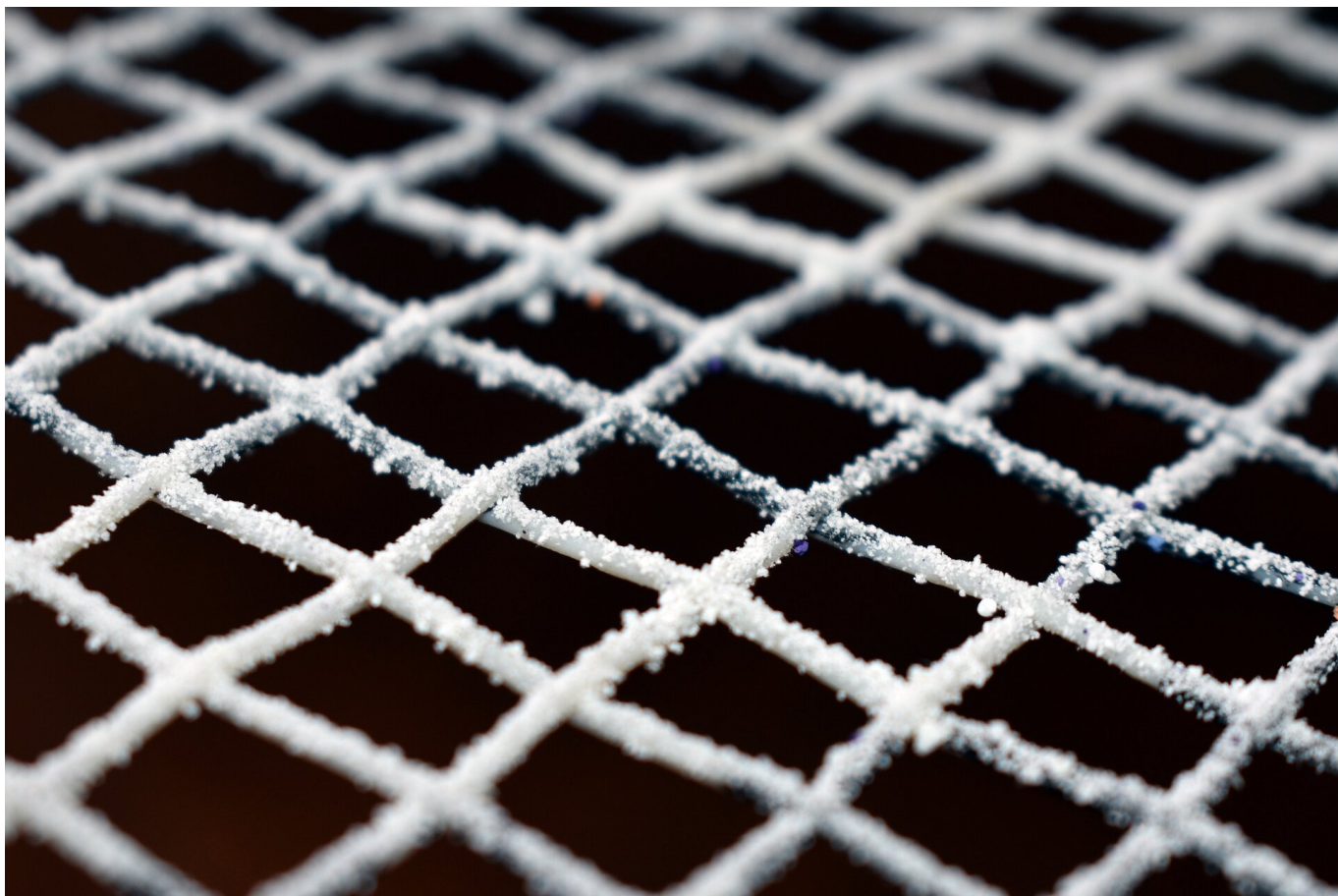




Rozwiązywanie nierówności wielomianowych za pomocą "siatki znaków"

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie nierówności wielomianowych za pomocą "siatki znaków"

Źródło: dostępny w internecie: maxpixel.net, domena publiczna.

W tym materiale pokażemy sposób rozwiązywania nierówności wielomianowej metodą „siatki znaków”. Metodę tę stosujemy wtedy, gdy nierówność wielomianowa zapisana jest w postaci iloczynowej. Przez analizę tabeli zwanej „siatką znaków” będziemy rozpoznawać, dla jakich x wielomian zmiennej x przyjmuje wartości dodatnie, nieujemne, ujemne lub niedodatnie.

Twoje cele

- Ustalisz znak wielomianu w danym przedziale.
- Rozwiążesz nierówność wielomianową metodą „siatki znaków”.

Przeczytaj

Definicja: Nierówność wielomianowa

Nierównością wielomianową stopnia n nazywamy każdą z nierówności w postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n .

Aby rozwiązać **nierówność wielomianową**, postępujemy podobnie, jak podczas rozwiązywania równań. Najpierw rozłożymy wielomian W na czynniki i obliczymy jego pierwiastki.

Następnie należy odpowiedzieć na pytanie, dla jakich wartości x wielomian przyjmuje wartości dodatnie lub nieujemne, lub ujemne, lub niedodatnie. W tym celu sporządzamy „siatkę znaków”, czyli tabelę, za pomocą której określamy znak wielomianu w każdym z przedziałów.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $(x + 1)(x + 2)(x - 3) > 0$.

Lewa strona nierówności jest wielomianem zapisanym w postaci iloczynowej:

$$W(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$$

Wielomian posiada trzy pierwiastki $(-2), (-1), 3$.

Teraz narysujemy tabelę, zwaną „siatką znaków”. W pierwszej kolumnie zapisujemy czynniki wielomianu. W pierwszym wierszu zapisujemy przedziały liczbowe, które zostały wyznaczone przez pierwiastki $(-2), (-1), 3$ wielomianu.

W kolumnach znajdujących się pod przedziałami zapisujemy znaki przyjmowane w poszczególnych przedziałach przez odpowiednie sumy algebraiczne. Między przedziałami umieszczamy miejsca zerowe wielomianu. Ostatni wiersz tabeli to znaki wielomianu.

wielomian	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, \infty)$
$x + 1$	–	–	–	0	+	+	+
$x + 2$	–	0	+	+	+	+	+
$x - 3$	–	–	–	–	–	0	+

wielomian	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, \infty)$
$W(x)$	—	0	+	0	—	0	+

Z tabeli odczytujemy, że $W(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1) \cup (3, \infty)$.

Zbiór rozwiązań nierówności to $(-2, -1) \cup (3, \infty)$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $(x + 4)(x - 1)^2 \leq 0$.

Lewa strona nierówności jest wielomianem $W(x) = (x + 4)(x - 1)^2$, zapisanym w postaci iloczynowej. Liczba (-4) jest pojedynczym pierwiastkiem wielomianu, liczba 1 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Ułożymy „siatkę znaków”.

wielomian	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 1)$	1	$(1, \infty)$
$x + 4$	—	0	+	+	+
$(x - 1)^2$	+	+	+	0	+
$W(x)$	—	0	+	0	+

Zwróćmy uwagę, że przy przejściu przez pierwiastek podwójny 1 wartość wielomianu $W(x)$ nie zmienia znaku.

$W(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup \{1\}$.

Zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty, -4] \cup \{1\}$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $-x(x - 3)^2(x + 5)^3 < 0 \mid : (-1)$

$x(x - 3)^2(x + 5)^3 > 0$

Miejsca zerowe wielomianu to liczby:

0 – pierwiastek pojedynczy

3 – pierwiastek podwójny

(-5) – pierwiastek potrójny

Rysujemy „siatkę znaków”.

wielomian	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, \infty)$
x	—	—	—	0	+	+	+

wielomian	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, \infty)$
$(x-3)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$(x+5)^3$	-	0	+	+	+	+	+
$W(x)$	+	0	-	0	+	0	+

Zwróćmy uwagę, że przy przejściu przez potrójny pierwiastek (-5) , $W(x)$ zmienia znak tak samo, jak przy przejściu przez pojedynczy pierwiastek.

$$W(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty, -5) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $x^4 - 5x^3 + 6x^2 \leq 0$.

Najpierw zapiszemy nierówność w postaci iloczynowej.

$$x^2(x^2 - 5x + 6) \leq 0$$

$$x^2(x-2)(x-3) \leq 0$$

$$W(x) = x^2(x-2)(x-3)$$

Miejsca zerowe $W(x)$ to 0, 2, 3.

wielomian	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, \infty)$
x^2	+	0	+	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$W(x)$	+	0	+	0	-	0	+

$$W(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \langle 2, 3 \rangle \cup \{0\}$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $\langle 2, 3 \rangle \cup \{0\}$.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność $(x^4 + 1)(x + 2) \geq 0$.

Jedynym miejscem zerowym wielomianu $W(x) = (x^4 + 1)(x + 2)$ jest liczba (-2) .

wielomian	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, \infty)$
$x^4 + 1$	+	+	+

wielomian	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, \infty)$
$x + 2$	$-$	0	$+$
$W(x)$	$-$	0	$+$

Zauważmy, że suma algebraiczna $(x^4 + 1)$ przyjmuje zawsze wartości dodatnie, więc nie wpływa na rozwiązanie.

$$W(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -2, \infty \rangle$$

Zbiór rozwiązań nierówności $\langle -2, \infty \rangle$.

Słownik

nierówność wielomianowa

każda z nierówności w postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n

siatka znaków

tabela, za pomocą której określamy znak wielomianu w poszczególnych przedziałach

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przykład, a następnie sprawdź poprawność, analizując poszczególne etapy rozwiązania nierówności wielomianowych metodą „siatki znaków”.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyrIH2vkG>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej rozwiązywania nierówności wielomianowych za pomocą "siatki znaków".

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rozwiąż nierówność $(x + 1)(x + 2)(x + 3) \geq 0$ metodą "siatki znaków" i zaznacz zbiór rozwiązań nierówności.

☐ $(-\infty, -3) \cup \langle -2, -1 \rangle$

☐ $\langle -3, -2 \rangle \cup \langle -1, \infty \rangle$

☐ $(-3, -2) \cup (-1, \infty)$

☐ $(-\infty, -3) \cup (-2, -1)$

Ćwiczenie 2



Rozwiąż nierówność metodą "siatki znaków". Połącz nierówność z odpowiednim zbiorem rozwiązań.

$-(x + 1)(x - 1)(x + 2)^2 > 0$

$(-2, -1)$

$(x + 1)(x - 1)^2(x + 2) < 0$

$(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

$-(x + 1)^2(x - 1)(x + 2) > 0$

$(-2, -1) \cup (-1, 1)$

$(x + 1)^2(x - 1)(x + 2) > 0$

$(-1, 1)$

Ćwiczenie 3



Rozwiąż nierówność $(x + 3)(x - 2)^2 \leq 0$ metodą "siatki znaków". Wybierz największą liczbę naturalną, która spełnia tę nierówność.

☐ 2

☐ -3

☐ 3

☐ -2

Ćwiczenie 4



Dana jest nierówność $(x - 3)^2(x + 5) \leq 0$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Do zbioru rozwiązań nierówności należy liczba 5.

☐ Zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty, -5) \cup \{3\}$.

☐ Największą liczbą naturalną spełniającą nierówność jest liczba 3.

☐ Zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty, -5)$.

☐ Do zbioru rozwiązań nierówności należy jedna liczba naturalna.

Ćwiczenie 5



Dana jest siatka znaków nierówności, której zbiorem rozwiązań jest $(-\infty, -3) \cup (-2, 2)$.

wielomian	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, \infty)$
$x - 2$	—	—	—	—	—	0	+
$x + 2$	—	—	—	0	+	+	+
$x + 3$	—	0	+	+	+	+	+
$W(x)$	—	0	+	0	—	0	+

Uzupełnij brakujące miejsca. Nierówność to:

$$\boxed{} \cdot (x^2 + 5x + 6) \boxed{} 0$$

$$\boxed{<} \quad \boxed{\geq} \quad \boxed{(x+3)} \quad \boxed{>} \quad \boxed{(x+2)} \quad \boxed{(x-2)} \quad \boxed{\leq}$$

Ćwiczenie 6



Rozwiąż nierówność $x^3 - 16x > 0$ metodą "siatki znaków". Uzupełnij brakującą kolumnę, wpisując "+", "-" lub "0".

	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, \infty)$
x	-			0	+		+
$x - 4$	-				-	0	+
$x + 4$	-	0			+		+
$W(x)$	-	0		0	-	0	+

Ćwiczenie 7



Rozwiąż nierówność $x^3 + x^2 - 9x - 9 \leq 0$ za pomocą „siatki znaków”.

Ćwiczenie 8



Zbiorem rozwiązań nierówności $(x - p)^2(x - q)^3 > 0$ jest $(-5, \infty) \setminus \{3\}$. Oblicz p i q .
Wpisz poprawne liczby.

$p =$

$q =$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie nierówności wielomianowych metodą „siatki znaków”

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Zakres rozszerzony.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- ustala znak wielomianu w danym przedziale
- rozwiązuje nierówność wielomianową metodą „siatki znaków”
- tworzy algorytmy rozwiązywania nierówności wielomianowych różnych typów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie przypominają definicję nierówności wielomianowej i sposoby wyznaczania zbioru rozwiązań nierówności.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują wyniki. Tworzą wspólny plakat ilustrujący sposoby rozwiązania zadań.
3. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobów wyznaczania zbioru rozwiązań nierówności wielomianowej.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie, którym nie udało się rozwiązać zadań interaktywnych rozwiązują zadania w domu.

Materiały pomocnicze:

[Równania i nierówności liczbowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może posłużyć uczniom jako przygotowanie przed sprawdzianem.