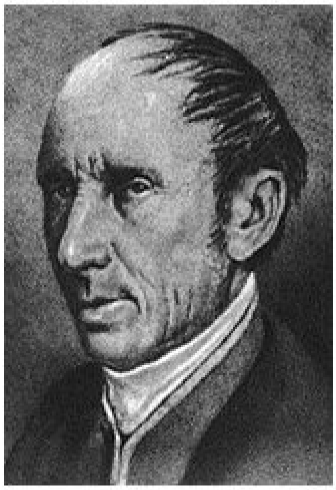
Dowodzenie nierówności

Źródło: Elena Mozhvilo, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Augustin Louis Cauchy, francuski osiemnastowieczny matematyk i fizyk uważał, że dowody twierdzeń powinno się przedstawiać w jak najprostszej postaci. Prostota i precyzja prezentowanych przez Cauchego teorii matematycznych, wywarły wielki wpływ na ówczesnych matematyków. Jego nazwisko pojawiło się na liście 72 nazwisk na wieży Eiffla.

Cauchy doprecyzował między innymi pojęcia związane z granicą i ciągłością funkcji. Udowodnił też nierówności między średnimi, z których będziemy korzystać w tym materiale.



Augustin Louis Cauchy
Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Twoje cele

- Udowodnisz daną nierówność korzystając z zależności między średnimi.
- Zastosujesz nierówności w rozwiązywaniu zadań geometrycznych.
- Zastosujesz wzory skróconego mnożenia w dowodzeniu nierówności.

- Przekształcisz równoważnie daną nierówność.
- Zastosujesz i stworzysz odpowiednią strategię rozwiązując zadania w nietypowych sytuacjach.

Przeczytaj

Dowodzenie nierówności uważane jest za jedną z trudniejszych, ale i ważniejszych umiejętności wymaganych od uczących się w szkole ponadpodstawowej. Najczęściej wykazanie prawdziwości nierówności polega na odpowiednim przekształcaniu nierówności w sposób równoważny.

Przekształcając nierówność równoważnie, możemy:

- dodać do obu stron nierówności (lub odjąć od obu stron nierówności) to samo wyrażenie,
- pomnożyć obie strony nierówności przez tę samą liczbę dodatnią,
- pomnożyć obie strony nierówności przez liczbę ujemną, zmieniając znak nierówności na przeciwny,
- podnieść obie strony nierówności do kwadratu, jeżeli wyrażenia stojące po obu stronach nierówności przyjmują tylko wartości dodatnie.

Aby udowodnić pierwszą nierówność, skorzystamy z zależności między średnią arytmetyczną, a geometryczną.

Definicja: Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$S_a = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

Definicja: Średnia geometryczna

Średnią geometryczną liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Twierdzenie: Zależność między średnią arytmetyczną i geometryczną (nierówność Cauchy’ego)

Dla dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi następująca nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

Przykład 1

Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d prawdziwa jest nierówność

$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}$.

Obie strony nierówności są dodatnie, zatem można podnieść obie strony nierówności do kwadratu. Po lewej stronie nierówności, korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

$ab + cd + 2\sqrt{abcd} \leq (a+c)(b+d)$

Wykonujemy wskazane działania i redukujemy wyrazy podobne.

$ab + cd + 2\sqrt{abcd} \leq ab + ad + cb + cd$

$2\sqrt{abcd} \leq ad + cb$

$\sqrt{abcd} \leq \frac{ad+cb}{2}$

Prawdziwość ostatniej nierówności wynika z zależności między średnią arytmetyczną a geometryczną, co kończy dowód.

Przykład 2

Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$.

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

$\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$

$\sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2}$

Mnożymy obie strony każdej z nierówności przez 2.

$2\sqrt{ab} \leq a + b$

$2\sqrt{bc} \leq b + c$

$2\sqrt{ac} \leq a + c$

Mnożymy obie strony nierówności przez siebie (liczby a, b, c są dodatnie).

$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$

Co należało wykazać.

Teraz pokażemy zastosowanie nierówności między średnią kwadratową a średnią arytmetyczną.

Definicja: Średnia kwadratowa

Średnią kwadratową liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$S_k = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

Twierdzenie: Zależność między średnią arytmetyczną a średnią kwadratową

Dla dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi następująca nierówność

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

Przykład 3

Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c takich, że $a+b+c=1$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}.$$

Skorzystamy z zależności, która wynika z nierówności między średnią arytmetyczną, a średnią kwadratową.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \leq n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)$$

Otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\right)^2 \leq$$

$$\leq 3\left[\left(\sqrt{2a+1}\right)^2+\left(\sqrt{2b+1}\right)^2+\left(\sqrt{2c+1}\right)^2\right]$$

$$\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\right)^2 \leq 3(2a+1+2b+1+2c+1)$$

$$\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\right)^2 \leq 3[2(a+b+c)+3]$$

$$\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\right)^2 \leq 3(2\cdot 1+3)$$

$$\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\right)^2 \leq 15$$

Pierwiastkujemy obie strony nierówności.

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}$$

Co należało wykazać.

Okazuje się, że wiele trudnych zadań, nawet geometrycznych, można rozwiązać korzystając z nierówności.

Przykład 4

Wśród prostokątów o przekątnej długości 20 wskaż ten, który ma największe pole.

Oznaczmy długości boków prostokąta a, b.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, możemy zapisać:

$a^2 + b^2 = 400$

Pole prostokąta:

$P = ab = \sqrt{a^2 \cdot b^2}$

$P = \sqrt{a^2 \cdot b^2} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{400}{2} = 200$

Przy czym równość zachodzi, gdy $a^2 = b^2$, czyli gdy $a = b$.

Zatem największe pole ma kwadrat o boku $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

Definicja: Średnia harmoniczna

Średnią harmoniczną liczb różnych od zera $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$S_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

Twierdzenie: Zależność między średnią arytmetyczną a średnią harmoniczną

Dla liczb różnych od zera $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi następująca nierówność

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

Korzystając z tej nierówności, rozwiążemy następne zadanie.

Przykład 5

Oporniki R_1, R_2, R_3 połączone są równolegle. Łączny opór tych oporników jest równy $27\ \Omega$. Jaki powinien być opór każdego z oporników, aby opór zastępczy R był największy?

Korzystamy ze wzoru

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

Przekształcamy zapisaną równość.

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_n}}$$

$$R = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_n}}$$

Korzystamy teraz z zależności między średnią arytmetyczną a średnią harmoniczną

$$R \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{R_1+R_2+R_3}{3} = \frac{27}{9} = 3$$

Zauważmy, że równość zachodzi, gdy

$$R_1 + R_2 + R_3 = 3$$

Zatem największy opór zastępczy otrzymamy, gdy każdy z oporników będzie miał opór równy 1 Ω.

Słownik

średnia geometryczna

średnią geometryczną liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

średnia kwadratowa

średnią kwadratową liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$S_k = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

średnia harmoniczna

średnią harmoniczną liczb różnych od zera $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$S_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją i z przykładami dowodzenia nierówności, bez wykorzystania zależności między średnimi. Spróbuj najpierw samodzielnie wykonać zaprezentowane w animacji zadania, a następnie porównaj rozwiązania.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DE0WhhOOt

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej przekształcanie wyrażeń algebraicznych.

Polecenie 2

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność

$$2x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 \geq 0.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dane są liczby rzeczywiste a, b takie, że ich suma jest liczbą dodatnią. Zaznacz nierówność prawdziwą.

- $ab > 0$
- $ab < (a+1)(b+1)$
- $ab < 0$
- $-a^2b < 0$

Ćwiczenie 2

Zaznacz poprawną odpowiedź. Jeżeli liczby dodatnie a, b spełniają warunek $1 = a + b$ to:

- $a > \frac{1}{b}$
- $\sqrt{a} < 1 - \sqrt{b}$
- $a^2 + b^2 < 1$
- $a^2 - b^2 > 1$

Ćwiczenie 3

Liczby a, b są dodatnie i mniejsze od 1. Uzupełnij dowód nierówności
$(a+b)(1+ab) < (1+ab)^2$.
Przeciągnij odpowiednie wyrażenia.

$(a+b)(1+ab) < (1+ab)^2 \mid :$ ______

$a+b-1-$ ______ < 0

$(a-1)+$ ______ < 0

$(a-1)+b\cdot$ ______ < 0

$-$ ______ $+b(1-a) < 0$

$(1-a)\cdot$ ______ > 0

$(1-a)(1-b) > 0$ – nierówność prawdziwa, bo $a < 1$ i $b < 1$

$(1-b)$ $(b-ab)$ $(1-a)$ $(1-a)$ $(1+ab)$ ab

Ćwiczenie 4

Liczby a, b, c są dodatnie. Uzupełnij nierówność, wpisując najmniejszą liczbę naturalną, dla której nierówność jest prawdziwa.

$(a+b+c)^2 \leq$ ______ $\cdot(a^2+b^2+c^2)$

Ćwiczenie 5

Zaznacz wszystkie nierówności prawdziwe (liczby a, b są dodatnie).

- [ ] $a^3+b^3 \leq a^2b+ab^2$
- [ ] $2\sqrt{ab} \leq a+b$
- [ ] $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$
- [ ] $a^4+b^4 \geq a^3b+ab^3$

Ćwiczenie 6

Liczby a, b, c są nieujemne. Przeciągnij odpowiedni znak taki, aby nierówność była prawdziwa.

$a + b + c \boxed{} \sqrt[3]{a^2 \cdot b} + \sqrt[3]{b^2 \cdot c} + \sqrt[3]{c^2 \cdot a}$

$\leq$ $\geq$

Ćwiczenie 7

Liczby a, b, c to długości krawędzi prostopadłościanu, którego przekątna jest równa d. Wykaż, że $a + b + c \leq d\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 8

Wykaż, że jeżeli a, b są takimi liczbami dodatnimi, że

$ab \geq a + b$ to $a + b - 4 \geq 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dowodzenie nierówności

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n;

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- udowadnia daną nierówność korzystając z zależności między średnimi
- korzysta z własności nierówności w zadaniach optymalizacyjnych
- stosuje wzory skróconego mnożenia w dowodzeniu nierówności
- przekształca równoważnie daną nierówność
- stosuje i stwarza odpowiednią strategię rozwiązując zadania w nietypowych sytuacjach

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- tak – nie
- praca z tekstem

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą tak – nie przypominają wiadomości dotyczące wzorów skróconego mnożenia i metod równoważnego przekształcania nierówności. Kolejno uczniowie podają przydatne informacje (mogą przy tym zapisywać konkretne przykłady na tablicy). Pozostali uczniowie mówią TAK, jeśli informacja jest prawdziwa i będzie przydatna. Jeśli uważają, że informacja nie będzie przydatna lub jest nieprawdziwa – mówią NIE. W przypadku zauważonych błędów, poprawiają je lub proszą o pomoc nauczyciela.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w 3 grupach. Każda grupa analizuje przydzielony jej materiał z sekcji „Przeczytaj”. Grupa 1 – Przykład 1 i 2, grupa 2 – Przykład 3 i 4, grupa 3 – Przykład 5. Zadaniem każdej grupy jest przygotowanie opracowywanego przez siebie materiału tak, aby zaprezentować go pozostałym grupom w przystępnej formie (ze szczególnym zwróceniem uwagi na zależności między średnimi). Nauczyciel ewentualnie wyjaśnia wątpliwości i sugeruje na co należy szczególnie zwrócić uwagę.
2. Po upływie wyznaczonego czasu, grupy przedstawiają na forum klasy problemy, nad którymi pracowali.
3. Uczniowie w parach zapoznają się z animacją i rozwiązują zadanie z Polecenia 2.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.

Liderzy grup dzielą się spostrzeżeniami na temat pracy swoich grup – ciekawych pomysłów, trudności.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Ciekawe średnie

Wskazówki metodyczne:

Animację można zastosować w czasie zajęć pokazujących sposoby przekształcania nierówności w sposób równoważny lub w czasie zajęć pokazujących zastosowanie średnich i zależności między średnimi.