



Własności prawdopodobieństwa warunkowego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Własności prawdopodobieństwa warunkowego

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Przyjmijmy, że Ziemia ma kształt kuli. Na Ziemię spadł meteoryt. Co jest bardziej prawdopodobne – znalezienie meteorytu gdy znamy szerokość geograficzną punktu w którym się znajduje, czy gdy znamy długość geograficzną tego punktu?

Ten klasyczny problem, zwany paradoksem Borela, od nazwiska jego twórcy – dziewiętnastowiecznego matematyka francuskiego E. Borela, związany jest z obliczaniem prawdopodobieństwa warunkowego zdarzenia losowego.

W tym materiale poznasz kilka własności takiego prawdopodobieństwa. Po zapoznaniu się z nimi na pewno bez trudu odpowiesz na pytanie zadane przez Borela.



Poszukiwanie meteorytów na pustyni
Pustynia Dhofar w Omanie

Źródło: Marek Woźniak, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

Twoje cele

- Obliczysz prawdopodobieństwo warunkowe danego zdarzenia losowego.
- Zastosujesz wzór na prawdopodobieństwo warunkowe w sytuacjach praktycznych.
- Uzasadnisz proste zależności probabilistyczne.

Przeczytaj

Każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ możemy przyporządkować liczbę $P(A/B)$ (przy ustalonym zdarzeniu B takim, że $P(B) > 0$). Liczbę tę nazywamy prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A , pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B .

Definicja: Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ oraz niech $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A , pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , nazywamy liczbę

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego wynika, że $P(B) > 0$. Ponieważ dla każdego zdarzenia elementarnego $\omega \in \Omega$ mamy $\omega \in A \cap B$ lub $\omega \in (A \cap B)^c$, więc $P(A \cap B) \geq 0$, więc $P(A/B) \geq 0$.

Zauważmy też, że z warunku $P(B) > 0$ i $P(A \cap B) \leq P(B)$ wynika, że $P(A/B) \leq 1$. Wykazaliśmy zatem, że jeśli $P(B) > 0$ to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ spełniona jest nierówność podwójna $0 \leq P(A/B) \leq 1$.

W ten sposób wykazaliśmy jedną z własności prawdopodobieństwa warunkowego. Tę i inne własności zawieramy w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie: Własności prawdopodobieństwa warunkowego

Niech Ω będzie dowolną przestrzenią zdarzeń elementarnych oraz niech $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$ i $P(C) > 0$. Wtedy:

- $P(\emptyset/C) = 0$
- $P(\Omega/C) = 1$
- $0 \leq P(A/C) \leq 1$
- jeśli $A \subset B$ to $P(A/C) \leq P(B/C)$
- $P(A'/C) = 1 - P(A/C)$
- $P(A/C) = 1 - P(A'/C)$
- jeśli $A \cap B = \emptyset$ to $P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C)$
- $P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$

Zastosowanie tych własności pokażemy, rozwiązując problemy zawarte w poniższych przykładach.

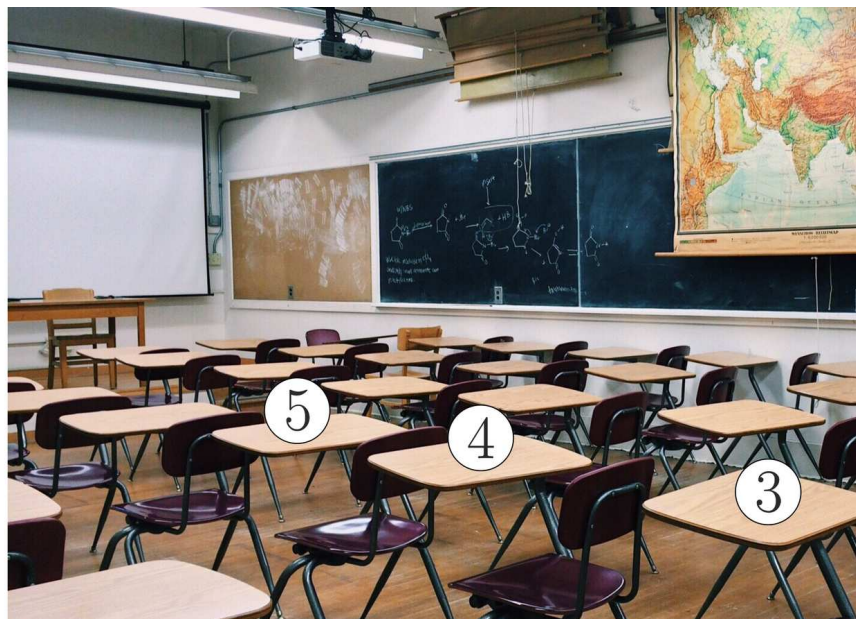
Przykład 1

W jednym rzędzie stoi dziesięć stolików. Każdy z dziesięciu maturzystów losuje numer stolika. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Grażyna i Ewa nie będą siedziały obok siebie, gdy wiemy, że Ewa wylosowała stolik numer cztery.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że Grażyna i Ewa nie będą siedziały obok siebie,

B – zdarzenie polegające na tym, że Ewa wylosowała stolik numer cztery.



Obliczymy najpierw $P(A'/B)$.

Zdarzeniu $A' \cap B$ sprzyjają losowania, w wyniku których Ewa i Grażyna wylosują sąsiednie stoliki.

Zatem Ewa usiądzie przy stoliku numer cztery, a Grażyna przy stoliku numer trzy lub pięć.

Pozostałe osiem osób może usiąść w dowolny sposób na ośmiu pozostałych miejscach.

$$|A' \cap B| = 2 \cdot 8!$$

Zdarzeniu B sprzyjają wszystkie permutacje zbioru dziewięcioelementowego (dziewięciu uczniów zajmuje w dowolny sposób 9 miejsc różnych od miejsca oznaczonego numerem 4 – bo tam już usiądzie Ewa).

$$|B| = 9!$$

Stąd

$$P(A'/B) = \frac{2 \cdot 8!}{9!} = \frac{2}{9}$$

Korzystając z **własności prawdopodobieństwa warunkowego**, zapisujemy:

$$P(A/B) = 1 - P(A'/B)$$

$$P(A/B) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że Ewa i Grażyna nie będą siedziały obok siebie jest równe $\frac{7}{9}$.

Przykład 2

Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$.

Wykażemy, że jeśli $P(B) > 0$ to $P(A/B) \geq 1 - \frac{P(A')}{P(B)}$.

Ponieważ $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$ i $P(A' \cap B) \leq P(A')$, więc

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A' \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = 1 - \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} \geq 1 - \frac{P(A')}{P(B)}.$$

Przykład 3

Rzucamy cztery razy monetą. Obliczymy prawdopodobieństwo uzyskania dodatniej, parzystej liczby reszek jeżeli wiadomo, że za drugim razem wyrzucono orła.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby reszek,

B – zdarzenie polegające na tym, że w drugim rzucie wypadł orzeł.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych obliczymy jako liczbę czterowyrzutowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego.

$$|\Omega| = 2^4 = 16$$

Zdarzeniu A sprzyja siedem zdarzeń:

$$A = \{(RRRR), (RROO), (RORO), (ROOR), (OORR), (OROR), (ORRO)\}$$

Zdarzeniu B sprzyja osiem zdarzeń elementarnych:

$$B = \{(RORR), (\textcolor{blue}{RORO}), (\textcolor{blue}{ROOR}), (OORO), (ROOO), (\textcolor{blue}{OORR}), (OOOR), (OOOO)\}$$

Zatem

$$A \cap B = \{(RORO), (ROOR), (OORR)\}$$

Obliczamy prawdopodobieństwo uzyskania parzystej liczby reszek, pod warunkiem że za drugim razem wyrzucono orła.

$$P(A/B) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{3}{8}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo uzyskania parzystej liczby reszek, pod warunkiem że za drugim razem wyrzucono orła jest równe $\frac{3}{8}$.

Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe wynika poniższy wniosek.

Wniosek:

Niech Ω będzie dowolną przestrzenią zdarzeń elementarnych oraz niech $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. Wtedy:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Przykład 4

Z urny, w której znajduje się 8 kul niebieskich i 2 czarne losujemy po kolei dwie kule bez zwracania. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kule w kolejności: czarna, niebieska.

Oznaczmy:

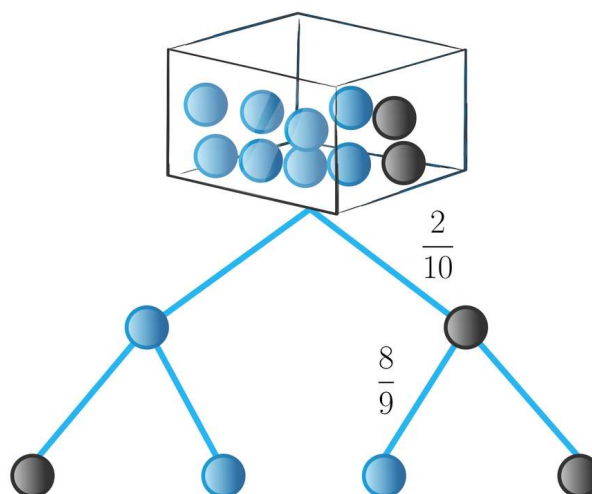
C – zdarzenie polegające na tym, że za pierwszym razem wylosowano kulę czarną,

N – zdarzenie polegające na tym, że za drugim razem wylosowano kulę niebieską.

Należy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $C \cap N$.

Początkowo w urnie było 10 kul, w tym 2 czarne. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej było równe $\frac{2}{10}$. Gdy wylosowano jedną kulę – zostało tylko 9 kul, w tym 8 niebieskich. Wtedy prawdopodobieństwo wylosowania z urny kuli niebieskiej było równe $\frac{8}{9}$.

Przedstawimy graficznie sytuację opisaną w zadaniu.



Korzystamy z poznanego wzoru:

$$P(C \cap N) = P(C) \cdot P(N/C)$$

$$P(C \cap N) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{45}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kule w kolejności: czarna, niebieska jest równe $\frac{8}{45}$.

Przykład 5

Z talii 52 kart losujemy kolejno trzy karty. Obliczymy, prawdopodobieństwo tego, że każda karta będzie w innym kolorze.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że druga karta jest innego koloru niż pierwsza,

B – zdarzenie polegające na tym, że trzecia wylosowana karta jest w innym kolorze niż pierwsza i druga.

Pierwszą kartę wylosowaliśmy spośród 52, ale drugą już spośród 51. Jednak możliwości wyboru, aby nie była tego samego koloru co pierwsza jest $3 \cdot 13 = 39$.

$$P(A) = \frac{39}{51} = \frac{13}{17}$$

Trzecią kartę losujemy spośród $52 - 2 = 50$ pozostałych kart. Dwa kolory kart są już „zajęte” zatem na wylosowanie karty w innym kolorze niż karta pierwsza oraz druga pozostaje $2 \cdot 13 = 26$ możliwości.

$$P(B/A) = \frac{26}{50}$$

Obliczamy prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = \frac{13}{17} \cdot \frac{26}{50} = \frac{338}{850} = \frac{169}{425}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że każda karta będzie w innym kolorze jest równe $\frac{169}{425}$.

Słownik

własności prawdopodobieństwa warunkowego

niech Ω będzie dowolną przestrzenią zdarzeń elementarnych oraz niech $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$ i $P(C) > 0$; wtedy:

- $P(\emptyset/C) = 0$
- $P(\Omega/C) = 1$
- $0 \leq P(A/C) \leq 1$
- jeśli $A \subset B$ to $P(A/C) \leq P(B/C)$
- $P(A'/C) = 1 - P(A/C)$
- $P(A/C) = 1 - P(A'/C)$
- jeśli $A \cap B = \emptyset$ to $P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C)$
- $P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, która przybliży Ci zagadnienia związane z własnościami prawdopodobieństwa warunkowego. Postaraj się najpierw samodzielnie rozwiązać prezentowane tam problemy, a następnie porównaj z zamieszczonymi w animacji.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dd0apxif>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej własności prawdopodobieństwa warunkowego.

Polecenie 2

W urnie znajdują się dwie kule żółte i dwie kule czerwone. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane kule będą żółte.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



W pewnej grupie 100 osób 35 osób ma zielone oczy, a 60 osób ma rude włosy. Aż 25 osób ma zielone oczy i rude włosy. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania z tej grupy osoby posiadającej zielone oczy, jeżeli wiemy, że wylosowana osoba ma rude włosy?

☐ $\frac{7}{12}$

☐ $\frac{1}{4}$

☐ $\frac{5}{7}$

☐ $\frac{5}{12}$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Prawdopodobieństwo tego, że suma uzyskanych oczek będzie równa 9, jeżeli wiadomo, że za pierwszym razem wyrzucono pięć oczek, jest równe:

☐ $\frac{4}{5}$

☐ $\frac{2}{3}$

☐ $\frac{1}{6}$

☐ $\frac{1}{9}$

Ćwiczenie 3



Niech Ω będzie dowolną przestrzenią zdarzeń elementarnych oraz niech $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$ i $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, $P(C) > 0$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ $P(C/A) = 1 - P(C'/A')$

☐ $P(A/B) = P(A) - P(B)$

☐ $\frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1$

☐ $P(A \cap B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cup B/C)$

Ćwiczenie 4



W wytwórni płytek chodnikowych 4% wyrobów ma braki. Na sto dobrych płytek 88 jest w pierwszym gatunku. Chcemy znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia: losowo wybrana płytka wyprodukowana w tej wytwórni jest w pierwszym gatunku.

Oznaczmy:

A - wybrana płytka nie ma braków,

B - wybrana płytka jest w pierwszym gatunku.

Połącz w pary wielkości i ich wartości, które pozwolą na wyznaczenie szukanego prawdopodobieństwa.

$P(A)$

$\frac{528}{625}$

$P(B/A)$

0,96

$P(A \cap B)$

0,88

Ćwiczenie 5



W pudełku znajduje się 15 żarówek w tym trzy wadliwe. Z pudełka wyjmujemy w sposób losowy kolejno dwie żarówki. Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wyjętych żarówek jest dobra, a druga wadliwa.

Uzupełnij rozwiązanie zadania – przeciągnij odpowiednie wyrażenia lub liczby.

Oznaczmy:

A – pierwsza z wyciągniętych żarówek jest dobra,

B – druga z wylosowanych żarówek jest wadliwa.

Obliczymy:

Skorzystamy ze wzoru:

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot$$

Wiadomo, że:

$$P(A) =$$

$$P(B/A) =$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe:

$$P(B \cap A) =$$

$P(B/A)$

$\frac{3}{14}$

$P(B \cap A)$

$\frac{6}{35}$

$\frac{12}{15}$

Ćwiczenie 6



W pewnej loterii 25% losów to losy przegrywające, a 20% losów to losy uprawniające do otrzymania najnowszego smartfona. Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na wylosowaniu losu wygrywającego, a przez B losu uprawniającego do otrzymania smartfona. Uzupełnij obliczenia, prowadzące do wyznaczenia prawdopodobieństwa wylosowania losu uprawniającego do otrzymania smartfona.

Przeciągnij odpowiednie ułamki zwykłe nieskracalne w poprawne miejsca.

$$P(A) = 1 - P(A') = \boxed{}$$

$$P(B/A) = \boxed{}$$

$$P(A \cap B) = \boxed{}$$

$\frac{3}{5}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{2}{5}$

$\frac{3}{20}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{5}{20}$

$\frac{1}{20}$

$\frac{3}{4}$

Ćwiczenie 7



W urnie znajduje się 10 kul białych, 8 czarnych, 6 zielonych.

Losujemy kolejno trzy kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania za pierwszym razem kuli białej, za drugim czarnej i za trzecim zielonej.

Ćwiczenie 8



Niech Ω będzie dowolną przestrzenią zdarzeń elementarnych oraz niech $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. Wykaż, że $P(A/B) = \frac{1 - P(A' \cup B')}{P(B)}$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności prawdopodobieństwa warunkowego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa prawdopodobieństwo warunkowe zajścia danego zdarzenia
- stosuje wzór na prawdopodobieństwo warunkowe w sytuacjach z kontekstem realistycznym
- uzasadnia proste zależności probabilistyczne
- dobiera i tworzy modele matematyczne podczas rozwiązywania problemów praktycznych i teoretycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- technika *CPM*
- technika obserwacji migawkowych

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Uczniowie przypominają wiadomości związane z prawdopodobieństwem warunkowym – mogą zrobić to graficznie, np. sporządzając odpowiednią mapę myśli lub ustnie.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach techniką *CPM*. Ich zadaniem jest zaplanowanie działań związanych z ustalaniem własności prawdopodobieństwa warunkowego.
2. Warto, aby uczniowie uwzględnili w swoich planach czas na samodzielne dochodzenie do wiedzy, a dopiero później zapoznanie się z materiałem z sekcji „Przeczytaj”.
3. Po ustaleniu i udowodnieniu podstawowych własności prawdopodobieństwa warunkowego, zapoznaniu się z animacją, uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Każda z grup techniką obserwacji migawkowych rejestruje najważniejsze elementy pracy grupy, zwracając szczególną uwagę na sposób komunikowania się i strategie wykorzystywane do rozwiązywania problemów.
Liderzy grup dzielą się refleksjami na temat metod wykorzystywanych przez grupy do znalezienia własności prawdopodobieństwa warunkowego, organizacji pracy, jej intensywności i ukształtowanych umiejętności.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest poszukane w dostępnych źródłach informacji ciekawych paradoksów rachunku prawdopodobieństwa i przygotowanie krótkich prezentacji przybliżających te paradoksy.

Materiały pomocnicze:

[Klasyczna definicja prawdopodobieństwa \(treść rozszerzona\)](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana również w czasie zajęć wprowadzających pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego.