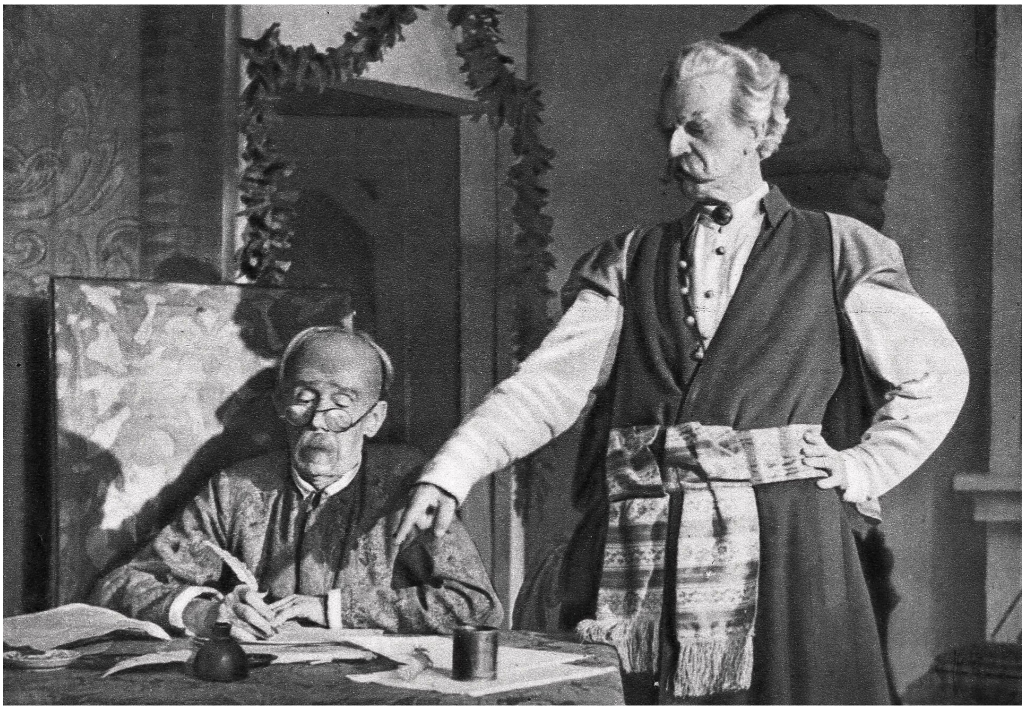
Zdarzenia losowe niezależne

Źródło: dostępny w internecie: maxpixel.net, domena publiczna.

Często wydaje nam się, że nie mamy wpływu na pewne wydarzenia, które dotyczą nas bezpośrednio.

Uważamy wręcz, że to nieunikniony los wytycza ścieżki naszej drogi życiowej. Dla niektórych jest to dobre wytłumaczenie, aby nie podejmować żadnych działań, a los niech za nas zdecyduje. Dla innych zdanie się na los, to maskowanie pokrętnych poczynań. Przykładem może być rejent Milczek, postać literacka występująca w komedii A. Fredry „*Zemsta*”, który tłumaczy swoje postępowanie zrządzeniem losu.



Ludwik Solski jako Dyndalski (po lewej) i Jerzy Leszczyński jako Cześnik Maciej Raptusiewicz (po prawej) w sztuce *Zemsta*.
Teatr im. Juliusza Słowackiego w Krakowie, reżyseria Teofil Trzciński.
Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

> Co los spuści, przyjąć trzeba;
> Niech się dzieje wola Nieba.
>
> Aleksander Fredro „*Zemsta*"

W matematyce też spotykamy się ze zdarzeniami losowymi. Choć w kontekście bardziej teoretycznym niż praktycznym. W tym materiale poznamy jedno z najważniejszych pojęć rachunku prawdopodobieństwa związanego ze zdarzeniami losowymi – zdarzenia losowe niezależne. Być może przeczytawszy o zdarzeniach niezależnych, zastanawiasz się, czy są też zdarzenia zależne. Odpowiedź i na to pytanie znajdziesz, analizując prezentowany materiał.

Twoje cele

- Sprawdzisz, czy dane zdarzenia są niezależne czy zależne.
- Obliczysz iloczyn prawdopodobieństw zdarzeń losowych.
- Obliczysz prawdopodobieńswtwo iloczynu zdarzeń losowych.
- Uzasadnisz własności prawdopopodobieństwa iloczynu zdarzeń losowych.

Przeczytaj

Prawdopodobieństwo iloczynu dwóch zdarzeń

Przekształcając wzór $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ na prawdopodobieństwo warunkowe dwóch zdarzeń A, B takich, że $P(B) > 0$ otrzymujemy wzór na prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Jeśli $P(A) > 0$ to możemy również zapisać $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Wzór na prawdopodobieństwo iloczynu dwóch zdarzeń

Niech $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$. Wtedy:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$, jeśli $P(B) > 0$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$, jeśli $P(A) > 0$

Przykład 1

Z talii 52 kart wyciągamy kolejno dwie karty bez zwracania. Obliczymy prawdopodobieństwo, że obie wylosowane karty będą asami.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że pierwsza wylosowana karta będzie asem,
B – zdarzenie polegające na tym, że druga wylosowana karta będzie asem.

Wtedy $A \cap B$ to zdarzenie polegające na tym, że pierwsza i druga wylosowana karta będą asami.

W talii złożonej z 52 kart są cztery asy, zatem:

$P(A) = \frac{4}{52}$

Po wylosowaniu asa, w talii zostało tylko 51 kart, w tym trzy asy, stąd:

$P(B/A) = \frac{3}{51}$

Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B jest równe:

$P(A \cap B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch asów w kolejnych losowaniach jest równe $\frac{1}{221}$.

Przykład 2

Łucznik trafia w tarczę z prawdopodobieństwem $0,4$, przy czym jest 60% szansy na to, że jeśli trafi w tarczę, to trafi w środek tarczy. Obliczymy, jakie jest prawdopodobieństwo, że strzelec trafi w środek tarczy.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że strzelec trafi w środek tarczy,
B – zdarzenie polegające na tym, że strzelec trafi w tarczę.

$P(B) = 0,4$

$P(A/B) = 0,6$

Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń otrzymujemy:

$P(A \cap B) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że strzelec trafi w środek tarczy jest równe $0,24$.

Zdarzenia niezależne

Zawodnicy A i B rzucają piłkami do kosza. Wynik rzutu zawodnika A nie zależy od wyniku rzutu zawodnika B i odwrotnie. Rezultaty rzutów są od siebie niezależne.

Jeżeli $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ i zajście zdarzenia A nie zależy od zajścia zdarzenia B, to o takich zdarzeniach mówimy, że są niezależne.

Wówczas $P(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, czyli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definicja: Zdarzenia losowe niezależne

Zdarzenia $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ nazywamy niezależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Z powyższej definicji wynika, że aby sprawdzić, czy dane zdarzenia A i B są niezależne, wystarczy sprawdzić, czy zachodzi równość $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Przykład 3

Spośród liczb naturalnych od 1 do 50 losujemy jedną liczbę.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 8,

B – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 10.

Zauważmy, że liczba 40 jest podzielna zarówno przez 8, jak i przez 10, więc przypuszczamy, że zdarzenia A i B nie są niezależne.

Sprawdzimy nasze przypuszczenia, obliczając prawdopodobieństwa odpowiednich iloczynów.

Zdarzeniu A sprzyjają liczby:

8, 16, 24, 32, 40, 48.

Zatem: $P(A) = \frac{6}{50}$.

Zdarzeniu B sprzyjają liczby:

10, 20, 30, 40, 50.

Zatem: $P(B) = \frac{5}{50}$.

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyja liczba 40.

Zatem: $P(A \cap B) = \frac{1}{50}$.

Wtedy:

$P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{50} \cdot \frac{5}{50} = \frac{30}{2500} \neq \frac{1}{50}$

Czyli: $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$

Zdarzenia A i B nie są niezależne. O takich zdarzeniach mówimy, że są **zależne**.

Przykład 4

W koszyku jest 10 grzybów, w tym 6 dobrych i 4 robaczywe. Z koszyka wypadły dwa grzyby. Sprawdzimy, czy niezależne są zdarzenia:

A – wypadł co najwyżej jeden grzyb dobry,
B – wypadł co najwyżej jeden grzyb robaczywy.

Z koszyka wypadły dwa grzyby spośród dziesięciu, które znajdowały się w koszyku.

$$|\Omega| = \binom{10}{2} = 45$$

Zdarzeniu A sprzyja wypadnięcie dwóch grzybów robaczywych lub jednego dobrego i jednego robaczywego.

$$|A| = \binom{4}{2} + \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1} = 6 + 24 = 30$$

Zdarzeniu B sprzyja wypadnięcie dwóch dobrych grzybów lub wypadnięcie jednego grzyba dobrego i jednego robaczywego.

$$|B| = \binom{6}{2} + \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1} = 15 + 24 = 39$$

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyja wypadnięcie jednego grzyba dobrego i jednego robaczywego.

$$|A \cap B| = \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1} = 24$$

Wynika z tego, że $P(A) \cdot P(B) = \frac{30}{45} \cdot \frac{39}{45}$ i $P(A \cap B) = \frac{24}{45}$.

Czyli: $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$.

Zdarzenia A i B są zależne.

Korzystając z prawdopodobieństwa warunkowego, definicję zdarzeń niezależnych można określić nieco inaczej.

Definicja: Dwa zdarzenia losowe niezależne

- Niech $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, gdy $P(A/B) = P(A)$.
- Niech $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ i $P(A) > 0$. Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, gdy $P(B/A) = P(B)$.

Przykład 5

Na przystanku Zakładowa – Fabryczna stają dwa miejskie autobusy – autobus linii 64 i autobus linii 75. Autobusy te jeżdżą niezależnie od siebie. Prawdopodobieństwo, że w ciągu najbliższych pięciu minut nadjedzie autobus linii 64 jest równe $0,6$. Prawdopodobieństwo, że w ciągu najbliższych pięciu minut nadjedzie autobus linii 75 jest równe $0,3$. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że w ciągu najbliższych pięciu minut nadjedzie co najmniej jeden z tych autobusów.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że nadjedzie co najmniej jeden autobus,
B – zdarzenie polegające na tym, że nie nadjedzie żaden autobus.

Najpierw obliczymy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B.

Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu najbliższych pięciu minut nie nadjedzie autobus linii 64 jest równe $1 - 0,6 = 0,4$.

Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu najbliższych pięciu minut nie nadjedzie autobus linii 75 jest równe $1 - 0,3 = 0,7$.

Zatem: $P(B) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$.

Zauważmy, że zdarzenia A i B są zdarzeniami przeciwnymi.

Czyli:

$P(A) = 1 - P(B)$

$P(A) = 1 - 0,28 = 0,72$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu najbliższych pięciu minut nadjedzie co najmniej jeden z autobusów jest równe $0,72$.

Przykład 6

Zdarzenia $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ są niezależne i $P(A) = \frac{1}{3}$ i $P(B) = \frac{3}{5}$. Obliczymy $P(A \cup B)$.

Przekształcamy wzór na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, uwzględniając równość

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{11}{15}$

Podamy teraz ważne twierdzenie, określające niektóre własności zdarzeń niezależnych. Udowodnimy jedną z podanych równości. Pozostałe równości pozostawiamy Tobie do udowodnienia.

Twierdzenie: Zdarzenia A i B są niezależne

Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to również niezależne są zdarzenia:

A i B'

A' i B

A' i B'

Dowód

Udowodnimy ostatni z tych związków. Mamy wykazać, że:

$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$$

Skorzystamy ze wzorów de Morgana i ze wzoru na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

$$P(A' \cap B') = P\left[(A \cup B)'\right] = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A' \cap B') = [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)] = P(A') \cdot P(B')$$

Przykład 7

Dwaj strzelcy strzelają do tej samej tarczy. Prawdopodobieństwo, że pierwszy trafi w tarczę jest równe $0,7$, a prawdopodobieństwo, że drugi trafi w tarczę jest równe $0,6$. Prawdopodobieństwa trafienia w tarczę przez każdego ze strzelców są zdarzeniami niezależnymi.

Obliczymy prawdopodobieństwo, że tarcza zostanie raz trafiona.

Oznaczmy:
A – pierwszy strzelec trafi w tarczę,
B – drugi strzelec trafi w tarczę,
C – tarcza zostanie trafiona dokładnie raz.

Zdarzenie C zajdzie, gdy pierwszy strzelec trafi, a drugi nie trafi lub odwrotnie – pierwszy strzelec spudłuje, a drugi trafi.

Na podstawie powyższego twierdzenia wnioskujemy, że zdarzenia A i B' oraz A' i B są niezależne.

Zatem:

$P(C) = 0,7 \cdot (1 - 0,6) + (1 - 0,7) \cdot 0,6 = 0,46$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że tarcza zostanie trafiona dokładnie raz jest równe $0,46$.

Pojęcie niezależności dwóch zdarzeń losowych można uogólnić na dowolną skończoną ich liczbę. My ograniczymy się tylko do trójki zdarzeń losowych.

Definicja: Trzy zdarzenia losowe niezależne

Dane są zdarzenia $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$. Zdarzenia A, B i C nazywamy zdarzeniami niezależnymi, jeżeli zdarzenia A i B, A i C, B i C są niezależne i $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Zatem trzy zdarzenia są niezależne (lub stanowią niezależny układ zdarzeń), jeśli:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ i
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ i
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ i
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Przykład 8

Rzucamy jednocześnie trzema monetami. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że na każdej monecie wypadnie orzeł.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że na pierwszej monecie wypadł orzeł,
B – zdarzenie polegające na tym, że na drugiej monecie wypadł orzeł,
C – zdarzenie polegające na tym, że na trzeciej monecie wypadł orzeł.

Wtedy:

$A \cap B \cap C$ – zdarzenie polegające na tym, że na każdej monecie wypadł orzeł.

Zdarzenia A, B, C są wzajemnie niezależne i $P(A) = P(B) = P(C) = 0,5$.

Zatem:

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$P(A \cap B \cap C) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że na każdej monecie wypadnie orzeł jest równe $0,125$.

Słownik

zdarzenia losowe niezależne

zdarzenia $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ nazywamy niezależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem, który przybliży Ci jedno z kluczowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa – pojęcie zdarzeń niezależnych. Zwróć uwagę na różnice między zdarzeniami niezależnymi a zależnymi.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DUto2saHg

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej niezależnych zdarzeń losowych.

Polecenie 2

Rzucamy dwa razy monetą. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł. Niech B oznacza zdarzenie, że w drugim rzucie wypadła reszka. Ustal, czy zdarzenia A, B są niezależne.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Rzucamy jednocześnie trzema kostkami do gry. Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na tym, że na każdej kostce wypadła nieparzysta liczba oczek, przez B zdarzenie polegające na tym, że suma liczb oczek, które wypadły na trzech kostkach jest równa 5. Wykaż, że zdarzenia A i B są zależne.

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Wykaż, że jeżeli $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $P(B) > 0$, $P(B\prime) > 0$ i $P(A/B) = P(A/B\prime)$ to zdarzenia A i B są niezależne.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zdarzenia losowe niezależne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprawdza, czy dane zdarzenia są niezależne czy zależne
- oblicza iloczyn prawdopodobieństw zdarzeń losowych
- oblicza prawdopodobieńswtwo iloczynu zdarzeń losowych
- uzasadnia własności prawdopopodobieństwa iloczynu zdarzeń losowych
- analizuje zadania z kontekstem realistycznym i dobiera odpowiedni model matematyczny do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- rybki w akwarium
- praca z ekspertem

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. W domu wybrana grupa uczniów – ekspertów – miała za zadanie przygotowania mini wystąpień mających na celu przypomnienie wzorów, twierdzeń i sposobów wyznaczania prawdopodobieństwa warunkowego zdarzeń losowych.
2. Początek zajęć jest prowadzony metodą „rybki w akwarium”. Uczniowie przysłuchują się dyskusji (wzbogaconej prezentacjami) prowadzonej przez uczniów – ekspertów, przypominającej najważniejsze pojęcia, wzory związane z prawdopodobieństwem warunkowym.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach. Pod kierunkiem ekspertów zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” i filmem samouczkiem, a następnie rozwiązują ćwiczenia interaktywne.
2. Podsumowaniem tej części zajęć jest opracowanie i rozwiązanie przez każdą grupę zadania, którego rozwiązanie wymaga sprawdzenia niezależności zdarzeń losowych.
3. Każda z grup prezentuje swoje zadanie na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Eksperci omawiają pracę grup, którymi kierowali, wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest napisanie co najmniej dwóch przykładów praktycznego wykorzystania sposobów określania niezależności zdarzeń losowych.

Materiały pomocnicze:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść rozszerzona)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany przez uczniów na zajęciach zbierających materiał dotyczący prawdopodobieństwa.