



Przykłady ciągów liczbowych skończonych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przykłady ciągów liczbowych skończonych

Źródło: Simon Basler, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Zapewne pamiętasz jeszcze wyliczanki towarzyszące w dzieciństwie nauce liczenia, czy języków obcych.

« Raz, dwa, trzy,

Pan Bogdan ma dwa psy.

Cztery, pięć, sześć,

Te psy lubią kości jeść.

Siedem, osiem, dziewięć

Kot siedzi na drzewie.

Dziesięć, jedenaście, dwanaście,

Zaraz pies kota gonić zacznie.

Raz, dwa, trzy

Koty lubią psy.

Cztery, pięć, sześć,

...

W tym materiale będziemy postępować trochę tak, jak w tych wyliczankach. Czyli zajmiemy się ciągami skończonymi. A więc takimi, których własności można określać dla wyrazów ustawionych „od początku” albo „od końca”.

Z ciągami skończonymi spotykamy się niemal codziennie. Wyrazami takich ciągów mogą być liczby oznaczające kolejne dni tygodnia, liczby oznaczające kolejne miesiące, czy godziny.

W matematyce ciągi skończone mają mniejsze znaczenie niż w życiu codziennym, bo matematycy nie lubią ograniczeń i starają się, aby odkryte zależności natychmiast uogólniać.

Twoje cele

- Określisz wyrazy danych ciągów liczbowych skończonych.
- Odkryjesz własności ciągów liczbowych znanych z historii matematyki.
- Zapiszesz wzór ogólny danego ciągu.

Przeczytaj

W tym materiale będziemy rozpatrywać ciągi liczbowe skończone, czyli ciągi określone w pewnym podzbiorze zbioru liczb naturalnych.

Definicja: Ciąg liczbowy

Ciąg, w którym wyrazy są liczbami, nazywamy **ciągiem liczbowym**.

Definicja: Ciąg skończony

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Przykład 1

Rozważmy ciąg (a_n) , którego wyrazy są liczbami k -cyfrowymi równymi sumie k -tych potęg swoich cyfr.

Wyrazami tego ciągu są na przykład liczby:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$

$$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$$

$$9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$$

$$54748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$$

$$9926315 = 9^7 + 9^7 + 2^7 + 6^7 + 3^7 + 1^7 + 5^7$$

Liczby te zwane są liczbami narcystycznymi.

Okazuje się, że istnieją dokładnie cztery liczby 3-narcystyczne, trzy liczby 4-narcystyczne, trzy liczby 5-narcystyczne.

Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$10^{k-1} \leq a_n \leq k \cdot 9^k.$$

Ponieważ $10^{k-1} > k \cdot 9^k$ dla $k \geq 61$, to stwierdzamy, że liczb narcystycznych jest skończona ilość.

Można udowodnić, że ciąg (a_n) , jest tylko 88-wyrazowy.

Wdzięcznym tematem do tworzenia skończonych ciągów liczbowych, są ciągi składające się z liczb pierwszych o określonych własnościach. Przy czym niektóre z tych ciągów, uważane dzisiaj za skończone, mogą, w miarę postępu badań nad tymi liczbami, okazać się nieskończone.

Przykład 2

Przykłady ciągów liczb pierwszych, których pierwszym wyrazem jest 3.

(3, 7, 11) – ciąg, w którym różnica między wyrazami jest równa 4,

(3, 11, 19) – ciąg, w którym różnica między wyrazami jest równa 8,

(3, 23, 43) – ciąg, w którym różnica między wyrazami jest równa 20.

Przykład 3

Rozważmy ciąg liczb pierwszych, mniejszych od 100, postaci $4k + 1$.

Kilka początkowych wyrazów tego ciągu:

5, 13, 17, 29, 37, 41, 73, 89

Każda z takich liczb jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych.

$$5 = 1^2 + 2^2$$

$$13 = 2^2 + 3^2$$

$$17 = 1^2 + 4^2$$

$$29 = 2^2 + 5^2$$

$$37 = 1^2 + 6^2$$

$$41 = 4^2 + 5^2$$

$$73 = 3^2 + 8^2$$

$$89 = 5^2 + 8^2$$

Skończone ciągi liczbowe można tworzyć, wykorzystując ciekawe własności liczb rzeczywistych.

Przykład 4

Niech a będzie okresem ułamka $\frac{1}{7}$.

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots = 0,(142857)$$

$$a = 142857$$

Rozważmy sześciowyrazowy ciąg (a_n) wielokrotności liczby a .

$$a_1 = 142857 \cdot 1 = 142857$$

$$a_2 = 142857 \cdot 5 = 714285$$

$$a_3 = 142857 \cdot 4 = 571428$$

$$a_4 = 142857 \cdot 6 = 857142$$

$$a_5 = 142857 \cdot 2 = 285714$$

$$a_6 = 142857 \cdot 3 = 428571$$

Każdy wyraz tego ciągu składa się z tych samych cyfr co liczba a . Cyfra 1 w zapisie dziesiętnym kolejnych wyrazów ciągu jest kolejno cyfrą setek tysięcy, dziesiątek tysięcy, jedności tysięcy, itd.

Zaobserwujmy inną ciekawą własność wyrazów ciągu (a_n) .

Dodajemy odpowiednio pogrupowane cyfry pierwszego wyrazu ciągu, mnożymy pierwszy wyraz przez 7.

$$1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27 \Rightarrow 2 + 7 = 9$$

$$14 + 28 + 57 = 99$$

$$142 + 857 = 999$$

$$142857 \cdot 7 = 999999$$

Wyniki kolejnych działań, to liczby, w których każda cyfra jest równa 9.

Przykład 5

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = 3^n - 1$.

Początkowe wyrazy ciągu:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 8$$

$$a_3 = 26$$

$$a_4 = 80$$

Zauważmy, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą parzystą. Zatem tylko pierwszy wyraz ciągu jest liczbą pierwszą.

W przedziale $\langle 1, 500 \rangle$ istnieje tylko dziesięć liczb naturalnych n takich, że lustrzane odbicie liczby a_n jest liczbą pierwszą. Są to liczby:

1, 6, 27, 43, 53, 61, 64, 174, 216, 268

Na przykład:

$$a_6 = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$$

Liczba lustrzana to 827 – jest to liczba pierwsza.

Tylko jedna liczba a_n jest potęgą liczby naturalnej, jest to liczba $3^2 - 1$.

Ciągi liczbowe, szczególnie te, których wyrazy są liczbami naturalnymi, mają zastosowanie też w obliczeniach geometrycznych.

Przykład 6

Trójkąt Herona, to taki trójkąt, którego długości boków, obwód i pole wyrażają się liczbami całkowitymi.

Każdy trójkąt pitagorejski jest trójkątem Herona. Przykładem trójkąta Herona, który nie jest trójkątem prostokątnym, jest trójkąt o bokach 5, 5, 6, którego pole jest równe 12. Trójkąt ten bowiem powstał z dwóch trójkątów pitagorejskich o bokach długości 3, 4, 5 i wspólnym boku długości 4.

Przykłady trójwyrazowych ciągów, których wyrazy są długościami boków trójkąta Herona.

(5, 4, 3) – obwód trójkąta 12, pole trójkąta 6,

(5, 8, 5) – obwód trójkąta 18, pole trójkąta 12,

(13, 12, 5) – obwód trójkąta 30, pole trójkąta 30,

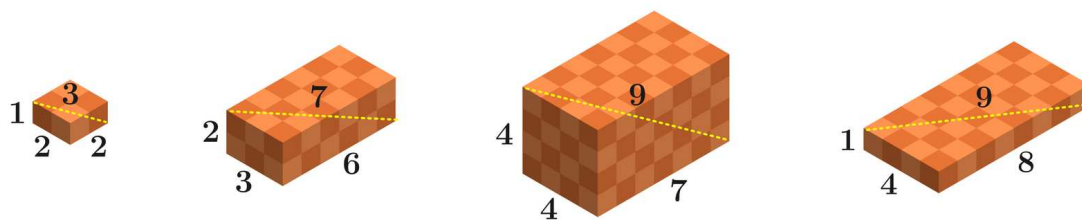
(13, 13, 10) – obwód trójkąta 36, pole trójkąta 60,

(15, 14, 13) – obwód trójkąta 42, pole trójkąta 84.

Przykład 7

Ciąg czwórek pitagorejskich, to ciąg, którego wyrazami są takie liczby całkowite a, b, c, d , że $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Geometrycznie można zinterpretować liczby a, b, c , jako długości boków prostopadłościanu, którego przekątna ma długość d .



Wzór opisujący czwórki pitagorejskie jest analogiczny do wzoru na stożek świetlny, którym posługują się fizycy. Przy okazji przypomnienie – stożek świetlny danego punktu czasoprzestrzeni, to zbiór punktów czasoprzestrzeni, których odległość czasoprzestrzenna od tego punktu wynosi zero.

Przykłady ciągów, których wyrazy są czwórkami pitagorejskimi.

$(2, 3, 6, 7)$; $(4, 4, 7, 9)$; $(6, 6, 7, 11)$

$(2, 10, 11, 15)$; $(4, 13, 16, 21)$; $(2, 10, 25, 27)$

$(10, 10, 23, 27)$; $(3, 16, 24, 29)$; $(4, 5, 20, 21)$

Słownik

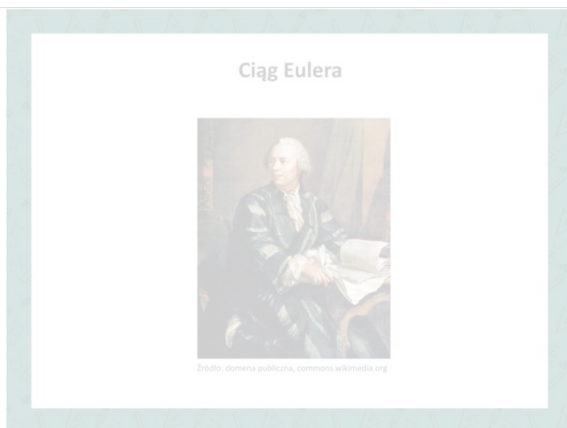
ciąg skończony

ciągiem skończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną pokazującą, jak teoria liczb wiąże się z obliczeniami geometrycznymi.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DrjkGnJ7Q>

Polecenie 2

Uzasadnij, że nie istnieje sześcián będący cegłą Eulera.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wyrazy trzywyrazowego ciągu $(3, k, 31)$ są liczbami pierwszymi. Różnica między kolejnymi wyrazami jest stała. Liczba k jest równa:

☐ 17

☐ 11

☐ 19

☐ 23

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wyrazy trzywyrazowego ciągu $(k, t, 43)$ są liczbami pierwszymi. Różnica między kolejnymi wyrazami jest równa 6. Zatem:

☐ $k + t = 28$

☐ $k + t = 43$

☐ $k + t = 59$

☐ $k + t = 68$

Ćwiczenie 3



Liczby 407, 8208, 93084 to liczby narcystyczne. Uzupełnij sumy, wpisując odpowiednie liczby.

$$407 = 4^3 + 0^3 + \boxed{}^3$$

$$8208 = 8^4 + \boxed{}^4 + 0^4 + 8^4$$

$$93084 = \boxed{}^5 + 3^5 + 0^5 + 8^5 + 4^5$$

Ćwiczenie 4



Istnieje dokładnie pięć trójkątów Herona, takich, że ich pola są równe ich obwodom. W pierwszej kolumnie podano długości dwóch boków z każdej trójki. Połącz te boki z odpowiadającą długością trzeciego boku.

15, 20

7

6, 29

8

6, 10

9

5, 12

13

10, 17

25

Ćwiczenie 5



Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe

	Prawda	Fałsz
Nie ma trójkątów Herona, których długości boków tworzą ciąg geometryczny.	☐	☐
Pole trójkąta Herona jest zawsze liczbą niepodzielną przez 6.	☐	☐
Istnieją dokładnie dwa trójkąty Herona, które są równoboczne.	☐	☐
Nie ma trójkąta Herona, którego jeden z boków ma długość 1 lub 2.	☐	☐
Obwód trójkąta Herona jest zawsze liczbą parzystą.	☐	☐

Ćwiczenie 6



Wyrazy podanych ciągów to długości boków prostopadłościanów, których przekątne wyrażone są liczbami całkowitymi. Uzupełnij zapisy, przyporządkowując każdej trójce odpowiednią długość przekątnej. Przeciągnij odpowiednią liczbę.

(1, 4, 8) $\Rightarrow$
(1, 2, 2) $\Rightarrow$
(2, 10, 11) $\Rightarrow$
(2, 6, 9) $\Rightarrow$
(3, 4, 12) $\Rightarrow$

Ćwiczenie 7



Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = 4^n - 3^n$. Znajdź dwie liczby pierwsze, będące wyrazami tego ciągu.

Ćwiczenie 8



Wyrazy ciągów $(1, 25, 49)$; $(9, 225, 441)$; $(25, 625, 1225)$; $(49, 1225, 2401)$ tworzone są według tej samej reguły. Odkryj tę regułę wiedząc, że wyrazy ciągów $(1, 25, 36)$; $(25, 81, 100)$ nie spełniają tej reguły.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przykłady ciągów liczbowych skończonych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wyrazy danych ciągów liczbowych skończonych
- odkrywa własności ciągów liczbowych znanych z historii matematyki
- zapisuje wzór ogólny danego ciągu
- bazuje na analogiach, tworząc nowe ciągi liczbowe i określając ich własności

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- pytajnik

- technika porównań binarnych
- analiza morfologiczna

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą pytań powtarzają wiadomości na temat ciągów – jeden z uczniów zadaje pytania i wskazuje ucznia, który ma na te pytania odpowiedzieć. Nauczyciel ewentualnie koryguje odpowiedzi.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach techniką porównań binarnych ustalają podobieństwa i różnice między ciągiem skończonym a nieskończonym.
2. Grupy zapoznają się z materiałami z sekcji „Przeczytaj” i z materiałami zawartymi w „Prezentacja multimedialna”.
3. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy morfologicznej – formułują wzorcowe problemy dotyczące ciągów skończonych (np. czy w każdym przypadku można zapisać wzór ogólny ciągu).
Następnie opracowują modelowy sposób rozwiązania problemu. W końcowej fazie rozszerzają problem, poszukując nowych rozwiązań i możliwości.
4. Prezentacja pracy grup – wspólne zapisanie problemów związanych z ciągami i modelowe (jeśli to możliwe) ich rozwiązanie.
5. Uczniowie w parach wykonują 3 dowolne z zaproponowanych ćwiczeń interaktywnych.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy grup przedstawiają najważniejsze elementy, jakie były omawiane w trakcie lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną można wykorzystać na zajęciach poświęconych ciągom liczbowym nieskończonym.