Objętość ostrosłupa czworokątnego

Objętość ostrosłupa czworokątnego

Źródło: Andrew Jacobs, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Ostrosłup czworokątny to jeden z częściej spotykanych, zarówno w zadaniach jak i otaczającym nas świecie, ostrosłupów.

Źródło: Autor: Bazie, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

W tym materiale dowiesz się, jak obliczyć objętość ostrosłupa czworokątnego.

Twoje cele

- Poznasz wzór na objętość ostrosłupa czworokątnego.
- Obliczysz objętość ostrosłupa czworokątnego.
- Wykorzystasz trygonometrię w zadaniach.

Przeczytaj

Przypomnijmy podstawowe definicje i własności ostrosłupów.

Ostrosłup czworokątny to ostrosłup, który ma w podstawie czworokąt. Ostrosłup czworokątny prosty to ostrosłup czworokątny, w którym spodek wysokości pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa. Ostrosłup prawidłowy czworokątny to ostrosłup prosty, którego podstawą jest kwadrat. Możemy podać również równoważną definicję ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, nie odwołując się do pojęcia ostrosłupa prostego: „ostrosłup prawidłowy czworokątny to ostrosłup, w którego podstawie jest kwadrat, a wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi”.

Wzór na objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H,$$

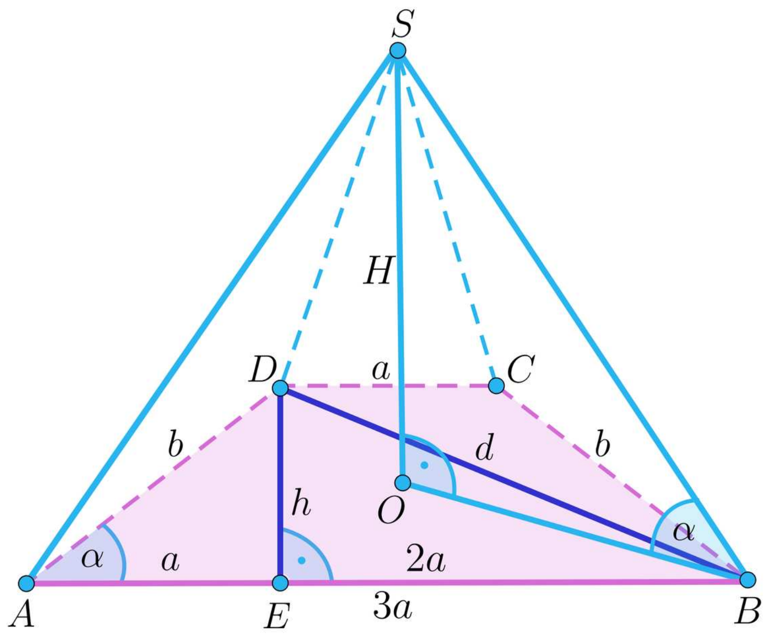
gdzie:
P_p – pole podstawy,
H – wysokość ostrosłupa.

Przykład 1

Podstawą ostrosłupa prostego jest trapez równoramienny o podstawach a i $3a$ oraz kącie ostrym α. Krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem α. Obliczymy objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy i wprowadźmy dodatkowe oznaczenia. Niech b – długość ramion trapezu, h – wysokość trapezu, d – długość przekątnej trapezu, H – wysokość ostrosłupa.



Trójkąt AED jest prostokątny, więc wykorzystując funkcje trygonometryczne mamy:

$\frac{h}{a}$ =tg α, więc $h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Mamy już wszystkie informacje, by policzyć pole podstawy ostrosłupa. Aby obliczyć wysokość ostrosłupa, musimy mieć długość odcinka OB. [Ostrosłup jest prosty](), zatem jest to promień okręgu opisanego na jego podstawie. Obliczmy więc jego długość. Wystarczy obliczyć długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABD. W tym celu wyznaczymy pole trójkąta ABD korzystając z dwóch różnych wzorów.

Wzór wykrzystujący promień okręgu opisanego na trójkącie wymaga znajomości długości wszystkich boków trójkąta. Musimy więc wyznaczyć wielkości b i d.

Ponieważ $\frac{a}{b} = \cos\alpha$, więc $b = \frac{a}{\cos\alpha}$,

Trójkąt DEB jest także prostokątny, co pozwoli nam na obliczenie przekątnej trapezu:

$d^2 = h^2 + (2a)^2$

$d^2 = (a \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 + (2a)^2$

$d^2 = a^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + 4a^2$

$d^2 = a^2 \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + 4\right)$

$d = a\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}.$

Policzmy pole trójkąta:

$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} a^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$

Zatem obliczmy promień. Oznaczmy go jako R:

$\frac{3}{2} a^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{3a \cdot \frac{a}{\cos \alpha} \cdot a\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}}{4R}$

$R = \frac{3a \cdot \frac{a}{\cos \alpha} \cdot a\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}}{4 \cdot \frac{3}{2} a^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}}{2 \sin \alpha}.$

Trójkąt SOB jest prostokątny. Zatem:

$\frac{H}{|OB|} = \operatorname{tg} \alpha$, $|OB| = R$, więc

$H = \frac{a\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}}{2 \sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}}{2 \cos \alpha}.$

Obliczmy pole podstawy ostrosłupa:

$P_p = \frac{(a+3a) \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2} = 2a^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$

Objętość ostrosłupa wynosi więc:

$V = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{a\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}}{2 \cos \alpha} = \frac{a^3 \cdot \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}}{3 \cos \alpha}.$

Przykład 2

Rozważmy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i wysokości tego ostrosłupa jest równa 24. Wyznaczymy promień okręgu opisanego na podstawie tego z ostrosłupów, który ma największą objętość. Obliczymy tę objętość.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jest to zadanie optymalizacyjne.

Oznaczmy bok kwadratu jako a, wysokość ostrosłupa – H.

Promień okręgu opisanego na podstawie ma wzór $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Z treści zadania wiemy, że

$H + R = 24$

$H = 24 - R$

$H = 24 - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{48 - a\sqrt{2}}{2}$

$48 - a\sqrt{2} > 0$, $a < 24\sqrt{2}$. Zatem $a \in \left(0,\ 24\sqrt{2}\right)$.

Wyznaczmy wzór na objętość ostrosłupa.

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$

$V(a) = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{48 - a\sqrt{2}}{2} = \frac{48a^2 - a^3\sqrt{2}}{6} = 8a^2 - \frac{\sqrt{2}}{6} a^3.$

Obliczmy pochodną naszej funkcji V.

$V'(a) = 16a - \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$

Znajdźmy ekstrema funkcji V.

$V'(a) = 0$

$16a - \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 = 0$

$a\left(16 - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = 0$

Zatem

$a = 0$ – nie spełnia warunków zadania

lub

$a = 16\sqrt{2}$.

$V'(a) > 0$ dla $a \in \left(0, 16\sqrt{2}\right)$ oraz $V'(a) < 0$ dla $a > 16\sqrt{2}$, więc $a = 16\sqrt{2}$ jest maksimum lokalnym

Największa objętość ostrosłupa będzie więc dla $a = 16\sqrt{2}$. Promień okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa to $R = 16$

Największa objętość ostrosłupa to:

$V\left(16\sqrt{2}\right) = 8 \cdot \left(16\sqrt{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \left(16\sqrt{2}\right)^3 =$
$= 4096 - \frac{16384}{6} = \frac{8192}{6} = 1365\frac{1}{3}$.

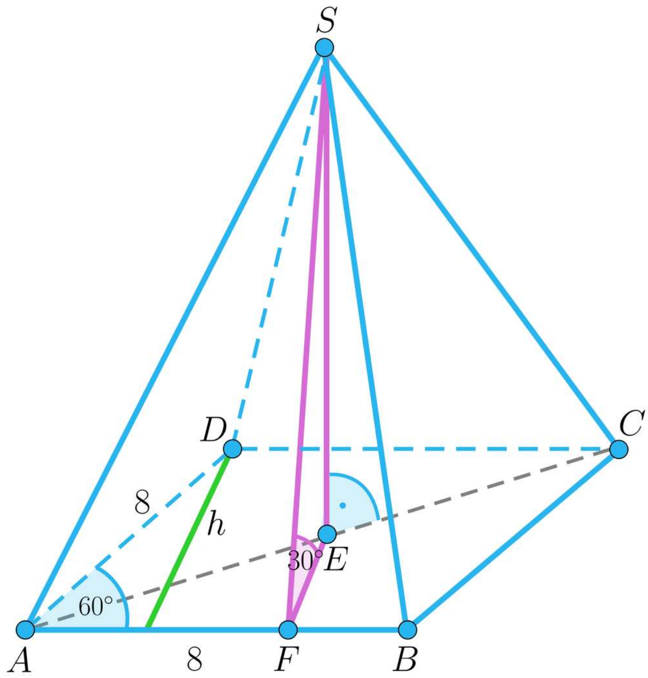
Przykład 3

Podstawą ostrosłupa jest romb o boku 8 i kącie ostrym 60°. Każda ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°.

Obliczymy objętość ostrosłupa.

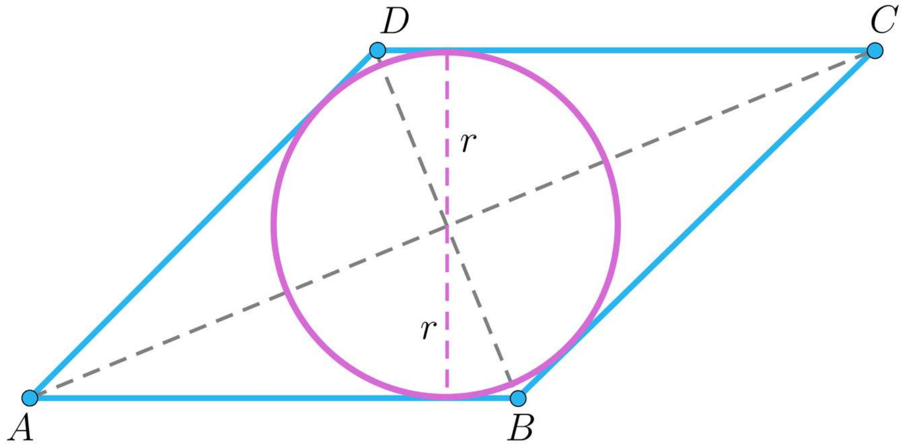
Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy:



Skoro kąt ostry naszego rombu ma miarę 60° to znaczy, że wysokość rombu ma długość $4\sqrt{3}$.

Zatem $P_p = 8 \cdot 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}\ [\mathrm{j}^2]$.



Promień okręgu wpisanego w romb jest równy połowie jego wysokości, zatem $r = 2\sqrt{3}$.

Ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°.

Trójkąt SEF jest prostokątny, co w łatwy sposób pozwoli nam policzyć wysokość ostrosłupa.

$\frac{H}{2\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ$

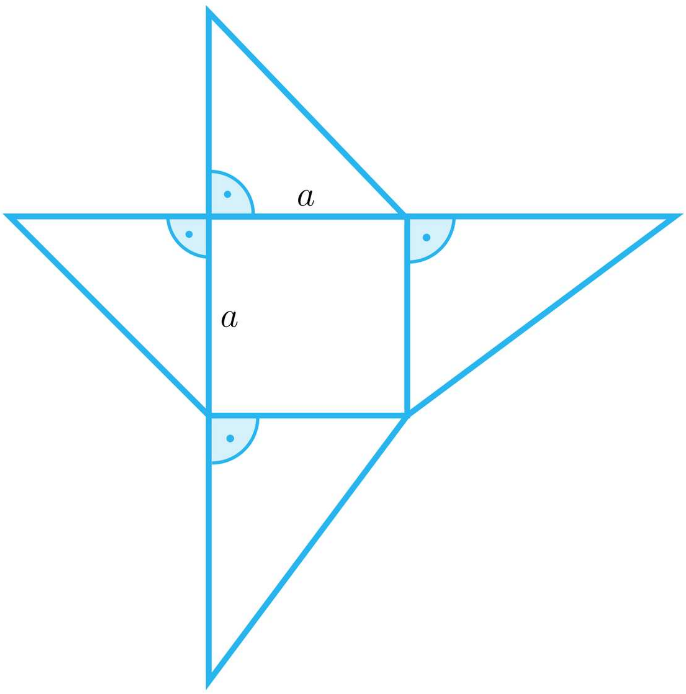
$H = 2$.

Możemy już liczyć objętość ostrosłupa:

$V = \frac{1}{3} \cdot 32\sqrt{3} \cdot 2 = \frac{64\sqrt{3}}{3} \; \left[\mathrm{j}^3\right]$.

Przykład 4

Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa, w którego podstawie jest kwadrat. Wysokością ostrosłupa jest jedna z jego krawędzi bocznych. Objętość ostrosłupa wynosi $\frac{a^3}{3}$.



Obliczymy miarę kąta nachylenia najdłuższej krawędzi bocznej do krawędzi podstawy.

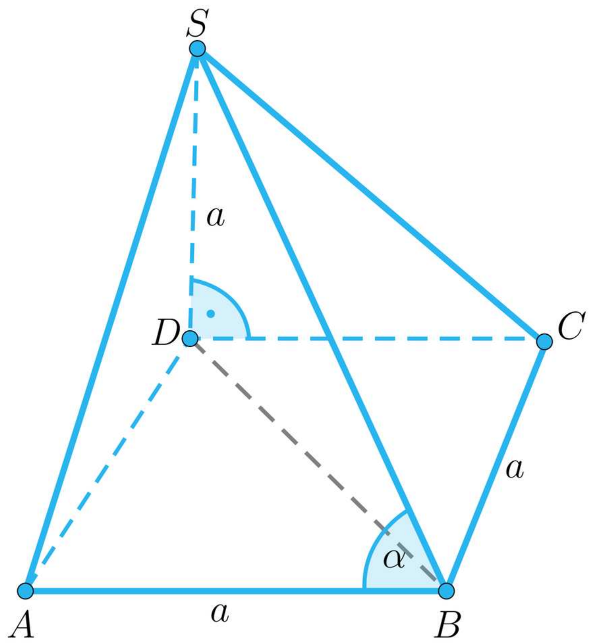
Rozwiązanie:

Oznaczmy wysokość ostrosłupa jako H. Wówczas mamy równanie:

$\frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}a^2 \cdot H$

$H = a.$

Narysujmy bryłę naszego ostrosłupa. Oznaczmy kąt nachylenia najdłuższej krawędzi bocznej do krawędzi podstawy jako α.



Trójkąt SDA jest prostokątnym trójkątem równoramiennym. Zatem $|AS| = a\sqrt{2}$.

Trójkąt SDB także jest prostokątny. $|DB| = a\sqrt{2}$, zatem

$a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = |SB|^2$

$|SB| = a\sqrt{3}.$

Rozważmy trójkąt SAB. Zauważmy, że

$$|AS|^2 + |AB|^2 = |SB|^2.$$

Trójkąt jest więc prostokątny, więc:

$$\sin\alpha = \frac{|AS|}{|BS|} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Z tablic wartości trygonometrycznych odczytujemy wartość kąta:

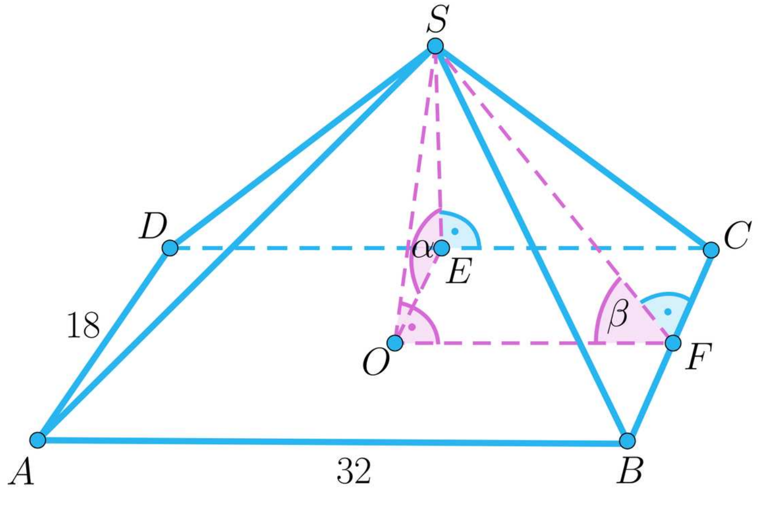
$$\alpha \approx 56^\circ.$$

Przykład 5

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$, którego boki mają długość $|AB| = 32$ i $|BC| = 18$. Ściany boczne ABS i CDS są trójkątami przystającymi i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Ściany boczne BCS i ADS są trójkątami przystającymi i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Miary kątów α i β spełniają warunek $\alpha + \beta = 90^\circ$. Obliczymy objętość ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy:



Trójkąty SOE i SOF są prostokątne.

$|OE| = 9, |OF| = 16.$

Korzystając z funkcji trygonometrycznych mamy więc:

$\text{tg } \alpha = \frac{|SO|}{9}$ i $\text{tg } \beta = \frac{|SO|}{16}$.

Z treści zadania wiemy, że $\alpha + \beta = 90^\circ$, więc $\text{tg } \beta = \text{tg } (90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$.

Zatem mamy, że

$\text{tg } \alpha \cdot \text{ tg } \beta = 1$

$\frac{|SO|}{9} \cdot \frac{|SO|}{16} = 1$

$|SO|^2 = 144$

$|SO| = 12.$

Możemy więc obliczyć objętość naszego ostrosłupa.

$P_p = 32 \cdot 18 = 576$

$V = \frac{1}{3} \cdot 576 \cdot 12 = 2304.$

Słownik

Ostrosłup czworokątny prosty

w podstawie ma czworokąt, spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie

Ostrosłup prawidłowy czworokątny

> ostrosłup, w którego podstawie jest kwadrat, a wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi

Animacja 3D

Polecenie 1
Zapoznaj się z treścią animacji 3D. Zwróć uwagę na to, jaką figurą jest podstawa ostrosłupa.

Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego objętości ostrosłupa czworokątnego.

Polecenie 2
Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest trapez prostokątny $ABCD$, w którym podstawy mają długość $|AB| = 12$ i $|CD| = 8$, a dłuższe ramię BC ma długość 5. Oblicz objętość tej bryły wiedząc, że najdłuższa krawędź boczna ma długość 15, a krawędź DS jest jednocześnie wysokością ostrosłupa.

Sprawdź się

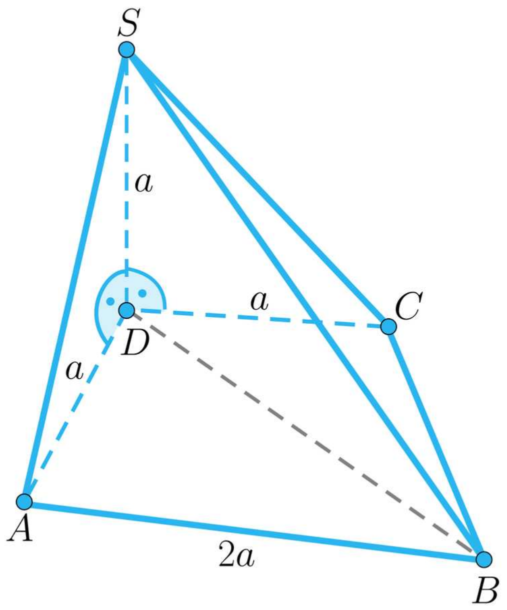
Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono ostrosłup o podstawie trapezu równoramiennego. Zależności pomiędzy poszczególnymi odcinkami zaznaczono na rysunku poniżej. Objętość ostrosłupa wynosi $250\sqrt{3}$. Oblicz, jaką długość ma wysokość tego ostrosłupa.

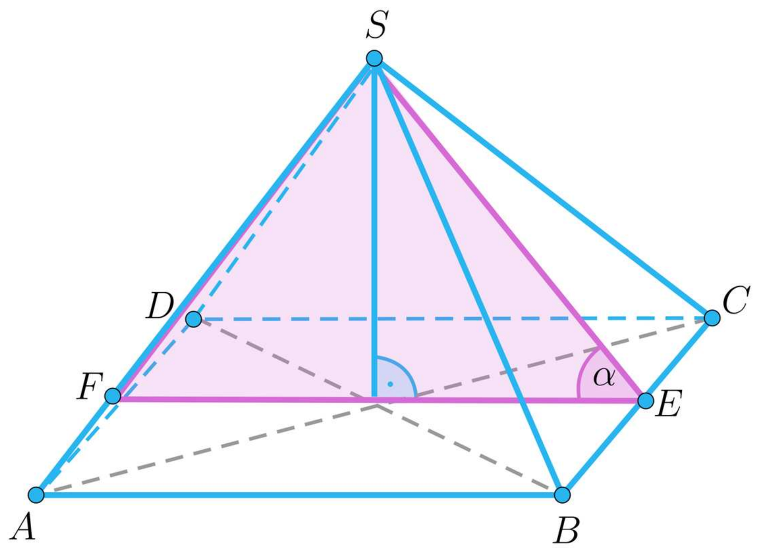


Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Na rysunku przedstawiono ostrosłup o podstawie prostokąta. Pole przekroju ostrosłupa wyznaczonego przez wysokości przeciwległych ścian bocznych i wierzchołek ostrosłupa wynosi P. Ściana boczna nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem α a kąt pomiędzy przeciwległymi krawędziami bocznymi ma miarę 120°.



Ćwiczenie 7

Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny o kącie ostrym α, w którym ramię i krótsza podstawa mają długość a. Każda krawędź boczna ostrosłupa tworzy z płaszczyzną kąt β. Oblicz objętość ostrosłupa.

Ćwiczenie 8

Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa, którego podstawą jest prostokąt ma długość b i jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Najdłuższa krawędź boczna ostrosłupa tworzy z podstawą kąt o mierze α, a z jedną z sąsiednich krawędzi bocznych kąt β. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kiełczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość ostrosłupa czworokątengo

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zakres rozszerzony. Uczeń:

1) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostych prostopadłych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza objętość ostrosłupa czworokątnego
- wykorzystuje zależności pomiędzy odcinkami ostrosłupa
- wykorzystuje trygonometrię w zadaniach

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda wędrujących plakatów
- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer, najlepiej pracownia komputerowa; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają, w jaki sposób obliczali pole ostrosłupów czworokątnych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4 osobowych pracują metodą wędrujących plakatów. Celem jest podanie wzorów na objętość ostosłupa, w zależności od kształtu jego podstawy. Rozpoczyna grupa wybrana losowo – zapisuje na plakacie przygotowany wcześniej przykład. Kolejna grupa dodaje swój przykład itd.
2. Uczniowie analizują przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie w parach oglądają animację 3D i następnie omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Objętość ostrosłupa

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w animacji 3D uczniowie mogą wykorzystać jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.