



## Analiza zadania tekstowego i budowanie układów równań do zadań tekstowych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

# Analiza zadania tekstowego i budowanie układów równań do zadań tekstowych

Źródło: Egor Myznik, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>, domena publiczna.

Wiele skomplikowanych problemów można rozwiązać przy pomocy układów równań liniowych. Dlatego już starożytni docenili tę metodę. Pierwsze przykłady układów równań zapisanych na glinianych tabliczkach pismem klinowym pochodzą sprzed 3000 lat ze starożytnej Babilonii. Jednak, gdy rozwiązanie zadania tekstowego wymaga użycia układu równań, często okazuje się, że najtrudniejsze nie jest wcale rozwiązanie układu równań, a rozpoznanie niewiadomych i zapisanie zależności pomiędzy nimi. W tym materiale zaprezentujemy różne przykłady zadań tekstowych, które można rozwiązać przy pomocy układów równań.

## Twoje cele

- Określisz niewiadome występujące w zadaniu tekstowym.
- Zapiszesz zależności pomiędzy niewiadomymi w postaci równań.
- Rozwiążesz zadania tekstowe prowadzące do układów równań.

# Przeczytaj

---

Zacznijmy od prostych przykładów zadań tekstowych prowadzących do układów równań.

## Przykład 1

Na podwórku bawią się kury i koty. W sumie jest 21 zwierząt, które razem mają 54 nogi. Ile kotów bawi się na podwórku?

## Rozwiązanie

Przystępując do rozwiązania zadania tekstowego, najpierw zastanawiamy się, czego nie wiemy. W naszym przykładzie końcowe pytanie wskazuje na pierwszą niewiadomą: *ile kotów bawi się na podwórku?* Oznaczmy więc przez  $x$  liczbę kotów. Skoro liczba kotów jest pierwszą niewiadomą, to drugą niewiadomą jest liczba kur. Oznaczmy ją przez  $y$ .

Pierwsza informacja płynąca z treści zadania, to że łączna liczba zwierząt jest równa 21. Możemy więc ułożyć pierwszą zależność:

$$x + y = 21.$$

Druga informacja dotyczy łącznej liczby nóg, liczba ta jest równa 54.

Każdy kot ma cztery łapy, więc koty mają w sumie  $4x$  „nóg”, a każda kura biega na dwóch nogach, więc kury mają w sumie  $2y$  nóg.

Teraz możemy już zapisać drugą zależność:

$$4x + 2y = 54.$$

Pozostało już tylko zapisać **układ równań** i go rozwiązać.

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ 4x + 2y = 54 \end{cases}$$

Użyjemy metody przeciwnych współczynników i pomnożymy pierwsze równanie stronami przez  $(-2)$ .

$$\begin{cases} x + y = 21 \mid \cdot (-2) \\ 4x + 2y = 54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -42 \\ 4x + 2y = 54 \end{cases}$$

Gdy dodamy do siebie pierwsze i drugie równanie, to wyeliminujemy zmienną  $y$  i otrzymamy równanie z jedną niewiadomą:

$$2x = 12,$$

którego rozwiązaniem jest  $x = 6$ . Teraz podstawiamy do pierwszego równania w miejsce  $x$  liczbę 6 i otrzymamy równanie  $6 + y = 21$ , którego rozwiązaniem jest  $y = 15$ .

Sprawdźmy nasz wynik: 6 kotów i 15 kur to łącznie 21 zwierząt, które mają  $6 \cdot 4 + 15 \cdot 2 = 24 + 30 = 54$  nogi. Wszystko się zgadza, więc możemy już sformułować odpowiedź:

Na podwórku bawi się 6 kotów i 15 kur.

Wzorując się na powyższym przykładzie, rozwiązując zadanie tekstowe możemy postępować według schematu:

1. Ustalamy, które wielkości wymienione w treści zadania nie są znane. Może nam w tym pomóc pytanie na końcu zadania.
2. Oznaczamy nieznane wielkości – niewiadome – małymi literami alfabetu, np.  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $a$ ,  $b$ , ...
3. Próbujemy przedstawione w zadaniu informacje zapisane „słownie” przedstawić w postaci wyrażeń algebraicznych zawierających nazwy niewiadomych z poprzedniego kroku.
4. Z wyrażeń algebraicznych ułożonych w poprzednim kroku tworzymy układ równań.
5. Rozwiązujemy układ równań jedną ze znanych metod, np. **metodą podstawiania** lub przeciwnych współczynników.
6. Sprawdzamy, czy nasze rozwiązanie odpowiada treści zadania.
7. Formułujemy odpowiedź do zadania.

Często w ułożeniu zależności pomiędzy niewiadomymi przydatny jest rysunek pomocniczy. Zapoznajmy się z kolejnym przykładem.

### Przykład 2

Ola i Kuba znaleźli na strychu stary cylinder. Gdy Kuba założył cylinder, to był o 36 cm wyższy od Oli. Gdy Ola włożyła cylinder, była wyższa od Kuby o 8 cm. Ile centymetrów wysokości miał znaleziony przez nich cylinder?

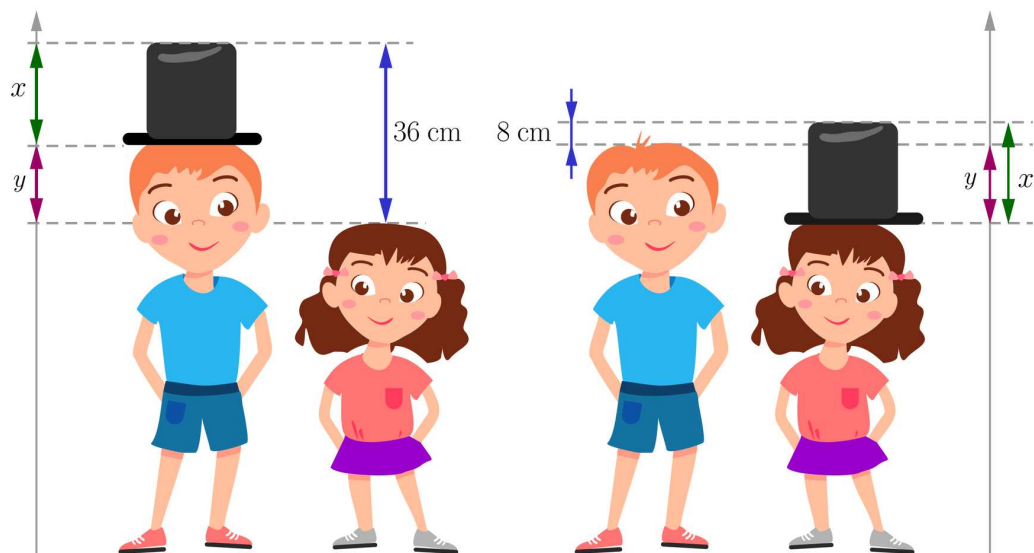
### Rozwiązanie

1. Po przeczytaniu pytania końcowego, wiemy już na pewno, że jedną z niewiadomych jest wysokość cylindra. Nie znamy także wzrostu Oli i Kuby.
2. Oznaczmy przez  $x$  wysokość cylindra, przez  $y$  wzrost Kuby, a przez  $z$  wzrost Oli.

3. Szukamy informacji w treści zadania, analizując zdanie po zdaniu:

- Ola i Kuba znaleźli na strychu stary cylinder. Ta informacja nie przyda nam się przy rozwiązaniu.
- Gdy Kuba założył cylinder, to był o 36 cm wyższy od Oli. To zdanie zawiera pierwszą informację, którą możemy zapisać w formie równania:  
 $y + x = z + 36$ .
- Gdy Ola włożyła cylinder, była wyższa od Kuby o 8 cm. Druga informacja, z której możemy ułożyć równanie:  
 $z + x = y + 8$ .
- Ile centymetrów wysokości miał znaleziony przez nich cylinder? To już jest tylko pytanie, które nie zawiera żadnej informacji.

W tej chwili mamy trzy niewiadome, a tylko dwa równania. Zastanówmy się, czy wszystkie niewiadome są nam potrzebne. Zrobmy rysunek pomocniczy i spróbujmy coś zauważyć.



Analizując powyższy rysunek, zwróćmy uwagę na fakt, że tak naprawdę nie musimy znać wzrostu Oli i Kuby. Wystarczy, że będziemy wiedzieć, o ile centymetrów Kuba jest wyższy od Oli. Więc wracamy do Punktu 2 i oznaczamy przez  $y$  różnicę wzrostu Kuby i Oli.

2. Oznaczmy przez  $x$  wysokość cylindra, przez  $y$  różnicę wzrostu Kuby i Oli.

Teraz musimy zapisać nowe równania w punkcie trzecim.

3. Zamiast  $y + x = z + 36$ , będzie  $x + y = 36$ . Kuba jest wyższy od Oli o  $y$  cm plus dodatkowe  $x$  cm cylindra.

Zamiast  $z + x = y + 8$ , będzie  $x - y = 8$ . Ola w cylindrze jest tylko o 8 cm wyższa od Kuby, więc wysokość cylindra przewyższa różnicę wzrostu pomiędzy Olą i Kubą o 8 cm.

4. Zapiszmy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

5. Sam układ jest bardzo prosty do rozwiązania. Wystarczy, że dodamy do siebie równania stronami i otrzymamy

$$2x = 44, \text{ a stąd } x = 22.$$

Potem podstawmy  $x = 22$  do pierwszego równania, a otrzymamy

$$22 + y = 36, \text{ więc } y = 14.$$

6. Policzyliśmy, że Kuba jest o 14 cm wyższy od Oli, a cylinder ma 22 cm wysokości. W takim razie Kuba w cylindrze jest o 36 cm wyższy od Oli, a Ola w cylindrze jest o 8 cm wyższa od Kubu.

7. Możemy już napisać ostateczną odpowiedź:

Cylinder ma 22 cm wysokości.

Zapisując układ równań liniowych w postaci

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

możemy wyznaczyć jego rozwiązanie, używając wzorów Cramera:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Jeśli  $W$  jest różne od zera, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie postaci

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases},$$

gdzie:

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1.$$

W kolejnych dwóch przykładach przedstawimy ich zastosowanie.

### Przykład 3

Klasa III b pojechała na wycieczkę do Krakowa wraz z trzema opiekunkami. W hotelu zarezerwowano 13 pokoi. Wiadomo, że dziewczynki umieszczono w pokojach trzyosobowych, a chłopców w pokojach dwuosobowych. Opiekunki również zajęły pokój

trzyosobowy. Ile było dziewcząt, a ilu chłopców w klasie III b, jeśli wiadomo, że cała klasa III b liczy 28 osób?

### Rozwiązanie

Niech  $x$  oznacza liczbę dziewcząt, a  $y$  liczbę chłopców.

Zapiszmy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ \frac{x}{3} + 1 + \frac{y}{2} = 13 \quad | - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 12 \quad | \cdot 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ 2x + 3y = 72 \end{cases}$$

Obliczamy  $W$ :

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1 \neq 0.$$

Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Obliczamy  $W_x$  i  $W_y$ :

$$W_x = \begin{vmatrix} 28 & 1 \\ 72 & 3 \end{vmatrix} = 28 \cdot 3 - 1 \cdot 72 = 12,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 28 \\ 2 & 72 \end{vmatrix} = 1 \cdot 72 - 2 \cdot 28 = 16.$$

Rozwiązaniem układu są liczby  $x = \frac{W_x}{W} = \frac{12}{1} = 12$  i  $y = \frac{W_y}{W} = \frac{16}{1} = 16$ .

Odpowiedź: w klasie było 12 dziewcząt i 16 chłopców.

### Przykład 4

Pani Kasia miała w portfelu banknoty dziesięciozłotowe oraz banknoty dwudziestozłotowe – w sumie 14 banknotów. Gdy dołożyła do portfela jeszcze 80 zł, to okazało się, że w portfelu ma już 300 zł. Ile banknotów dziesięciozłotowych, a ile banknotów dwudziestozłotowych miała na początku w portfelu pani Kasia?

### Rozwiązanie

$x$  – liczba banknotów dziesięciozłotowych,

$y$  – liczba banknotów dwudziestozłotowych.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 10x + 20y + 80 = 300 \quad | - 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 10x + 20y = 220 \end{cases}$$

Zastosujemy wzory Cramera. Obliczamy  $W$ :

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 1 \cdot 20 - 1 \cdot 10 = 10.$$

$W$  jest liczbą różną od zera, więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Obliczamy  $W_x$  i  $W_y$ .

$$W_x = \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 220 & 20 \end{vmatrix} = 14 \cdot 20 - 1 \cdot 220 = 280 - 220 = 60.$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 10 & 220 \end{vmatrix} = 1 \cdot 220 - 14 \cdot 10 = 220 - 140 = 80.$$

Rozwiązaniem układu jest więc para liczb:

$$\begin{cases} x = \frac{60}{10} = 6 \\ y = \frac{80}{10} = 8 \end{cases}$$

Odpowiedź:

Pani Katarzyna na początku miała w portfelu 6 banknotów dziesięciozłotowych i 8 banknotów dwudziestozłotowych.

W następnym przykładzie zaprezentujemy metodę rozwiązywania układów równań zwaną **metodą podstawiania**, która polega na wyznaczeniu z jednego z równań jednej niewiadomej i podstawieniu wyliczonej zależności do drugiego równania.

#### Przykład 5

Tata jest o 28 lat starszy od swojego syna Kuby. Sześć lat temu tata był osiem razy starszy od syna. Ile lat ma tata?

#### Rozwiązanie

Oznaczmy przez  $x$  obecny wiek Kuby, a przez  $y$  obecny wiek taty. Sześć lat temu Kuba miał  $x - 6$ , a tata  $y - 6$  lat. Zapiszmy układ równań:

$$\begin{cases} y = x + 28 \\ y - 6 = 8 \cdot (x - 6) \end{cases}$$

Zastosujemy metodę podstawiania i do drugiego równania w miejsce  $y$  wstawimy  $x + 28$ .

$$\begin{cases} y = x + 28 \\ x + 28 - 6 = 8 \cdot (x - 6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 28 \\ x + 22 = 8x - 48 \quad | - 8x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 28 \\ -7x + 22 = -48 \quad | - 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 28 \\ -7x = -70 \quad | : (-10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 38 \\ x = 10 \end{cases}$$

Odpowiedź:

Kuba ma 10 lat, a tata 38.

### Przykład 6

Gdy Maciek miał tyle lat, co Artur ma teraz, to był od niego o połowę starszy. Gdy Artur będzie miał tyle lat, co Maciek teraz, to Maciek będzie miał 40 lat. Jaka jest różnica wieku pomiędzy Maćkiem, a Arturem?

### Rozwiązanie

Oznaczmy przez  $x$  obecny wiek Maćka, a przez  $y$  obecny wiek Artura. Gdy Maciek miał  $y$  lat, to był o połowę starszy od Artura, a więc Artur miał  $\frac{2}{3}y$  lat. Uporządkujmy dane w tabeli:

osoba	przeszłość	teraźniejszość	przyszłość
Maciek	$y$	$x$	40
Artur	$\frac{2}{3}y$	$y$	$x$

Zauważmy, że w każdym okresie różnica wieku pomiędzy chłopcami zawsze jest taka sama, a więc równa  $x - y$ . Zapiszmy **układ równań**:

$$\begin{cases} y - \frac{2}{3}y = x - y \\ 40 - x = x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{3}y \\ 2x - y = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - \frac{4}{3}y = 0 \\ 2x - y = 40 \end{cases}$$

Zastosujemy metodę **przeciwnych współczynników** i pomnożmy pierwsze równanie stronami przez  $(-2)$ :

$$\begin{cases} -2x + \frac{8}{3}y = 0 \\ 2x - y = 40 \end{cases}$$

Po dodaniu do siebie równań stronami, otrzymamy:

$$\frac{5}{3}y = 40 \quad | \cdot \frac{3}{5}$$

$$y = 24, x = \frac{4}{3}y = 32.$$

Odpowiedź:

Maciek ma 32 lata, a Artur 24, więc Maciek jest o 8 lat starszy od Artura.

Wiele zadań tekstowych wymaga zastosowania układu równań, które nie są liniowe. Na ogół w takich zadaniach wyznaczamy jedną ze zmiennych z jednego z równań, a drugie równanie doprowadzamy do postaci równania kwadratowego.

### Przykład 7

Na samochód ciężarowy załadowano worki z ekogroszkiem, ważące w sumie 2 tony oraz worki z węglem, które łącznie ważyły dwa razy więcej niż ekogroszek. Wszystkie worki z ekogroszkiem ważyły tyle samo, a każdy worek z węglem ważył o 15 kg więcej niż jeden worek ekogroszku. Ile ważył jeden worek z ekogroszkiem, a ile z węglem, jeśli wiadomo, że w sumie załadowano na samochód ciężarowy 180 worków?

### Rozwiązanie

Niech  $x$  oznacza wagę jednego worka z ekogroszkiem (w kg), a  $y$  – liczbę worków z ekogroszkiem. Wówczas  $x + 15$  oznacza wagę jednego worka z węglem,  $180 - y$  liczbę tych worków. Zapiszmy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 2000 \\ (x + 15) \cdot (180 - y) = 4000 \end{cases}$$

Ponieważ  $x$  jest liczbą dodatnią, więc możemy podzielić pierwsze równanie przez  $x$ , a drugie przez  $x + 15$ :

$$\begin{cases} y = \frac{2000}{x} \\ 180 - y = \frac{4000}{x+15} \end{cases}$$

Gdy dodamy do siebie równania stronami, otrzymamy równanie:

$$\frac{2000}{x} + \frac{4000}{x+15} = 180 \quad | \cdot \frac{x(x+15)}{20},$$

$$100x + 1500 + 200x = 9x(x + 15),$$

$$300x + 1500 = 9x^2 + 135x,$$

$$9x^2 - 165x - 1500 = 0 \quad | : 3,$$

$$3x^2 - 55x - 500 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu:

$$\Delta = 55^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-500) = 3025 + 6000 = 9025, \sqrt{\Delta} = 95$$

Równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{55-95}{6} < 0, x_2 = \frac{55+95}{6} = 25.$$

Po odrzuceniu ujemnego rozwiązania, które nie spełnia warunków zadania, otrzymujemy, że  $x = 25$ , a  $y = \frac{2000}{25} = 80$ .

Odpowiedź:

Jeden worek ekogroszku ważył 25 kg, a jeden worek węgla ważył 40 kg.

## Słownik

### układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układem dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi  $x, y$  nazywamy każdy układ równań, który da się doprowadzić do postaci:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

### metoda podstawiania

nazywamy tak metodę rozwiązywania układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi, w której z jednego z równań wyznaczamy jedną z niewiadomych i podstawiamy do drugiego równania wyznaczone wyrażenie (w miejsce tej zmiennej). Otrzymane w ten sposób drugie równanie jest równaniem z jedną niewiadomą.

### metoda przeciwnych współczynników

nazywamy tak metodę rozwiązywania układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi, w której mnożymy obydwie (lub jedno z równań) stronami przez takie liczby, aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki; wówczas po dodaniu do siebie równań stronami jedna ze zmiennych się redukuje, a do rozwiązania pozostaje równanie z jedną niewiadomą

### wzory Cramera - metoda wyznaczników

niech dany będzie układ równań

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

oznaczmy przez  $W$  wyznacznik główny:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

jeśli wyznacznik główny  $W$  jest różny od zera, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie postaci

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}$$

gdzie:

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją, a następnie spróbuj rozwiązać zadania, przedstawione w poleceniach.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaEegrcU3>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej analizy zadania tekstowego.

---

## Polecenie 2



Pan Wojciech kupił 20 wkrętów – walcowych i kulistych, za które zapłacił 47,70 zł, przy czym wszystkie wkręty walcowe kosztowały 12,60 zł. Jaka była cena jednego wkręta walcowego, jeśli cena wkręta kulistego była o 50% większa niż cena wkręta walcowego?

## Polecenie 3

Magda na swoje przyjęcie urodzinowe zamówiła 12 pizz: kilka hawajskich i farmerskich. Zapłaciła 135 zł za wszystkie pizze hawajskie oraz 150 zł za farmerskie, przy czym jedna pizza farmerska była o 2,50 zł droższa od pizzy hawajskiej. Których pizz więcej zamówiła Magda: hawajskich, czy farmerskich?

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



## Ćwiczenie 2



## Ćwiczenie 3



## Ćwiczenie 4



Gdy wlane pewną ilość wody do metalowego zbiornika, to tak napełniony zbiornik był o 13 kg cięższy od pustego zbiornika plastikowego. Gdyby tą samą ilość wody wlane do plastikowego zbiornika, to byłby on o 5 kg lżejszy od pustego zbiornika metalowego. Ile ważyła woda wlana do metalowego zbiornika?

## Ćwiczenie 5



W pewnej firmie jest 49 pracowników. Stosunek liczby mężczyzn do liczby kobiet zatrudnionych w tej firmie wynosi 5 : 2. Ile kobiet pracuje w tej firmie?

## Ćwiczenie 6



Magda i Tomek zbierają magnesy. Gdyby Tomek oddał Magdzie trzy swoje magnesy, to Magda miałaby ich dwa razy więcej niż Tomek. Jeśli jednak Magda oddałaby Tomkowi siedem swoich magnesów, to mieliby ich po równo. Ile magnesów ma każde z nich?

## Ćwiczenie 7



Asia upiekła pierniczki i ciasteczka maślane. Chce przygotować z nich paczuszki dla swoich przyjaciół. Jeśli będzie pakować pierniczki po trzy sztuki, a ciasteczka maślane po cztery sztuki, to paczuszek z pierniczkami będzie dwa razy więcej niż paczuszek z ciasteczkami maślanymi. Jeśli jednak pierniczki będzie pakować po dwie sztuki, a ciasteczka maślane po trzy sztuki, to paczuszek z pierniczkami będzie o 10 więcej niż paczuszek z ciasteczkami maślanymi. Ile pierniczek i ile ciasteczek maślanych upiekła Asia?

## Ćwiczenie 8



Stu osiemdziesięciu uczestników obozu harcerskiego podzielono na równoliczne drużyny. Gdyby drużyn było o sześć więcej, to w każdej z nich byłoby o pięciu harcerzy mniej. Ilu harcerzy liczyła jedna drużyna?

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Marta Frankowska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Analiza zadania tekstowego i budowanie układów równań do zadań tekstowych

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
- 2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
- 3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci  $\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases}$  lub  $\begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- analizuje treść zadania tekstowego;
- wskazuje i oznacza niewiadome;
- układa i zapisuje zależności pomiędzy niewiadomymi w postaci układu równań;
- stosuje znane metody do rozwiązania układu równań;
- rozwiązuje układ równań.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

### **Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

- Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel określa cele lekcji, a następnie określa kryteria sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów pozyskanej w domu, za pomocą krótkiej kartkówki.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie wspólnie oglądają animację. Uczniowie próbują samodzielnie wykonać pokazane tam zadania.
2. Po zakończeniu pokazu nauczyciel pyta, czy rozwiązania zadań przedstawionych w animacji są dla wszystkich zrozumiałe. W razie wątpliwości, tłumaczy zadania.
3. Wybrani uczniowie wykonują Polecenie 2 i Polecenie 3 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
4. W dalszej części uczniowie wykonują samodzielnie ćwiczenia 1 – 3 z sekcji „Sprawdź się”. Po zakończeniu każdego ćwiczenia sprawdzane są rozwiązania na forum klasy.
5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Każda grupa układa treść zadania do układu równań z ćwiczenia 4 z sekcji „Sprawdź się”.
6. Uczniowie w parach wykonują pozostałe ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”.

**Faza podsumowująca:**

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

**Praca domowa:**

Zadaniem każdego z uczniów jest ułożenie i rozwiązanie 3 zadań tekstowych pokazujących zastosowanie układów równań.

**Materiały pomocnicze:**

- [Rozwiązywanie równań kwadratowych różnymi metodami](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Nauczyciel przez zajęciami powinien się upewnić, że uczniowie znają metody rozwiązywania układów równań.

Animację można wykorzystać na zajęciach pokazujących sposób rozwiązywania problemów prowadzących do przekształcania wyrażeń wymiernych.