



Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie

Sposoby na wyznaczenie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie. Funkcja kwadratowa z parametrem. Animacja: sposoby obliczenia współczynnika c we wzorze funkcji. Ilustracja interaktywna: wyznaczanie współrzędnych wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej. Ilustracja interaktywna: zmiana postaci ogólnej na kanoniczną.

Ustalanie współrzędnych wierzchołka paraboli. Ustalanie zbioru wartości funkcji. Wyznaczanie miejsc zerowych. Wyznaczanie wartości współczynników danej funkcji. Zasób zawiera zadania z rozwiązaniami.

Wyznaczanie największej najmniejszej wartości funkcji kwadratowej. Wyznaczanie współczynników funkcji. Wyznaczanie miejsc zerowych. Zasób zawiera zadania z rozwiązaniami.

Wyznaczanie wartości współczynników ze wzoru funkcji dla podanych warunków. Sprawdzanie czy punkt leży na paraboli. Zasób zawiera zadania z rozwiązaniami.

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie

Przypomnijmy, że każdą funkcję kwadratową f określoną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie a , b oraz c to liczby rzeczywiste, przy czym liczba a jest różna od zera, możemy zapisać w postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x - p)^2 + q,$$

gdzie $p = \frac{-b}{2a}$ i $q = \frac{-\Delta}{4a}$.

Ponadto każdą taką funkcję kwadratową, której wyróżnik jest nieujemny, możemy też zapisać w postaci iloczynowej

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdzie $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ to miejsca zerowe tej funkcji.

W poniższych przykładach pokażemy, w jaki sposób można wyznaczyć wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Przykład 1

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + 4x + c$ osiąga wartość najmniejszą równą -7 .

Wyznamy wartość współczynnika c .

Rozwiązanie.

Z treści zadania wynika, że współrzędna q wierzchołka wykresu funkcji f jest równa -7 . Możemy z tego skorzystać w jeden z następujących sposobów.

- sposób I

Obliczamy wyróżnik funkcji f

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 16 - 4c.$$

Podstawiamy do wzoru $q = \frac{-\Delta}{4a}$.

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 - 4c)}{4 \cdot 1} = -7.$$

Stąd $4c - 16 = -28$, $4c = -12$, $c = -3$.

- sposób II

Ze wzoru odczytujemy pierwszą współrzędną wierzchołka wykresu funkcji

$p = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$. Wobec tego

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + c = -7,$$

stąd $c = -3$.

- sposób III

Ze wzoru odczytujemy pierwszą współrzędną wierzchołka: $p = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$ i $f(-2) = -7$.

Wobec tego funkcję f można zapisać wzorem w postaci kanonicznej $f(x) = (x + 2)^2 - 7$, stąd

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 7 = x^2 + 4x - 3,$$

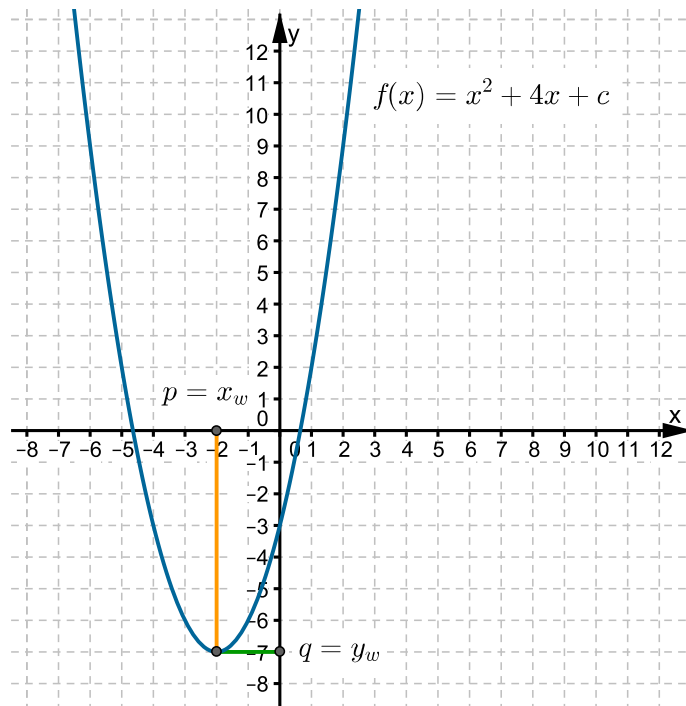
czyli $c = -3$.

- sposób IV

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci kanonicznej

$$f(x) = x^2 + 4x + c = (x^2 + 4x + 4) - 4 + c = (x + 2)^2 + c - 4.$$

Zatem funkcja f osiąga wartość najmniejszą $c - 4$ dla $x = -2$. Ponieważ $f(-2) = -7$, to $c - 4 = -7$, czyli $c = -3$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Sposób 1

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 16 - 4c$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 - 4c)}{4}$$

$$y_w = q = -7, \text{ czyli } \frac{-16 + 4c}{4} = -7$$

$$\text{stad: } 4c - 16 = -28$$

$$4c = -12$$

$$c = -3$$

Sposób 2

$$a = 1, b = 4$$

$$p = \frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + c = -7$$

$$4 - 8 + c = -7$$

$$c = -3$$

Sposób 3

$$a = 1, b = 4 \quad p = \frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Najmniejsza wartość funkcji $q = -7$

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

$$f(x) = (x + 2)^2 - 7$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 7 = x^2 + 4x - 3$$

$$c = -3$$

Sposób 4

$$f(x) = x^2 + 4x + c = (x^2 + 4x + 4) - 4 + c =$$

$$= (x + 2)^2 + c - 4$$

$$q = c - 4$$

$$c - 4 = -7$$

$$c = -3$$

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RsM5NXUfk4Zmv>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia sposób wyznaczenia współczynnika c pewnej funkcji kwadratowej.

Przykład 2

Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + bx - 14$ jest 7.

Wyznamy wartość współczynnika b .

Rozwiązanie.

- sposób I

Z treści zadania wynika, że

$$f(7) = -3 \cdot 7^2 + b \cdot 7 - 14 = 0.$$

Zatem $-147 + 7b - 14 = 0$, stąd $7b = 161$, czyli $b = 23$.

- sposób II

Z treści zadania wynika, że funkcję $f(x) = -3x^2 + bx - 14$ można zapisać w postaci iloczynowej

$$f(x) = -3(x - 7)(x - x_2),$$

gdzie x_2 to drugie miejsce zerowe funkcji f .

Postać iloczynową przekształcamy do postaci ogólnej, stąd

$$f(x) = -3(x^2 - 7x - x_2x + 7x_2) = -3x^2 + (21 + 3x_2)x - 21x_2.$$

Porównując współczynniki, stwierdzamy, że $-21x_2 = -14$ oraz $b = 21 + 3x_2$.

Zatem drugim pierwiastkiem jest $x_2 = \frac{2}{3}$, więc $b = 21 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 23$.

- sposób III

Z treści zadania wynika, że funkcję $f(x) = -3x^2 + bx - 14$ można zapisać w postaci iloczynowej

$$f(x) = -3(x - 7)(x - x_2),$$

gdzie x_2 to drugie miejsce zerowe funkcji f .

Jedynym wyrazem niezależnym od x w tym wzorze jest $-3 \cdot (-7) \cdot x_2$, zatem $-3 \cdot (-7) \cdot x_2 = -14$, a stąd $x_2 = \frac{2}{3}$. Liczba $\frac{2}{3}$ jest więc miejscem zerowym funkcji f , zatem

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + b \cdot \frac{2}{3} - 14 = 0.$$

Wobec tego $-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}b - 14 = 0$, $\frac{2}{3}b = 14\frac{4}{3}$, $\frac{2}{3}b = \frac{46}{3}$, czyli $b = 23$.

Przykład 3

Wyznamy współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej

$$f(x) = -(x + 1)(x - 3).$$

Rozwiązanie

- sposób I

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej

$$f(x) = -(x + 1)(x - 3) = -(x^2 + x - 3x - 3) = -x^2 + 2x + 3.$$

Wobec tego współrzędne wierzchołka tej paraboli to: $p = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$,

$q = f(1) = -1^2 + 2 + 3 = 4$. Zatem wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (1, 4)$.

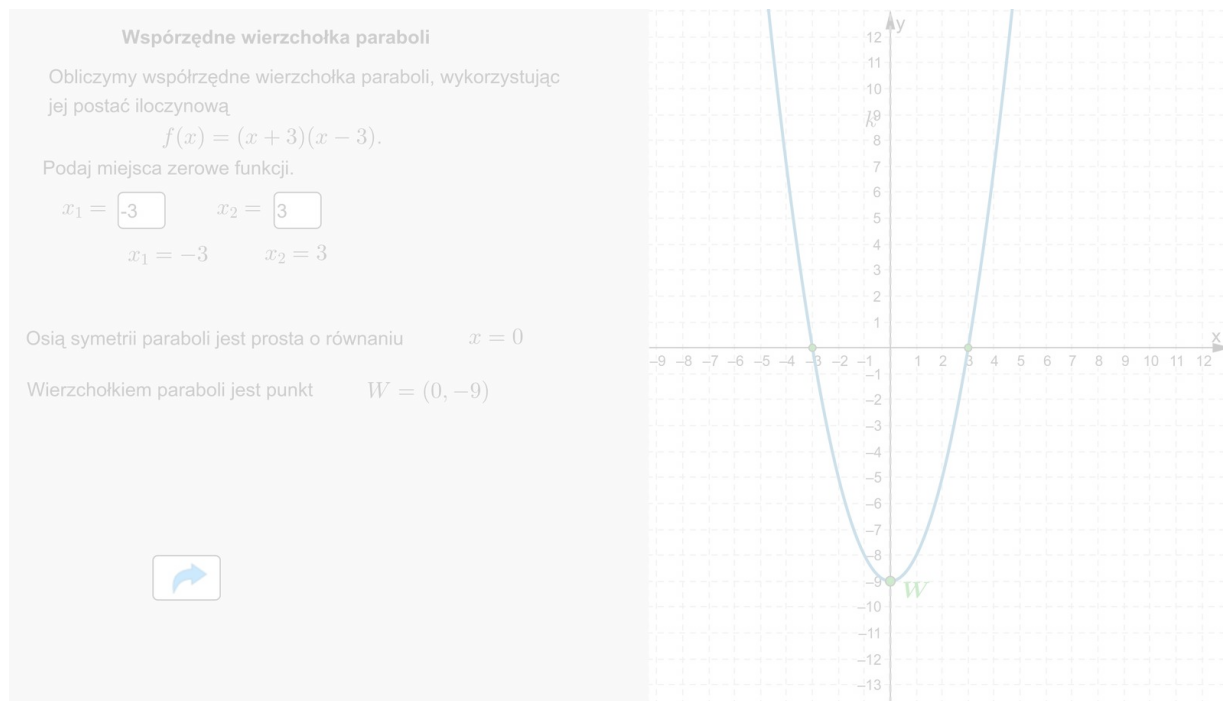
- sposób II

Ponieważ $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -1$ lub $x = 3$, to funkcja f ma dwa miejsca zerowe -1 oraz 3 . Oś symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f to jednocześnie symetralna odcinka, którego końcami są punkty $(-1, 0)$ i $(3, 0)$.

Korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka, stwierdzamy, że ta symetralna przechodzi przez punkt o współrzędnych $(\frac{-1+3}{2}, 0)$, więc jest to prosta o równaniu $x = 1$. Stąd $p = 1$ oraz $q = f(1) = -(1 + 1)(1 - 3) = 4$.

Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (1, 4)$.

Przykład 4



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P7PZV0sNX>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: Oś symetrii funkcji kwadratowej

Jeżeli funkcja kwadratowa

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2 , to oś symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f ma równanie

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Dowód.

Jak zauważyliśmy, oś symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f , to jednocześnie symetralna odcinka o końcach w punktach $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$.

Korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka, stwierdzamy, że ta symetralna przechodzi przez punkt o współrzędnych $(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$. Dla dowodu wystarczy więc pokazać, że

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = p.$$

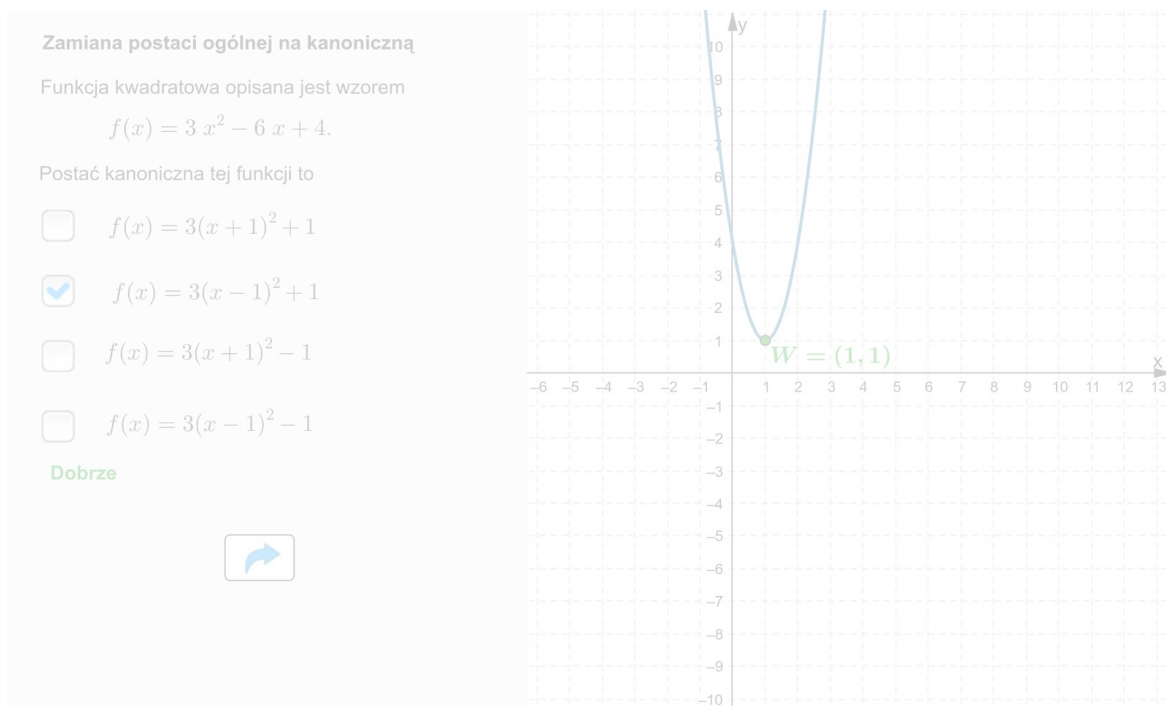
Ponieważ

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta} + (-b + \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-b}{a},$$

więc

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a} = p.$$

Przykład 5



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P7PZV0sNX>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 6

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -3x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku $W = (2, 7)$. Wyznaczymy wartość współczynnika b i współczynnika c .

Rozwiązanie.

- sposób I

Z treści zadania wynika, że funkcję f można zapisać w postaci kanonicznej $f(x) = -3(x - 2)^2 + 7$. Zatem

$$f(x) = -3(x^2 - 4x + 4) + 7 = -3x^2 + 12x - 5,$$

czyli współczynniki mają wartości $b = 12, c = -5$.

- sposób II

Korzystając ze wzorów na współrzędne wierzchołka, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 7 \end{cases}.$$

Uwzględniając w drugim równaniu $\Delta = b^2 - 4ac$ oraz wstawiając $a = -3$, otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{-b}{2 \cdot (-3)} = 2 \\ \frac{-(b^2 - 4 \cdot (-3)c)}{4 \cdot (-3)} = 7 \end{cases},$$

stąd

$$\begin{cases} -b = -12 \\ -(b^2 + 12c) = -84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 12 \\ 12^2 + 12c = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 12 \\ 12c = 84 - 144 \end{cases}$$

Mamy zatem

$$\begin{cases} b = 12 \\ c = -5 \end{cases}.$$

Przykład 7

Funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -5$ i $x_2 = 4$. Wyznamy wartość współczynnika b i współczynnika c .

Rozwiązanie.

- sposób I

Z treści zadania wynika, że funkcję f można zapisać w postaci iloczynowej.

$$f(x) = 2(x + 5)(x - 4).$$

Zatem

$$f(x) = 2(x^2 + 5x - 4x - 20) = 2x^2 + 2x - 40.$$

Współczynniki mają wartości: $b = 2$, $c = -40$.

- sposób II

Ponieważ miejscami zerowymi funkcji f są $x_1 = -5$ i $x_2 = 4$, więc $f(-5) = 0$ oraz $f(4) = 0$. Aby wyznaczyć wartości współczynników, rozwiążemy układ równań.

$$\begin{cases} 2 \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 0 \\ 2 \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32 + 4b + c = 0 \\ 50 - 5b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b + c = -32 \\ -5b + c = -50 \end{cases}$$

Otrzymany układ równań możemy rozwiązać dowolną metodą, np. podstawiania lub przeciwnych współczynników.

Wyberzmy metodę podstawiania

$$\begin{cases} c = -4b - 32 \\ -5b - 4b - 32 = -50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -4b - 32 \\ -9b - 32 = -50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -4b - 32 \\ -9b = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -4b - 32 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ c = -4 \cdot 2 - 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ c = -40 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu

$$\begin{cases} 4b + c = -32 \\ -5b + c = -50 \end{cases}$$

metodą przeciwnych współczynników (lub każdą inną, prowadzącą do wyznaczenia wartości każdego ze współczynników) pozostawiamy jako osobne ćwiczenie.

- sposób III

Ponieważ miejscami zerowymi funkcji f są $x = -5$ oraz $x = 4$, więc osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta $x = \frac{-5+4}{2}$, czyli $x = -\frac{1}{2}$. Możemy więc zapisać postać kanoniczną funkcji

$$f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + q.$$

Wykorzystując jeszcze raz informację o miejscach zerowych, otrzymamy, że np. $f(4) = 0$, stąd

$$2 \cdot \left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$q = -2 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

czyli

$$q = -\frac{81}{2}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{2} = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{81}{2} = \\ &= 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} - \frac{81}{2} = 2x^2 + 2x - 40. \end{aligned}$$

Zatem współczynniki mają wartości $b = 2$, $c = -40$.

Uwaga. Zapisując wzór funkcji f w postaci $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + q$ i wykorzystując informację o drugim miejscu zerowym funkcji f : $f(-5) = 0$, doprowadzimy do tej samej zależności, co otrzymana powyżej $q = -2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)^2 = -2 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2$. Fakt ten wynika stąd, że prosta $x = -\frac{1}{2}$ jest symetralną odcinka o końcach w punktach $(-5, 0)$ i $(4, 0)$.

Przykład 8

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ osiąga największą wartość równą 4 dla $x = -2$, a na jej wykresie leży punkt $A = (0, 0)$. Obliczmy wartości współczynników a , b i c .

Rozwiązanie.

- sposób I

Z treści zadania wynika, że punkt $W = (-2, 4)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f . Wobec tego wzór funkcji f możemy zapisać w postaci

$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$. Wiemy ponadto, że punkt A leży na wykresie funkcji f , zatem $f(0) = 0$. Łącząc oba uzyskane wnioski, otrzymujemy

$$f(0) = a(0 + 2)^2 + 4 = 0,$$

stąd $4a = -4$, czyli $a = -1$. Stąd wynika wzór funkcji f

$$f(x) = -1(x + 2)^2 + 4 = -(x^2 + 4x + 4) + 4 = -x^2 - 4x.$$

Współczynniki mają zatem wartości: $a = -1$, $b = -4$, $c = 0$.

- sposób II

Z treści zadania wynika, że jednym z miejsc zerowych funkcji f jest 0, a osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f jest prosta o równaniu $x = -2$.

Wynika stąd, że -4 jest drugim miejscem zerowym funkcji f . Zatem wzór funkcji f możemy zapisać w postaci $f(x) = ax(x + 4)$. Wiemy ponadto, że punkt $(-2, 4)$ leży na wykresie funkcji f , więc $f(-2) = 4$. Łącząc oba uzyskane wnioski, otrzymujemy

$$f(-2) = a(-2)(-2 + 4) = 4,$$

stąd $-4a = 4$, czyli $a = -1$. Wobec tego wzór funkcji f to

$$f(x) = -1x(x + 4) = -(x^2 + 4x) = -x^2 - 4x.$$

Współczynniki mają więc wartości: $a = -1$, $b = -4$, $c = 0$.

- sposób III

Z treści zadania odczytujemy, że punkt $f(x) = 0$ oraz punkt $W = (-2, 4)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f . Korzystając ze wzorów na współrzędne wierzchołka, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = -2 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 4 \end{cases}.$$

Przekształcamy ten układ, uwzględniając w drugim równaniu $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\begin{cases} c = 0 \\ -b = -4a \\ -(b^2 - 4ac) = 16a \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = 4a \\ b^2 = -16a \end{cases}.$$

Stąd wniosek, że $b^2 = (4a)^2 = -16a$, więc $16a^2 = -16a$, czyli $a^2 + a = 0$, stąd $a(a + 1) = 0$. Ponieważ funkcja f jest kwadratowa, więc $a \neq 0$. Zatem $a = -1$, stąd $b = 4 \cdot (-1) = -4$. Oznacza to, że $a = -1, b = -4, c = 0$.

Ćwiczenie 1



Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x sumę tej liczby i kwadratu liczby o 2 od niej większej. Ustal zbiór wartości tej funkcji i znajdź jej miejsca zerowe. Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie wyrażenia lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Funkcja f dana jest wzorem , stąd . Zbiór wartości tej funkcji to , a jej miejscami zerowymi są liczby i .

-4	f(x) = x^2 - 5x + 2	(-1 1/6, +infinity)	f(x) = x^2 + 5x + 4
f(x) = x + (x + 2)^2	-3	-5	f(x) = x - (x + 2)^4
f(x) = x - (x - 2)^2	(5 1/8, +infinity)	(-2 1/4, +infinity)	-4
f(x) = x^2 + 7x - 6	-1		

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Jakie są współrzędne wierzchołka W paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 5)(x + 7)$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $W = (-3, 9)$

☐ $W = (3, 6)$

☐ $W = (-1, 9)$

☐ $W = (1, 12)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 5x + c$ należy punkt $A = (-3, 0)$.
Uzupełnij zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Wartość współczynnika c wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Prosta $x = -4$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -x^2 + bx$. Jaka będzie wartość współczynnika b ?

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $b = 6$

☐ $b = 4$

☐ $b = -4$

☐ $b = -6$

☐ $b = 8$

☐ $b = -8$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $f(x) = 5x^2 - 10x + c$ jest $\langle -9, +\infty \rangle$. Jaka będzie wartość współczynnika c ? Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Wartość współczynnika c wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$. Wyznacz wartości każdego ze współczynników b oraz c , wiedząc, że wykres funkcji f ma z osią X tylko jeden punkt wspólny $A = (-3, 0)$. Wpisz w luki odpowiednie wartości.

Wartości współczynników wynoszą $b =$ oraz $c =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Funkcja kwadratowa g określona jest wzorem $g(x) = -x^2 + bx + c$. Funkcja ta osiąga wartość największą równą 17 dla $x = -5$. Wyznacz wartości współczynników b i c . Uzupełnij zdanie, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Wartości współczynników wynoszą $b =$ oraz $c =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $g(x) = -15x^2 + bx + c$ są $-\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$. Wyznacz wartości współczynników b oraz c i wpisz je w luki.

Wartość współczynników wynosi $b =$ oraz $c =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = -4x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku $W = (\frac{3}{2}, 8)$. Wyznacz wartości współczynników b i c , a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Wartości współczynników wynoszą $b =$ oraz $c =$.

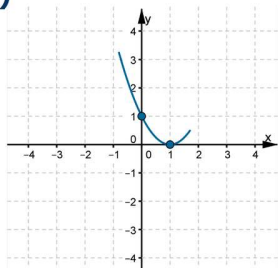
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

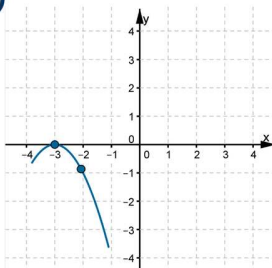


W układzie współrzędnych narysowano część paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c . Następnie połącz w pary ilustracje z odpowiednimi wartościami współczynników.

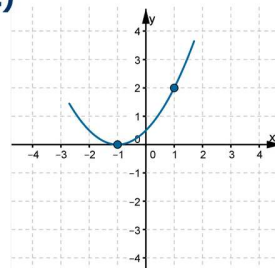
a)



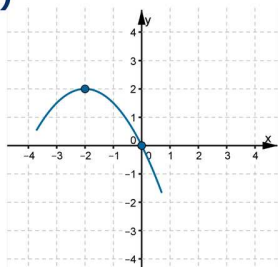
b)



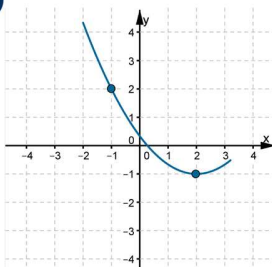
c)



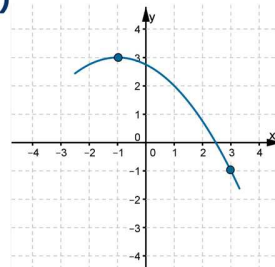
d)



e)



f)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Połącz w pary litery odpowiadające odpowiednim ilustracjom ze współczynnikami, które charakteryzują podane parabole.

a)

$$a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{11}{4}$$

b)

$$a = 1, b = -2, c = 1$$

e)

$$a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}$$

d)

$$a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}, c = \frac{1}{3}$$

f)

$$a = -1, b = -6, c = -9$$

c)

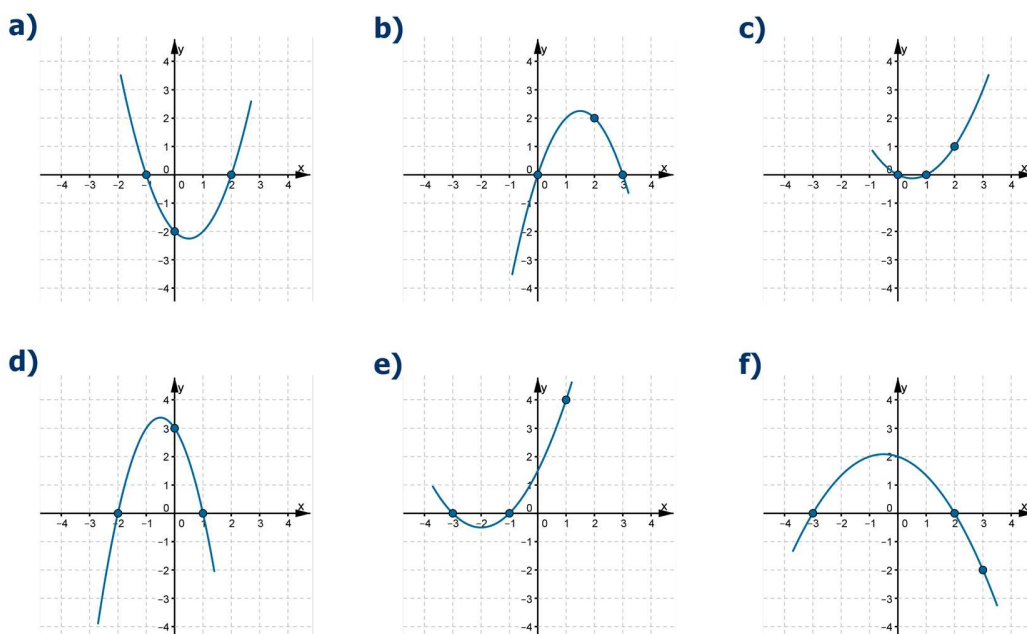
$$a = -\frac{1}{2}, b = -2, c = 0$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



W układzie współrzędnych narysowano część paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej $g(x) = ax^2 + bx + c$. Ustal wartość każdego ze współczynników a , b i c . Następnie połącz w pary ilustracje ze współczynnikami.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Połącz w pary litery odpowiadające odpowiednim ilustracjom ze współczynnikami, które charakteryzują podane parabole.

c)

$$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 0$$

d)

$$a = \frac{1}{2}, b = 2, c = \frac{3}{2}$$

b)

$$a = -1, b = 3, c = 0$$

e)

$$a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}, c = 3$$

a)

$$a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = 2$$

f)

$$a = 1, b = -1, c = -2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Funkcja kwadratowa $g(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -6$ oraz $x_2 = 10$. Najmniejszą wartością tej funkcji jest -16 . Ustal wartość każdego ze współczynników a , b i c . Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = -17$

☐ $a = \frac{1}{5}, b = -3, c = -10$

☐ $a = \frac{3}{4}, b = -2, c = -13$

☐ $a = \frac{1}{4}, b = -1, c = -15$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $A = (1, 9)$. Jednym z punktów przecięcia tej paraboli z osią X jest punkt $B = (-\frac{1}{2}, 0)$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c , następnie zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $a = -4, b = 8, c = 7$

☐ $a = -4, b = 8, c = 5$

☐ $a = -2, b = 6, c = 5$

☐ $a = 4, b = 6, c = 5$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Funkcja kwadratowa $g(x) = ax^2 + bx + c$ osiąga najmniejszą wartość równą -5 dla $x = 3$, a jej wykres przecina oś Y w punkcie $A = (0, -2)$. Oblicz wartość każdego ze współczynników a , b i c , a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Wartości współczynników wynosi $a =$, $b =$ oraz $c =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -\frac{2}{5}$ i $x_2 = 4$, a jej wykres ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = -121$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c , a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Wartości współczynników wynoszą $a =$, $b =$ oraz $c =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Wykresem funkcji kwadratowej $g(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $A = (-3, 5)$, do której należy też punkt $B = (1, -27)$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c , a następnie zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $a = -8, b = -14, c = -11$

☐ $a = -2, b = -12, c = -13$

☐ $a = -6, b = -8, c = -9$

☐ $a = -4, b = -10, c = -15$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Wykresem funkcji kwadratowej $g(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola, na której leżą punkty $A = (-1, 5)$ i $B = (2, -1)$. Oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 1$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c , a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Wartości współczynników wynoszą $a =$, $b =$ oraz $c =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f maleje, jest $\langle -3, +\infty \rangle$. Parabola będąca wykresem funkcji f ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = 1$. Ponadto na wykresie tej funkcji leży punkt $P = (-1, -1)$. Ustal wartość każdego ze współczynników a , b i c , a następnie zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $a = -\frac{1}{4}, b = -3, c = \frac{7}{4}$

☐ $a = -\frac{1}{2}, b = -3, c = -\frac{7}{2}$

☐ $a = -\frac{1}{4}, b = -5, c = -\frac{9}{2}$

☐ $a = -\frac{3}{2}, b = 3, c = -\frac{5}{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Punkty $A = (-3, 5)$ i $B = (-1, 1)$ leżą na paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wykaż, że punkt $C = (1, -3)$ nie leży na tej paraboli.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z osią X . Na tej paraboli leżą punkty $A = (1, -9)$ oraz punkt $B = (-3, -1)$. Wyznacz wartość każdego ze współczynników a , b i c . Rozpatrz wszystkie przypadki, a następnie zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $\begin{cases} a = -4 \\ b = -6 \\ c = -2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -2\frac{1}{2} \\ c = -3\frac{1}{4} \end{cases}$

☐ $\begin{cases} a = -2 \\ b = -8 \\ c = -10 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = -3\frac{1}{1} \\ c = -7\frac{1}{4} \end{cases}$

☐ $\begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -\frac{2}{4} \\ b = -3\frac{1}{2} \\ c = -5\frac{1}{3} \end{cases}$

☐ $\begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -2\frac{1}{2} \\ c = -6\frac{1}{4} \end{cases}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Wyznacz wszystkie wartości b , dla których wierzchołek paraboli, będącej wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2bx + b + 25$, leży na prostej $y = x$. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $b = 4$ lub $b = -4$

☐ $b = 15$ lub $b = -15$

☐ $b = 5$ lub $b = -5$

☐ $b = 3$ lub $b = -3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Wyznacz wszystkie wartości c , dla których miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 - 2cx + c + 2$ jest liczba $x = c$. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $c = -3$ lub $c = 4$

☐ $c = 3$ lub $c = 4$

☐ $c = -1$ lub $c = 2$

☐ $c = 1$ lub $c = 2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.