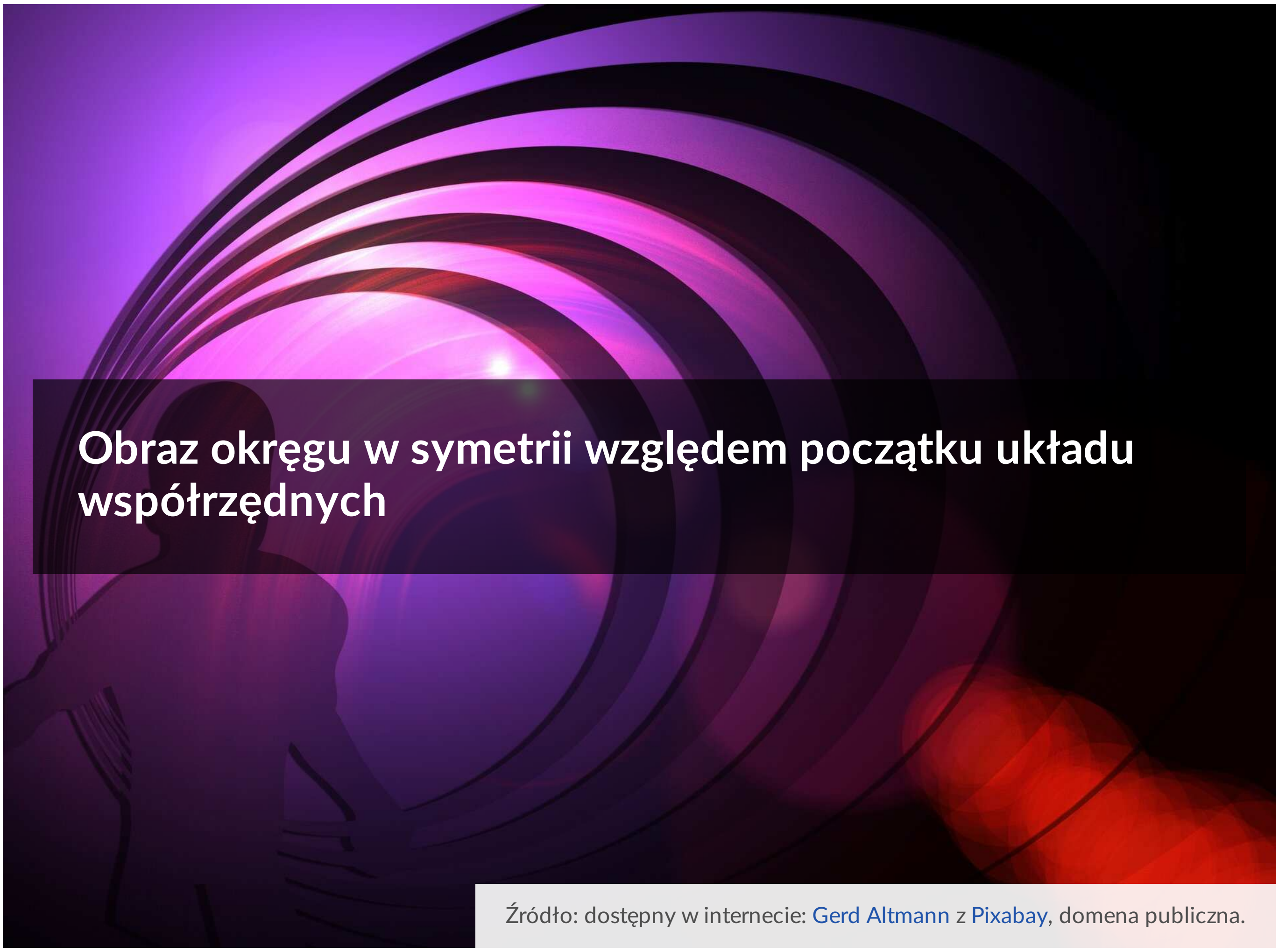
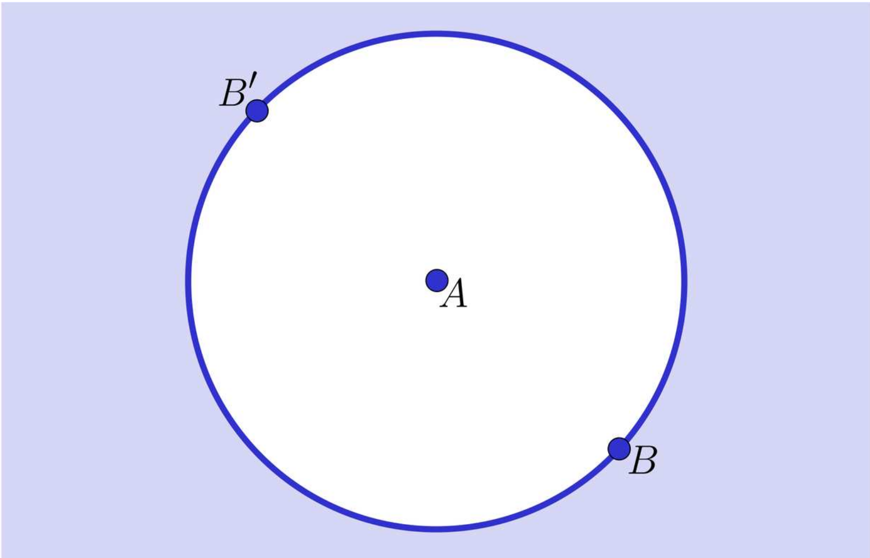
Obraz okręgu w symetrii względem początku układu współrzędnych

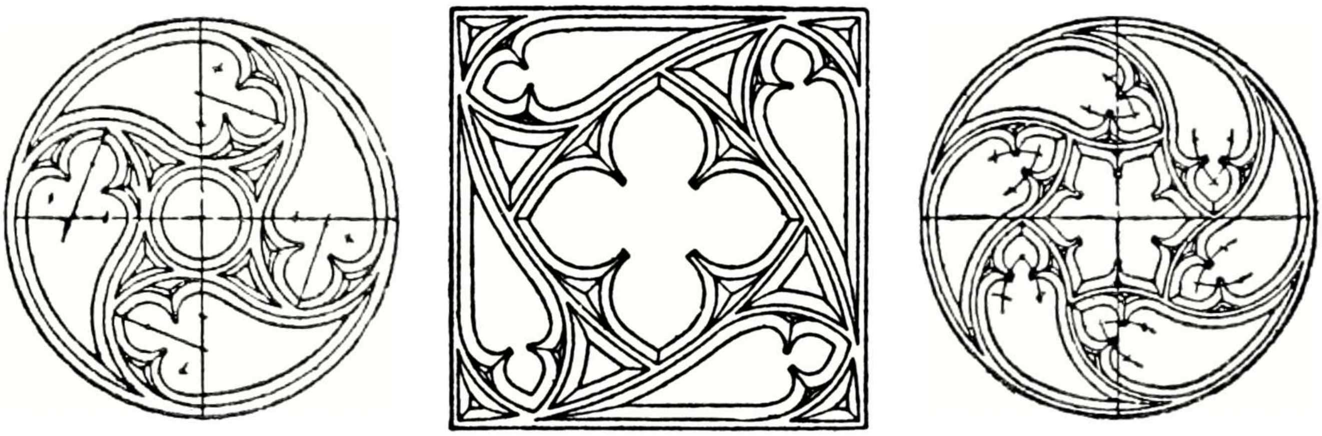


Obraz okręgu w symetrii względem początku układu współrzędnych

Źródło: dostępny w internecie: Gerd Altmann z Pixabay, domena publiczna.

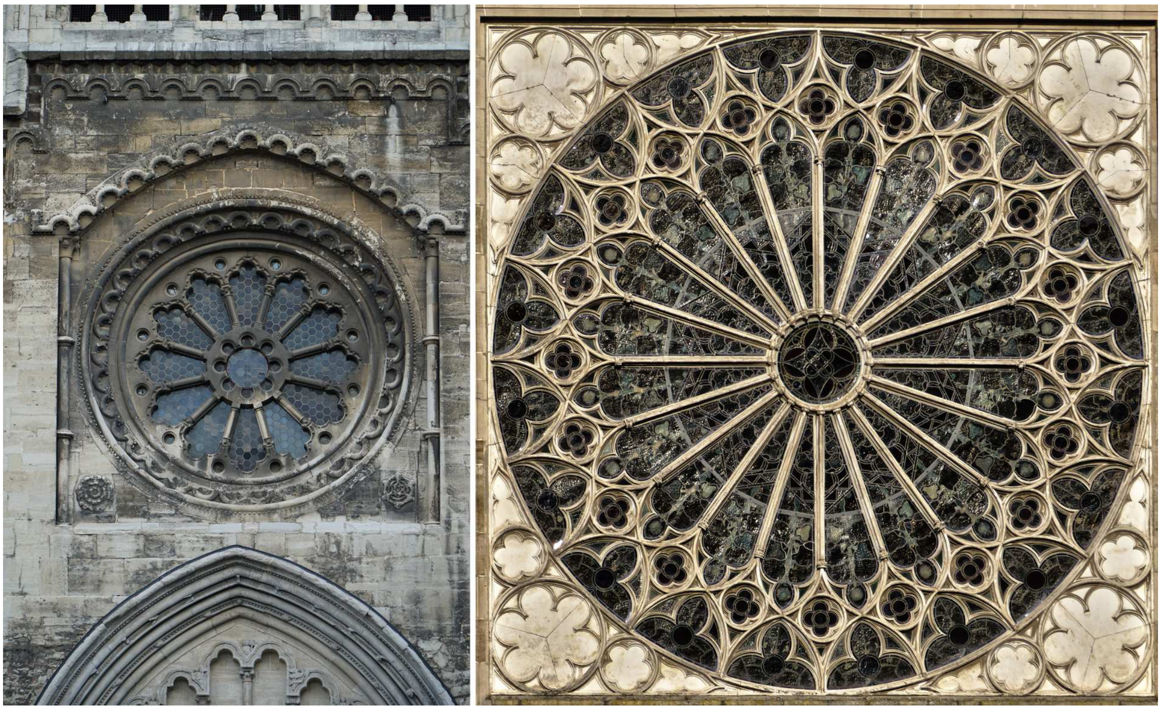


Symetrię środkową spotykamy w przyrodzie oraz w architekturze, np. często wykorzystywany motyw architektoniczny zwany rybim pęcherzem



Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

czy rozety.



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Otwierający obraz też powstał dzięki symetrii środkowej względem punktu A.

Znając pojęcie symetrii środkowej poznasz jej zastosowanie w znajdowaniu obrazów okręgów.

Twoje cele

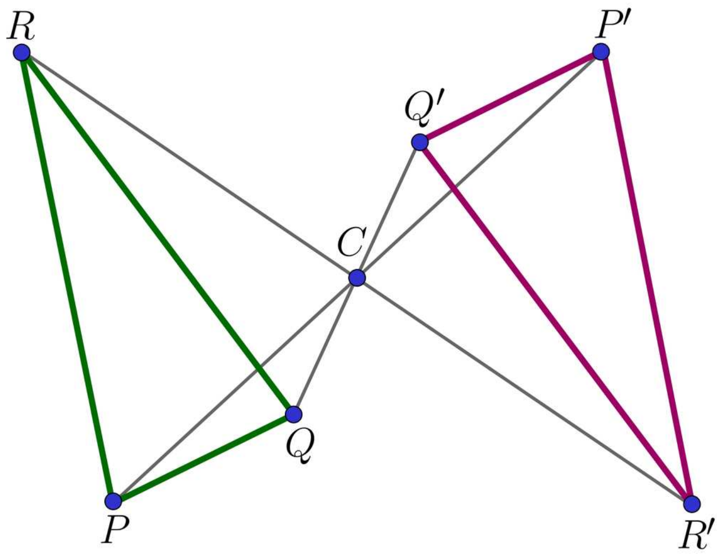
- Określisz zależności między współrzędnymi punktu i jego obrazu w symetrii względem początku układu współrzędnych.
- Określisz zależności między współrzędnymi punktu i jego obrazu w symetrii względem dowolnego punktu.

- Wyznaczysz równanie obrazu okręgu w symetrii względem początku układu współrzędnych.

Przeczytaj

Już wiesz

Symetrią środkową względem punktu C nazywamy przekształcenie geometryczne, w którym obrazem każdego punktu A, $A \neq C$, jest taki punkt A', dla którego punkt C jest środkiem odcinka AA'. Obrazem punktu C jest ten sam punkt (punkt stały). Symetrię środkową względem punktu C oznaczamy S_C.



$$S_C(P) = P\text{'}$$

$$S_C(Q) = Q\text{'}$$

$$S_C(R) = R\text{'}$$

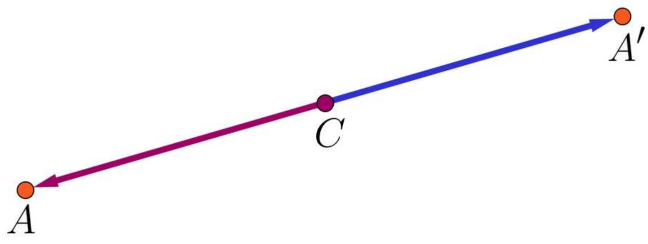
Punkt C nazywamy środkiem symetrii.

Z użyciem wektorów definicję symetrii środkowej możemy zapisać następująco:

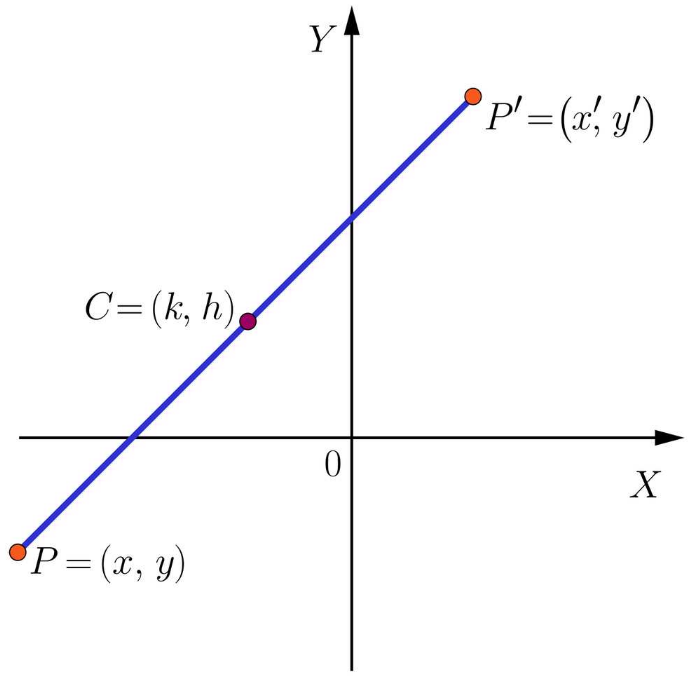
Symetrią środkową na płaszczyźnie względem punktu C nazywamy przekształcenie geometryczne, w którym każdemu punktowi A leżącemu na płaszczyźnie przyporządkowujmy taki punkt A', że

$$\overrightarrow{CA\text{'}} = -\overrightarrow{CA}$$

Punkt C nazywamy środkiem symetrii tego przekształcenia.



Niech punkt $P' = (x', y')$ będzie obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii środkowej o środku $C = (k, h)$.



Skoro C jest środkiem odcinka PP', to

$$\frac{x+x'}{2} = k \text{ i } \frac{y+y'}{2} = h$$

Stąd

$$\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = 2h - y \end{cases}$$

Zatem obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii środkowej o środku $C = (k, h)$ jest punkt

$$P' = (2k - x, 2h - y)$$

> **Uwaga!**
>
> Jeśli $C = (0, 0)$, to

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Są to równania symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych.
Dwa punkty są symetryczne do siebie względem początku układu współrzędnych, gdy odpowiednie współrzędne tych punktów są liczbami przeciwnymi.

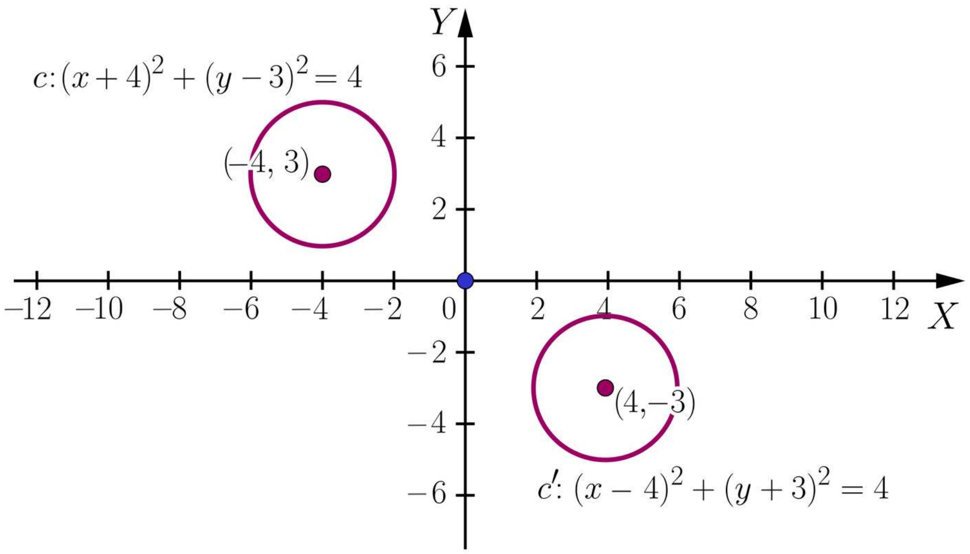
Obrazem okręgu o środku w punkcie $S = (a,\ b)$ i promieniu długości r w symetrii względem początku układu współrzędnych jest okrąg o środku w punkcie $S' = (-a,\ -b)$ i promieniu długości r.

Przykład 1

Wyznaczymy równanie obrazu okręgu o równaniu $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Środek tego okręgu ma współrzędne $(-4,\ 3)$. Obrazem tego środka w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt o współrzędnych będących liczbami przeciwnymi do danych, czyli $(4,\ -3)$. Równanie okręgu symetrycznego ma zatem postać: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$.



Przykład 2

Wyznaczymy równanie obrazu okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Wyznaczymy najpierw współrzędne środka tego okręgu i długość jego promienia. Korzystamy z równania ogólnego okręgu: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$:

$$\begin{cases} -2a = 2 \\ -2b = -10 \\ c = 10 \\ r = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 10 \\ r = \sqrt{1^2 + 5^2 - 10} = \sqrt{16} = 4 \end{cases}$$

Zatem środkiem danego okręgu jest punkt $S = (-1;\ 5)$ a jego promień ma długość $r = 4$
.

Obrazem środka S w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest zatem punkt o współrzędnych $(1;\ \ -5)$. Równanie okręgu symetrycznego ma zatem postać: $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 16$.

Przykład 3

Do okręgu o należą punkty $A = (0,\ \ -1)$; $B = (-4,\ 3)$; $C = (-3,\ 0)$. Wyznaczymy równanie obrazu tego okręgu w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Wyznaczymy współrzędne środka $(a; b)$ tego okręgu i długość jego promienia r. Ponieważ punkty A, B i C należą do okręgu, to:

$$\begin{cases} (0-a)^2 + (-1-b)^2 = r^2 \quad (1) \\ (-4-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \quad (2) \\ (-3-a)^2 + (0-b)^2 = r^2 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 + 2b + b^2 = r^2 & (1) \\ 16 + 8a + a^2 + 9 - 6b + b^2 = r^2 & (2) \\ 9 + 6a + a^2 + b^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

Odejmujemy stronami równania (1) i (3):

$1 + 2b - 9 - 6a = 0$

$2b = 6a + 8$

$b = 3a + 4 \ \ (4)$

Odejmujemy stronami równania (2) i (3):

$25 + 8a - 6b - 9 - 6a = 0$

$2a - 6b = -16$

$a - 3b = -8 \ \ (5)$

Podstawiamy równanie (4) do równania (5):

$a - 3 \cdot (3a + 4) = -8$

$a - 9a - 12 = -8$

$-8a = 4$

$a = -\frac{1}{2}$

Zatem:

$b = \frac{5}{2}$

Środek okręgu w symetrii względem początku układu współrzędnych ma współrzędne: $\left(\frac{1}{2}, \ -\frac{5}{2}\right)$.

Wyznaczamy kwadrat długości jego promienia, korzystając z równania (1):

$r^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 + 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 6 + \frac{25}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$

Równanie obrazu okręgu ma postać: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

Przykład 4

Okrąg o równaniu $(x + 8)^2 + (y + 2)^2 = 3$ przekształcamy najpierw przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych, a następnie przez symetrię środkową względem punktu $C = (1, \ 2)$. Wyznaczymy równanie obrazu tego okręgu po obydwu przekształceniach.

Rozwiązanie

Środek okręgu ma współrzędne $S = (-8, \ -2)$, zatem obraz środka tego okręgu w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych ma współrzędne $S' = (8, \ 2)$.

Wyznaczymy teraz współrzędne punktu S' w symetrii względem punktu $C = (1,\ 2)$. Ponieważ

$$\begin{cases} x\text{'} = 2k - x \\ y\text{'} = 2h - y \end{cases}$$

więc

$$\begin{cases} x\text{'} = 2 \cdot 1 - 8 \\ y\text{'} = 2 \cdot 2 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\text{'} = -6 \\ y\text{'} = 2 \end{cases}$$

Zatem równanie okręgu ma postać:

$(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 3.$

Przykład 5

Punkt $P\text{'} = (2,\ 4)$ jest obrazem punktu $P = (-6,\ 8)$ w symetrii środkowej względem punktu C. Wyznaczymy równanie ogólne obrazu okręgu o środku w punkcie C i promieniu długości $r = \sqrt{2} - 1$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Wyznaczymy najpierw współrzędne punktu C.

$$\begin{cases} 2 = 2k - (-6) \\ 4 = 2h - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 2k + 6 \\ 12 = 2h \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = 2k \\ h = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = -2 \\ h = 6 \end{cases}$$

Zatem środkiem okręgu jest punkt $C = (-2,\ 6)$.

Obrazem punktu C w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt $C\text{'} = (2,\ \ -6)$.

Wyznaczamy równanie ogólne okręgu o środku w punkcie C' i promieniu długości $r = \sqrt{2} - 1$:

$(x-2)^2+(y+6)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

$x^2-4x+4+y^2+12y+36=2-2\sqrt{2}+1$

$x^2+y^2-4x+12y+37+2\sqrt{2}=0$

Słownik

symetria środkowa względem punktu C

przekształcenie geometryczne, w którym obrazem każdego punktu A, $A \neq C$, jest taki punkt A', dla którego punkt C jest środkiem odcinka AA'

równanie ogólne okręgu

równanie ogólne okręgu o środku w punkcie $S=(a,\ b)$ i promieniu długości r:

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \text{ i } r=\sqrt{a^2+b^2-c}$$

Aplet

Polecenie 1

W kolejnych dwóch krokach apletu obserwuj, jak zmienia się równanie okręgu $o_1:\ (x+4)^2+(y-1)^2=4$ w symetrii względem punktów $(0,\ 0)$ i $(1;\ 2)$.

Następnie, na prostej przechodzącej przez punkty $(0,0)$ i $(1;\ 2)$ zmieniaj położenie punktu S i obserwuj, jak zmienia się położenie środka obrazu okręgu o_1 w symetrii względem tego punktu.

Zauważ, że środki obrazów okręgu są współliniowe oraz że prosta przechodząca przez punkty $(0,0)$ i $(1;\ 2)$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez środki obrazów okręgu o_1.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DwFgcj3wz

Polecenie 2

Na podstawie apletu podaj współrzędne środka obrazu okręgu $o_1 : (x+4)^2 + (y-1)^2 = 4$ w symetrii względem punktu

a) $S = (-1;\ -2)$;

b) $S = (2;\ 4)$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź. Punktem symetrycznym do punktu $(-997,\ 2020)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt:

- $(2020,\ -997)$
- $(997,\ -2020)$
- $(-997,\ -2020)$
- $(997,\ 2020)$

Ćwiczenie 2

Znajdź środek symetrii C, w której punkt P’ jest obrazem środka okręgu o i połącz je w pary.

$o: \left(x-3+\sqrt{5}\right)^2+(y+2)^2=10$ $P’=\left(\sqrt{5},\ 4\right)$	$C=\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$
$o: (x+2)^2+(y-5)^2=8$ $P’=(-4,\ -3)$	$C=(-3,\ 1)$
$o: (x+10)^2+(y-2)^2=2$ $P’=\left(10+2\sqrt{5},\ 4\sqrt{5}-2\right)$	$C=\left(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right)$

Ćwiczenie 3

Punkty $A = \left(\frac{-10+3\sqrt{2}}{2},\ \frac{6+3\sqrt{2}}{2}\right)$ i $B = \left(\frac{-10-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{6-3\sqrt{2}}{2}\right)$ są punktami symetrycznymi pewnego okręgu względem jego środka. Przeciągnij w wyznaczone miejsce współrzędne środka tego okręgu.

$C =$ ☐

$(-3,\ 5)$ | $(-5,\ -3)$ | $(-5,\ 3)$ | $(5,\ -3)$

Ćwiczenie 4

Zaznacz współrzędne punktów, które są obrazami środka okręgu $o: (x+10)^2 + (y-2)^2 = 16$ w symetrii środkowej względem punktu C:

$C = (0,\ 2)$	$C = (1,\ 2)$	$C = (0,\ 0)$
$P' = (10,\ -2)$ ☐	$P' = (12,\ -2)$ ☐	$P' = (10,\ 2)$ ☐
$P' = (10,\ 2)$ ☐	$P' = (12,\ 2)$ ☐	$P' = (-10,\ -2)$ ☐
$P' = (-10,\ 2)$ ☐	$P' = (-12,\ -2)$ ☐	$P' = (10,\ -2)$ ☐

Ćwiczenie 5

Okrąg o równaniu $(x-4)^2 + (y-10)^2 = 1$ jest obrazem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ w symetrii względem punktu o współrzędnych

- ○ $(2,\ 5)$
- ○ $(5,\ 5)$
- ○ $(2,\ 2)$
- ○ $(5,\ 2)$

Ćwiczenie 6

Okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y+2)^2=4$ jest obrazem okręgu o równaniu $(x+3)^2+(y-3)^2=4$ w pewnej symetrii środkowej. Środek symetrii tych okręgów leży w układzie współrzędnych

- na osi Y
- w ćw. I
- w ćw. II
- na osi X

Ćwiczenie 7

Wyznacz równanie obrazu okręgu o środku $S=(1,\ -2)$ i promieniu $r=1$ w symetrii środkowej względem punktu $C=(-2,\ 3)$.

Ćwiczenie 8

Okrąg o równaniu $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $C=(3,\ 1)$. Napisz równanie otrzymanego obrazu. Podaj ilustrację graficzną.

Dla nauczyciela

Autor: Janusz Karkut

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obraz okręgu w symetrii względem początku układu współrzędnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne i informatyczne;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje równania symetrii względem początku układu współrzędnych;
- podaje równania symetrii względem dowolnego punktu;
- wyznacza równanie obrazu okręgu w symetrii względem początku układu współrzędnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu bądź jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybranego ucznia o przypomnienie równania okręgu w postaci kanonicznej i w postaci ogólnej.
2. Metodą burzy mózgów uczniowie przypominają definicję symetrii środkowej.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz określa kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie obserwują, jak zmienia się równanie okręgu w symetrii względem wskazanych punktów w układzie współrzędnych.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 1–5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują pozostałe zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Symetria względem punktu

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać materiał z sekcji „Aplet” do powtórzenia przed sprawdzianem.