



## Logarytm ilorazu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

MS LOG.

**Logarytm ilorazu**

	8	9	12 3	4 5 6	7 8 9		0	1	2	3	4		
			5 9 13	17 21 26	30 34 38		<b>50</b>	6990	6998	7007	7016	7024	70
4	0334	0374	4 8 12	16 20 24	28 32 36		<b>51</b>	7076	7084	7093	7101	7110	71
			4 8 12	16 20 23	27 31 35		<b>52</b>	7160	7168	7177	7185	7193	72
2	0719	0755	4 7 11	15 18 22	26 29 33		<b>53</b>	7243	7251	7259	7267	7275	72
			3 7 11	14 18 21	25 28 32		<b>54</b>	7324	7332	7340	7348	7356	73
8	1072	1106	3 7 10	14 17 20	24 27 31		<b>55</b>	7404	7412	7419	7427	7435	74
			3 6 10	13 16 19	23 26 29		<b>56</b>	7482	7490	7497	7505	7513	75
7	1399	1430	3 7 10	13 16 19	22 25 29		<b>57</b>	7559	7566	7574	7582	7589	75
			3 6 9	12 15 19	22 25 28		<b>58</b>	7634	7642	7649	7657	7664	76
3	1703	1732	3 6 9	12 14 17	20 23 26		<b>59</b>	7709	7716	7723	7731	7738	77
			3 6 9	11 14 17	20 23 26		<b>60</b>	7782	7789	7796	7803	7810	78
9	1987	2014	3 6 8	11 14 17	19 22 25		<b>61</b>	7853	7860	7868	7875	7882	78
			3 6 8	11 14 16	19 22 24		<b>62</b>	7924	7931	7938	7945	7952	79
7	2253	2279	3 5 8	10 13 16	18 21 23		<b>63</b>	7993	8000	8007	8014	8021	80
			3 5 8	10 13 15	18 20 23		<b>64</b>	8062	8069	8075	8082	8089	80
9	2504	2529	3 5 8	10 12 15	17 20 22		<b>65</b>	8129	8136	8142	8149	8156	81
			2 5 7	9 12 14	17 19 21		<b>66</b>	8195	8202	8209	8215	8222	82
3	2742	2765	2 4 7	9 11 14	16 18 21								

Źródło: Sandid, dostępny w internecie: [www.pixabay.com](http://www.pixabay.com).

Podobno symbolika algebraiczna została zainspirowana szyfrogramami, czyli zaszyfrowanymi wiadomościami.



Hieroglify z Wielkiej Sali Hypostylowej w Karnaku (Seti I, XIII w. p.n.e.)

Źródło: dostępny w internecie: [commons.wikimedia.org](http://commons.wikimedia.org), domena publiczna.

Początki kryptografii sięgają zamierzchłych czasów. Starożytni Egipcjanie kodowali informacje za pomocą pisma obrazkowego, rozumianego jedynie przez wtajemniczonych. Juliusz Cezar szyfrował plany operacji wojennych, bankierzy szyfrowali wyniki operacji pieniężnych. Matematycy nie chcieli być gorsi i ciągle wymyślali nowe znaki i symbole, których znaczenie często skrzętnie ukrywali.

Jednak dzięki tym znakom i symbolom zapisywanie zawiłych twierdzeń matematycznych stawało się coraz krótsze i bardziej przejrzyste. W tym materiale poznamy jedno z takich twierdzeń, zapisanych za pomocą symboliki logarytmicznej.

### Twoje cele

- Udowodnisz wzór na logarytm ilorazu.
- Zastosujesz wzór na logarytm ilorazu przekształcając wyrażenia arytmetyczne.
- Zapiszesz różnicę logarytmów w postaci logarytmu jednomianu.

# Przeczytaj

---

Podamy teraz jedno z podstawowych twierdzeń dotyczących działań na logarytmach. W historii matematyki odegrało ono istotną rolę gdyż pozwalało zastępować dzielenie dużych liczb, odejmowaniem tych liczb, co było znacznie łatwiejsze do wykonania.

We wszystkich obliczeniach w tym materiale uwzględniać będziemy założenia wynikające z definicji logarytmu – podstawa logarytmu musi być liczbą dodatnią, różną od jedności, liczba logarytmowana musi być dodatnia. Pamiętać będziemy również, że w przypadku dzielenia dzielnik musi być liczbą różną od zera.

## Twierdzenie: Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeżeli  $a$  jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczby  $x, y$  są liczbami dodatnimi, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

*Dowód*

Założenie:

$a > 0, a \neq 0$  – podstawa logarytmu,

$x > 0, y > 0$  – liczby logarytmowane.

*Teza:*

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

**Dowód**

---

Oznaczmy:  $\log_a x = p, \log_a y = q$ .

Z definicji logarytmu wynika, że:

$$x = a^p$$

$$y = a^q$$

Dzielimy stronami otrzymane równości.

$$x : y = a^p : a^q$$

Z własności dzielenia potęg o tych samych podstawach wynika, że:

$$\frac{x}{y} = a^{p-q}$$

Korzystamy ponownie z definicji logarytmu.

$$\log_a \frac{x}{y} = p - q$$

Zastępujemy liczby  $p, q$  odpowiednimi logarytmami. Otrzymujemy tezę.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Co kończy dowód.

Możemy powiedzieć: **logarytm przy danej podstawie ilorazu liczb dodatnich jest równy różnicy logarytmów tych liczb przy tej samej podstawie.**

Zauważmy, że prawdziwy jest też wzór odwrotny.

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

Podamy teraz przykłady zastosowania [twierdzenia o logarytmie ilorazu](#).

### Przykład 1

Zapiszemy podane logarytmy w postaci różnicy liczby wymiernej i niewymiernej.

$$\log_2 \frac{8}{3} = \log_2 8 - \log_2 3 = 3 - \log_2 3$$

$$\log_3(9 : 5) = \log_3 9 - \log_3 5 = 2 - \log_3 5$$

$$\log_{0,1} 50 = \log_{0,1} \frac{100}{2} = \log_{0,1} 100 - \log_{0,1} 2 = -2 - \log_{0,1} 2$$

### Przykład 2

Zapiszemy różnice logarytmów w postaci logarytmu ilorazu i zapiszemy otrzymaną liczbę bez użycia logarytmu.

$$\log 20 - \log 2 = \log \frac{20}{2} = \log 10 = 1$$

$$\log_4 48 - \log_4 3 = \log_4 \frac{48}{3} = \log_4 16 = 2$$

$$(\log_{12} 1 - \log_{12} 24) - \log_{12} 6 = \log_{12} \left( \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{6} \right) = \log_{12} \frac{1}{144} = -2$$

### Przykład 3

Znajdziemy liczbę  $x$  taką, że  $1 + \log 2 + \log x = 3 - \log 2$ .

Zapisujemy liczby 1 i 3 za pomocą logarytmów.

$$\log 10 + \log 2 + \log x = \log 1000 - \log 2$$

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie iloczynu dla lewej strony równania i z twierdzenia o logarytmie ilorazu dla prawej strony równania.

$$\log(10 \cdot 2 \cdot x) = \log \frac{1000}{2}$$

Porównujemy liczby logarytmowane – korzystając z różnowartościowości funkcji logarytmicznej.

$$20x = 500$$

$$x = 25$$

Liczba 25 jest dodatnia (liczba logarytmowana musi być dodatnia), zatem spełnia warunki zadania.

Odpowiedź:

Szukana liczba to 25.

#### Przykład 4

Wiedząc, że  $\log_3 5 \approx 1,47$  i  $\log_3 2 \approx 0,63$ , obliczymy przybliżone wartości liczb  $\log_3 2,5$ ,  $\log_3 \frac{2}{5}$ ,  $\log_3 6\frac{1}{4}$ .

$$\log_3 2,5 = \log_3 \frac{5}{2} = \log_3 5 - \log_3 2 \approx 1,47 - 0,63 = 0,84$$

$$\log_3 \frac{2}{5} = \log_3 2 - \log_3 5 \approx 0,63 - 1,47 = -0,84$$

$$\log_3 6\frac{1}{4} = \log_3 \frac{25}{4} = \log_3 25 - \log_3 4 = 2 \cdot \log_3 5 - 2 \cdot \log_3 2$$

$$\log_3 6\frac{1}{4} \approx 2 \cdot 1,47 - 2 \cdot 0,63 = 2,94 - 1,26 = 1,68$$

#### Przykład 5

Wiedząc, że  $\log_2 3 = m$  obliczymy  $A = \log_2 \sqrt{13,5}$ .

Zapisujemy liczbę podpierwiastkową w postaci ułamka, który następnie skracamy.

$$A = \log_2 \sqrt{\frac{135}{10}} = \log_2 \sqrt{\frac{27}{2}}$$

Zapisujemy logarytm ilorazu w postaci różnicy logarytmów.

$$A = \log_2 \sqrt{27} - \log_2 \sqrt{2}$$

Ponieważ  $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ ,  $\sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}}$  i  $\log_2 2 = 1$ , stąd

$$A = \frac{1}{2} \cdot \log_2 27 - \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = \frac{1}{2} \cdot \log_2 3^3 - \frac{1}{2}$$

Podstawiając  $\log_2 3 = m$ , otrzymujemy

$$A = \frac{3}{2}m - \frac{1}{2}$$

## Słownik

**twierdzenie o logarytmie ilorazu**

Jeżeli  $a$  jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczby  $x, y$  są liczbami dodatnimi, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Rozwiąż najpierw samodzielnie podane przykłady, a następnie porównaj z prezentowanymi rozwiązaniami.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DSiL5Qh9D>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczący różnicy logarytmów o tych samych podstawach.


---

## Polecenie 2

Wykaż, że jeżeli  $x, y$  są liczbami dodatnimi, to  $\log xy + (\log x^2 y^2 - \log x^3 y^3) = 0$ .

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8

Wiadomo, że  $\log_2 7 = a$  i  $\log_2 3 = b$ . Wykaż, że  $\log_2 \frac{1}{882} = -1 - 2 \cdot (a + b)$ .



Ćwiczenie 9



Ćwiczenie 10



Ćwiczenie 11



Ćwiczenie 12



Ćwiczenie 13



Ćwiczenie 14



Ćwiczenie 15



Ćwiczenie 16



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Logarytm ilorazu

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- udowadnia wzór na logarytm ilorazu
- stosuje wzór na logarytm ilorazu przekształcając wyrażenia arytmetyczne
- zapisuje różnicę logarytmów w postaci logarytmu jednomianu
- określa historyczne znaczenie i przydatność wzoru na możliwość zamiany ilorazu na różnicę
- łączy umiejętności z kilku działów matematyki, ustalając strategię rozwiązania zadania logarytmicznego

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- technika 1 – 2
- myślenie przez analogię
- technika obiegu kart

## **Formy pracy:**

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie, korzystając z techniki 1 – 2 (jedno pytanie, odpowiada 2 uczniów – pierwszy wypowiada podpowiedź, drugi daje odpowiedź), odpowiadają na pytania nauczyciela przypominające wiadomości o logarytmach (w tym twierdzenie o logarytmie iloczynu), liczbach odwrotnych i potęgach o wykładnikach całkowitych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie w grupach pracują metodą *myślenie przez analogię*. Opierając się na znanym im już twierdzeniu o logarytmie iloczynu, powinni sformułować i udowodnić twierdzenie o logarytmie ilorazu. Mogą przy tym wykorzystać np. wiadomości na temat liczb odwrotnych lub potęg o ujemnych wykładnikach.
2. Po zapisaniu twierdzenia i dowodu, grupy porównują swoje zapisy z odpowiednimi zapisami w sekcji „Przeczytaj”. I ewentualnie modyfikują swoje ustalenia. Następnie analizują przykłady zapisane w sekcji „Przeczytaj” i animacji.
3. Teraz każda grupa przygotowuje jedno zadanie analogiczne do zawartych w przeczytanym materiale. Ułożone zadania grupy przekazują sobie nawzajem tak, aby każda z grup rozwiązała wszystkie zadania.
4. Zadania rozwiązywane są techniką obiegu kart. Czyli uczniowie danej grupy dopisują kolejne kroki rozwiązań.

### **Faza podsumowująca:**

1. Podsumowaniem zajęć powinna być dyskusja, w wyniku której przedstawiciele grup prezentują dowody sformułowanego twierdzenia (jeśli są inne od zawartego w sekcji

„Przeczytaj”), popełnione błędy lub odwrotnie – pomysły, które pozwalają na wykonywanie efektywniejszych obliczeń na logarytmach.

2. Końcowy element to refleksje nauczyciela na temat pracy uczniów i ocena prac grup.

**Praca domowa:**

Uczniowie mają za zadanie rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

**Materiały pomocnicze:**

[Działania na logarytmach. Przykłady](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Animacja jest dobrym materiałem do krótkiego powtórzenia materiału na początku lekcji poświęconej działaniom na logarytmach.