Wykres i własności funkcji cosinus

Źródło: Kelly Lacy, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Poznałeś już podstawowe własności funkcji $y = \cos x$ związane z obliczaniem wartości tej funkcji; są to wzory redukcyjne. W tej lekcji zastosujemy je do konstrukcji wykresu funkcji $y = \cos x$ oraz opisu jej pozostałych własności.

Twoje cele

- Nauczysz się rysować wykres funkcji $y = \cos x$ oraz opisywać jej własności.
- Dowiesz się, jak wykorzystać wykres funkcji $y = \cos x$ do rozwiązywania zadań.

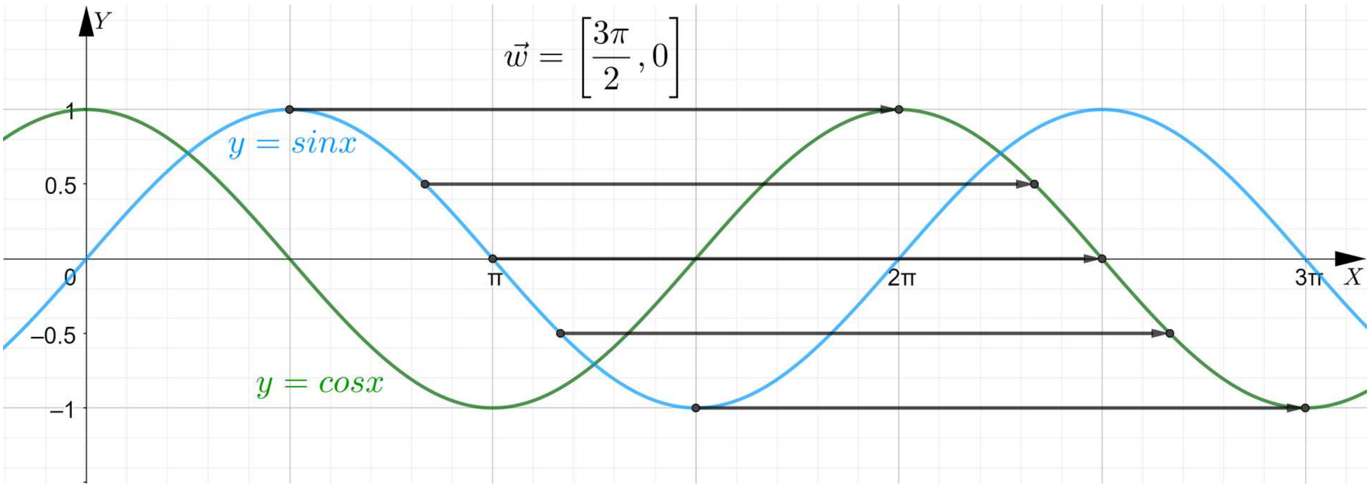
Przeczytaj

Tę lekcję rozpoczniemy od konstrukcji wykresu funkcji $y = \cos x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

W tym celu wykorzystamy wzór redukcyjny: $\cos x = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$, który jest prawdziwy dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$.

Równość $\cos x = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ oznacza, że aby otrzymać wykres funkcji $y = \cos x$ wystarczy przesunąć wykres funkcji $y = \sin x$ o wektor $\overrightarrow{w} = \left[\frac{3\pi}{2}, 0\right]$.

Zobacz na poniższym rysunku, jak w wyniku przesunięcia z wykresu funkcji $y = \sin x$ powstaje wykres funkcji $y = \cos x$.



Twierdzenie: o własnościach funkcji cosinus

Na podstawie własności funkcji sinus oraz obserwacji wykresu funkcji cosinus możemy opisać wszystkie własności funkcji $y = \cos x$.

1. Funkcja cosinus jest funkcją okresową o okresie zasadniczym $T = 2\pi$, gdyż dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

2. Funkcja cosinus jest funkcją parzystą, gdyż dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\cos(-x) = \cos x$.

3. Zbiorem wartości funkcji cosinus jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$.

4. Wartość największą równą 1 funkcja cosinus osiąga dla argumentów: $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

5. Wartość najmniejszą równą (-1) funkcja osiąga dla argumentów: $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

6. Miejscami zerowymi funkcji cosinus są argumenty: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
7. Funkcja jest rosnąca w przedziałach: $\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
8. Funkcja jest malejąca w przedziałach: $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Opiszmy własności geometryczne wykresu funkcji cosinus:

Twierdzenie: o własnościach geometrycznych wykresu funkcji cosinus

1. Osią symetrii wykresu funkcji cosinus jest każda prosta o równaniu $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2. Środkiem symetrii wykresu funkcji cosinus jest każdy punkt o współrzędnych $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Dowód

1. Aby udowodnić tę własność skorzystamy z następującej faktu dotyczącego osi symetrii wykresu funkcji:

Prosta $x = a$ jest osią symetrii wykresu funkcji $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby x z dziedziny zachodzi równość $f(x) = f(2a - x)$.

Zatem w przypadku funkcji cosinus chcemy wykazać, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość: $\cos x = \cos(2k\pi - x)$.

Najpierw skorzystamy z zależności $\cos(-x) = \cos x$. Zatem

$\cos(2k\pi - x) = \cos(x - 2k\pi)$

a następnie wykorzystamy okresowość funkcji cosinus:

$\cos(x - 2k\pi) = \cos x$.

Ostatecznie otrzymujemy:

$\cos(2k\pi - x) = \cos(x - 2k\pi) = \cos x$,

co kończy dowód.

2. Aby udowodnić tę własność skorzystamy z następującego warunku istnienia środka symetrii wykresu funkcji:

Punkt o współrzędnych (a, b) jest środkiem symetrii wykresu funkcji $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby x z dziedziny zachodzi równość:

$2b - f(x) = f(2a - x)$.

Zatem musimy sprawdzić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość:

$2 \cdot 0 - \cos x = \cos\left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - x\right).$

czyli

$-\cos x = \cos(\pi + 2k\pi - x).$

Najpierw skorzystamy z okresowości funkcji cosinus: $\cos(\pi + 2k\pi - x) = \cos(\pi - x)$, a następnie ze wzoru redukcyjnego: $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

Zatem mamy:

$\cos\left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - x\right) = \cos(\pi + 2k\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos(x),$

co kończy dowód.

Przykład 1

Podamy okres zasadniczy funkcji:

1. $y = 3\cos x$
2. $y = \cos 4x$
3. $y = |\cos x|$
4. $y = \cos(x + 2)$

Rozwiązanie:

1. Okresem zasadniczym funkcji $y = 3\cos x$ jest $T = 2\pi$, gdyż $3\cos(2\pi + x) = 3\cos x$.
2. Okresem zasadniczym funkcji $y = \cos 4x$ jest $T = \frac{\pi}{2}$, gdyż $\cos 4\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(2\pi + 4x) = \cos 4x$.
3. Okresem zasadniczym funkcji $y = |\cos x|$ jest $T = \pi$, gdyż $|\cos(\pi + x)| = |-\cos x| = |\cos x|$.
4. Okresem zasadniczym funkcji $y = \cos(x + 2)$ jest $T = 2\pi$, gdyż $\cos((2\pi + x) + 2) = \cos(2\pi + x + 2) = \cos(x + 2)$.

Przykład 2

Podamy miejsca zerowe funkcji:

1. $y = 3\cos x$

2. $y = \cos 4x$

3. $y = |\cos x|$

4. $y = \cos(x + 2)$

Rozwiązanie:

1. Równanie $3\cos x = 0$ ma takie same rozwiązania jak równanie $\cos x = 0$, a zatem miejscami zerowymi funkcji $y = 3\cos x$ są: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2. Rozwiązaniami równania $\cos 4x = 0$ są wszystkie liczby x, dla których $4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

3. Równanie $|\cos x| = 0$ ma takie same rozwiązania jak równanie $\cos x = 0$, a zatem miejscami zerowymi funkcji $y = |\cos x|$ są: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

4. Rozwiązaniami równania $\cos(x + 2) = 0$ są wszystkie liczby $x + 2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli $x = \frac{\pi}{2} - 2 + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3

Która wartość jest większa: $\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)$ czy $\cos\frac{3\pi}{28}$?

Rozwiązanie:

Korzystając z parzystości funkcji cosinus mamy: $\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{9}$.

Zauważmy, że $\frac{\pi}{9} \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ oraz $\frac{3\pi}{28} \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Ponadto $\frac{\pi}{9} > \frac{3\pi}{28}$. Ponieważ funkcja cosinus w przedziale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ jest malejąca, zatem $\cos\frac{\pi}{9} < \cos\frac{3\pi}{28}$.

Przykład 4

Podamy zbiory wartości funkcji:

1. $y = 2\cos(x - 1)$

2. $y = 3|\cos(2x + 1)| + 2$

Rozwiązanie:

1. Ponieważ liczba $x - 1$ jest dowolną liczbą rzeczywistą, zatem zbiorem wartości funkcji $y = \cos(x - 1)$ jest przedział $\langle -1, 1\rangle$. Wobec tego zbiorem wartości funkcji $y = 2\cos(x - 1)$ jest przedział $\langle -2, 2\rangle$.

2. Ponieważ liczba $2x + 1$ jest dowolną liczbą rzeczywistą, zatem zbiorem wartości funkcji $y = \cos(2x + 1)$ jest przedział $\langle -1, 1\rangle$. Wobec tego zbiorem wartości funkcji

$y = |\cos(2x+1)|$ jest przedział $\langle 0, 1 \rangle$. W konsekwencji zbiorem wartości funkcji $y = 3|\cos(2x+1)| + 2$ jest przedział $\langle 2, 5 \rangle$.

Słownik

oś symetrii wykresu funkcji

prosta $x = a$ jest osią symetrii wykresu funkcji $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby x z dziedziny zachodzi równość $f(x) = f(2a - x)$

środek symetrii wykresu funkcji

punkt o współrzędnych (a, b) jest środkiem symetrii wykresu funkcji $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby x z dziedziny zachodzi równość
$2b - f(x) = f(2a - x)$

Aplet

Już wiesz, że funkcja $y = \cos ax$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą różną od 0, jest funkcją okresową. Jej okres zasadniczy jest równy $T = \frac{2\pi}{a}$.

Wynika to z dwóch faktów:

1. $\cos\left(a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right) = \cos(ax + 2\pi) = \cos ax$, czyli liczba $\frac{2\pi}{a}$ jest okresem funkcji $y = \cos ax$,
2. jeżeli liczba t ma taką własność, że $0 < t < \frac{2\pi}{a}$, to $\cos(a(x+t)) = \cos(ax + at) \neq \cos ax$, gdyż okresem zasadniczym funkcji cosinus jest liczba 2π, która jest większa od liczby at, ponieważ $0 < t < \frac{2\pi}{a}$.

Zatem liczba $T = \frac{2\pi}{a}$ jest okresem zasadniczym $y = \cos ax$.

Polecenie 1

Czy funkcja $y = \cos ax + \cos bx$ jest okresowa, gdzie $a,\ b \neq 0$? Jaki jest jej okres zasadniczy?

Obejrzyj poniższą symulację interaktywną i spróbuj postawić hipotezę dla liczb $a,\ b \in \mathbb{Z}$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DCbaizDaR

Polecenie 2

Uzasadnij, że okresem zasadniczym funkcji $y = \cos 3x + \cos 2x$ jest $T = 2\pi$.

Polecenie 3

Uzasadnij, że $y = \cos ax + \cos bx$, gdzie $a,\ b \in \mathbb{N}_+$ jest funkcją okresową i podaj jej okres zasadniczy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Najmniejszą wartością funkcji $y = -2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ jest:

- 2
- -2
- -3
- 1
- -1
- 3

Ćwiczenie 2

Połącz w pary funkcję i zbiór jej miejsc zerowych.

$y = \cos 2x$	$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
$y = 3\lvert\cos x\rvert$	$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
$y = -2\cos 3x$	$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
$y = \cos^2 4x$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 3

Uporządkuj od największej do najmniejszej wartości.

- $\cos \frac{8\pi}{21}$
- $\cos 1$
- $\cos \frac{4\pi}{5}$
- $\cos \frac{\pi}{3}$
- $\cos \frac{5\pi}{4}$

Ćwiczenie 4

Wskaż funkcje, których okresem jest liczba $T = \pi$.

- [ ] $y = \cos(5x + 1)$
- [ ] $y = \cos 3x + \cos 5x$
- [ ] $y = \cos 2x$
- [ ] $y = \cos 4x + \cos 6x$
- [ ] $y = |2\cos(x - 2)| - 1$
- [ ] $y = 3\cos x + 2$
- [ ] $y = 3\cos(2x + 1) - 8$

Ćwiczenie 5

Połącz w pary funkcję i jej zbiór wartości.

$y = \frac{1}{\cos 3x - 4}$	$\langle -3, -1 \rangle$
$y = \left\lvert \cos 3x - \frac{1}{2} \right\rvert + 2$	$\langle -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5} \rangle$
$y = 2\cos^2 x - 2$	$\langle -2, 0 \rangle$
$y = \cos(3x - 5) - 2$	$\langle 2, \frac{7}{2} \rangle$

Ćwiczenie 6

Zaznacz wszystkie liczby dodatnie.

- [ ] $\cos \frac{23\pi}{2}$
- [ ] $\cos \frac{3}{2}$
- [ ] $\cos\left(-\frac{1149\pi}{100}\right)$
- [ ] $\cos \frac{20\pi}{13}$
- [ ] $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$
- [ ] $\cos(-2)$
- [ ] $\cos \frac{19\pi}{13}$

Ćwiczenie 7

Uzasadnij, że prosta o równaniu $x = \frac{3}{2} + \pi$ jest osią symetrii wykresu $y = 5\cos(3 - x) - 2$.

Ćwiczenie 8

Uzasadnij, że punkt o współrzędnych $\left(\frac{5\pi}{18}, 1\right)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres i własności funkcji cosinus

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;
Zakres rozszerzony 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rysuje wykres funkcji $y = \cos x$ oraz opisuje jej własności;
- analizuje i wykorzystuje wykres funkcji $y = \cos x$ do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- wykład;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Wykres i własności funkcji cosinus”, a następnie określa cele i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Aplet”, czyta treść polecenia nr 1 - „Czy funkcja $y = \cos ax + \cos bx$ jest okresowa, gdzie $a, b \neq 0$? Jaki jest jej okres zasadniczy? Obejrzyj poniższą symulację interaktywną i spróbuj postawić hipotezę dla liczb $a, b \in \mathbb{Z}$ ”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

- Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Aplet” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Wykres i własności funkcji cosinus”.