

Algorytm Euklidesa

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Algorytm Euklidesa

Źródło: Alex Lehner, domena publiczna.

W tym e-materiale powtarzamy wiadomości ze szkoły podstawowej.

Algorytm Euklidesa został przedstawiony około 300 r. p.n.e. Jest on jednym z najstarszych wciąż wykorzystywanych algorytmów, a służy do znajdowania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb całkowitych. Ten e-materiał poświęcimy właśnie algorytmowi Euklidesa i różnym sposobom jego realizacji.

Implementacje omawianego algorytmu w poszczególnych językach programowania przedstawiamy w e-materiałach:

- [Algorytm Euklidesa w języku C++](#),
- [Algorytm Euklidesa w języku Java](#).
- [Algorytm Euklidesa w języku Python](#).

Więcej zadań? Sięgnij do [Algorytm Euklidesa – zadania maturalne](#).

Twoje cele

- Powtórzysz informacje o algorytmie Euklidesa.
- Przeanalizujesz dwa warianty implementacji algorytmu Euklidesa.
- Prześledzisz algorytm Euklidesa zapisany za pomocą schematu blokowego.

Przeczytaj

Algorytm Euklidesa

Algorytm Euklidesa jest opisem czynności, które należy wykonać, aby znaleźć największy wspólny dzielnik dwóch liczb całkowitych (czyli największą liczbę naturalną, która dzieli obie liczby bez reszty). Aby zrozumieć sam algorytm, musimy zwrócić uwagę na pewną właściwość dwóch dowolnych liczb całkowitych.

Jeżeli weźmiemy parę liczb (przykładowo, 18 oraz 12) i od większej z nich odejmiemy mniejszą, to wynik działania wraz z mniejszą liczbą utworzy nową parę. Jej największy wspólny dzielnik będzie taki sam, jak w przypadku oryginalnej pary. Sprawdźmy to na liczbach 18 i 12. Ich największym wspólnym dzielnikiem jest 6.

Teraz od liczby 18 odejmiemy 12:

$$18 - 12 = 6$$

Wynik działania wraz z mniejszą liczbą tworzą nową parę: 12 i 6. Największy wspólny dzielnik się nie zmienił – wciąż wynosi on 6.

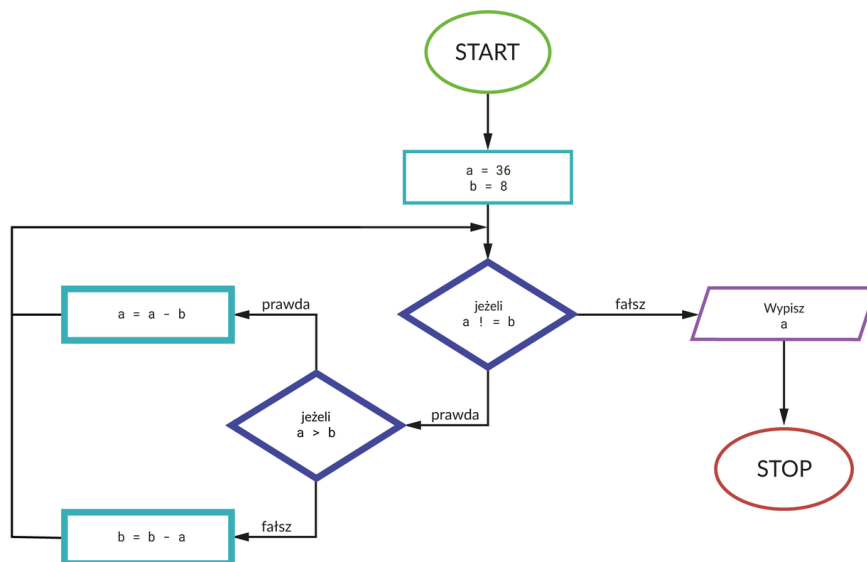
Ta właściwość jest fundamentem algorytmu Euklidesa. Opisana cecha jest wspólna dla każdej pary liczb, a zatem możemy powtórzyć proces odejmowania i tworzenia nowej pary dla wartości 12 oraz 6:

$$12 - 6 = 6$$

Wynik oraz mniejsza liczba z pary początkowej składają się na kolejną parę: 6 i 6. Największym wspólnym dzielnikiem identycznych liczb jest każda z nich.

Okazuje się, że biorąc dwie dowolne liczby i wiele razy wykonując opisane wyżej czynności (odejmowanie i tworzenie kolejnych par), otrzymamy w końcu dwie identyczne liczby. Każda kolejna para ma taki sam największy wspólny dzielnik. Zatem ostatnie elementy ciągu są największym wspólnym dzielnikiem pierwszej pary.

To właśnie jest algorytm Euklidesa. Aby przełożyć go na język programowania, najlepiej jest posłużyć się schematem blokowym:



Algorytm Euklidesa

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Najpierw tworzymy zmienne a oraz b . Jest to para liczb, dla której musimy znaleźć największy wspólny dzielnik. Bloki pogrubione są elementami pętli `while`. Sprawdzamy warunek naszej pętli (czy wartości zmiennych a i b nie są równe – jeśli są równe, wówczas od razu otrzymujemy największy wspólny dzielnik). Zmienna a ma jednak wartość 36, a zmienna b wynosi 8, więc wyrażenie logiczne ma wartość logiczną `prawda`.

Kolejnym krokiem jest sprawdzenie, która z liczb jest większa, ponieważ od niej musimy odjąć mniejszą. W tym przypadku będzie to zmienna a . Podążamy więc do bloku wskazanego przez strzałkę z napisem `prawda` i od a odejmujemy b . Wynikiem zastępujemy poprzednią wartość zmiennej a . Nowa para składa się z różnicy z odejmowania oraz mniejszej liczby z poprzedniej pary.

Wracamy na początek pętli `while`, ponownie sprawdzamy warunek i postępujemy tak do chwili, gdy wartości zmiennych a oraz b będą takie same. Program wyświetla wówczas wartość zmiennej a – jest to właśnie największy wspólny dzielnik.

Analiza efektywności algorytmu

Program działa i wydaje się, że nie ma kłopotów ze znalezieniem **NWD** dowolnej pary liczb całkowitych. Czy jest tak na pewno? Pierwsze problemy pojawią się, gdy zaczniemy szukać największego wspólnego dzielnika dużych liczb. A jeżeli jedna z liczb w parze jest bardzo duża, a druga bardzo mała, będzie jeszcze gorzej. Program odejmuje od siebie liczby aż do momentu, kiedy staną się one równe. Przy dużej dysproporcji wartości potrzebnych jest wiele przejść pętli. Zajmuje to czas i zasoby komputera.

Założmy, że szukamy NWD liczb $a = 1\,000\,000$ oraz $b = 50\,000$. Prześledźmy wykonywane operacje:

$$a = 1\,000\,000 - 50\,000 = 950\,000$$

$$b = 50\,000$$

$$a = 950\,000 - 50\,000 = 900\,000$$

$$b = 50\,000$$

$$a = 900\,000 - 50\,000 = 850\,000$$

$$b = 50\,000$$

...

$$a = 100\,000 - 50\,000 = 50\,000$$

$$b = 50\,000$$

$$a = b = NWD = 50\,000$$

W tym przypadku pętla `while` wykonała 19 iteracji. Nie jest to zły wynik. Zobaczmy jednak, co się stanie jeżeli spróbujemy znaleźć największy wspólny dzielnik pary 1 000 000 oraz 2.

$$a = 1\,000\,000 - 2 = 999\,998$$

$$b = 2$$

$$a = 999\,998 - 2 = 999\,996$$

$$b = 2$$

$$a = 999\,996 - 2 = 999\,994$$

$$b = 2$$

...

$$a = 4 - 2 = 2$$

$$b = 2$$

$$a = b = NWD = 2$$

Tym razem pętla `while` była wykonywana aż **499 999** razy.

Na szczęście istnieje inna wersja algorytmu Euklidesa. Wykorzystywany jest w niej [operator modulo](#). Prezentacja na kolejnej stronie objaśnia ten właśnie wariant algorytmu.

Słownik

NWD

skrót pojęcia „największy wspólny dzielnik”

operator modulo

operator zwracający resztę z dzielenia liczb całkowitych

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Obejrzyj prezentację, a następnie porównaj oba warianty algorytmu Euklidesa.

Trwa wczytywanie danych ..

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuXl8higk>

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Dźwiękowe nagranie lekcji

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Polecenie 2

W poniższym schemacie przygotuj algorytm wyliczający NWD z zastosowaniem operatora modulo.

Specyfikacja problemu:

Dane:

a, b – liczby, dla których program wyliczy NWD; liczby naturalne dodatnie

Wynik:

Na standardowym wyjściu prezentowany jest największy wspólny dzielnik liczb a i b.

W poniższym schemacie przygotuj algorytm wyliczający NWD z zastosowaniem operatora modulo.

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Specyfikacja problemu:

Dane:

- a, b – liczby naturalne dodatnie

Wynik:

Na standardowym wyjściu program wyświetla NWD liczb a i b.

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Algorytm Euklidesa

Grupa docelowa:

Liceum ogólnokształcące i technikum, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) zapisuje za pomocą listy kroków, schematu blokowego lub pseudokodu, i implementuje w wybranym języku programowania, algorytmy poznane na wcześniejszych etapach oraz algorytmy:

a) algorytm Euklidesa w wersji iteracyjnej i rekurencyjnej wraz z zastosowaniami,

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Powtórzysz informacje o algorytmie Euklidesa.

- Przeanalizujesz dwa warianty implementacji algorytmu Euklidesa.
- Prześledzisz algorytm Euklidesa zapisany za pomocą schematu blokowego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Algorytm Euklidesa”. Uczniowie zapoznają się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla temat i cele zajęć. Prosi uczniów, by na podstawie wiadomości zdobytych przed lekcją zaproponowali kryteria sukcesu.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w obszarze poruszanego tematu i programowania, np.
 - do czego służy operator modulo?
 - co oznacza skrót NWD?
 - do czego wykorzystujemy algorytm Euklidesa?Chętni uczniowie udzielają na nie odpowiedzi.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach przypominają sobie najważniejsze informacje dotyczące pętli `while`

2. **Praca z multimediami.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Schemat interaktywny”, czyta treść polecenia nr 1: „Obejrzyj prezentację, a następnie porównaj oba warianty algorytmu Euklidesa” i omawia kolejne kroki rozwiązania.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Na koniec zajęć nauczyciel raz jeszcze wyświetla na tablicy temat lekcji i cele zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. W odniesieniu do ich realizacji dokonuje szczegółowej oceny rozwiązania zastosowanego przez wybranego ucznia.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Wyznacz NWD liczb: $a = 42$ i $b = 24$ za pomocą algorytmu Euklidesa. Porównaj ze sobą liczbę obiegów pętli `while` w obu wariantach.

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać multimedia w sekcji „Przeczytaj” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania dołączone do e-materiału „Algorytm Euklidesa”.