algebraiczny, dobiera odpowiedni model do jego rozwiązania
- stosuje wzory skróconego mnożenia w sytuacjach nietypowych, w tym do dowodzenia twierdzeń

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda wędrujących plakatów
- konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby w domu przypomnieli sobie poznane wzory skróconego mnożenia.
2. Uczniowie powinni też przypomnieć sobie w domu prawa działań na liczbach rzeczywistych, a w szczególności rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Faza wstępna:

Praca w parach. Uczniowie przypominają sposób mnożenia sum algebraicznych, podają przykłady obliczania potęg (również liczb niewymiernych), przypominają prawa działań na potęgach i pierwiastkach. Wykorzystują metodę wędrujących plakatów – jedna z par uczniów siedzących w tej samej ławce zapisuje odpowiedni przykład i podaje karton z zapisem osobom siedzącym w następnej ławce, itd.

W razie wątpliwości uczniowie proszą o pomoc nauczyciela.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Ćwiczenie 1
Praca w 4 grupach. Każda z grup ma za zadanie graficzne zobrazowanie i obliczenie dwoma sposobami objętości sześcianu o krawędzi długości:

- $m + 3$ – pierwsza grupa

- $x + y$ – druga grupa
- $5 + a$ – trzecia grupa
- $2a + 5b$ – czwarta grupa

Ćwiczenie 2
Teraz grupy łączą się – grupa 1 z 2 oraz grupa 3 z 4. Zadaniem grup jest wymyślenie 2 podobnych przykładów takich, jak w ćwiczeniu 1. Przeanalizowanie wszystkich rozwiązanych przykładów i sformułowanie odpowiedniej zależności.

Ćwiczenie 3
Grupy udowadniają algebraicznie zapisane przez siebie wzory.

Prezentacja prac grup, wspólne zapisanie wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy dwóch wyrażeń.

Uczniowie w parach porównują uzyskane rezultaty z podanymi w samouczku.

Wspólna praca uczniów – uczniowie kolejno podają przykłady sześcianu sumy, a ochotnicy zapisują na tablicy te przykłady w postaci sum.

Praca indywidualna uczniów – uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

Podsumowaniem zajęć jest konkurs zadaniowy – zapisywanie w postaci sumy sześcianu wyrażenia arytmetycznego zawierającego co najmniej jeden pierwiastek.

Trzej ochotnicy zapisują na tablicy wymyślone przez siebie przykłady sześcianów wyrażeń arytmetycznych typu $\left(a+\sqrt{b}\right)^3$ – pierwszy poziom, $\left(a+b\sqrt{c}\right)^3$ – drugi poziom, $\left(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}\right)^3$ – trzeci poziom. Przy czym w nawiasach mogą wystąpić też pierwiastki stopnia 3.

Wygrywa uczeń, który najszybciej pokona kolejne progi zadaniowe.

Końcowy element zajęć to podsumowanie przez uczniów pracy grup, określenie czy postawione cele zostały osiągnięte, wskazanie przez nauczyciela ważnych elementów zajęć, ocena pracy uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wymyślenie lub poszukanie w dostępnych źródłach zastosowania wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy.

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Księga liczb, J.H. Conway, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1999 – rozdział o trójkącie Pascala.

Działania na wyrażeniach algebraicznych - przykłady

Wskazówki metodyczne:

Samouczek można wykorzystać do samodzielnej pracy uczniów, jako wstęp do zajęć.