



Zastosowanie wiadomości o funkcjach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie wiadomości o funkcjach

Źródło: Alessia Cocconi, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Ucząc się matematyki zapewne często zadajecie sobie pytania: po co mi to?, do czego mi się to przyda?, gdzie to wykorzystam? Dzięki temu materiałowi przekonacie się, że funkcje często „spotykamy” w życiu codziennym oraz korzystamy z ich wykresów. Na przykład w interpretacji zjawisk i procesów w różnych dziedzinach nauki, takich jak chemia, fizyka, medycyna, geografia, ekonomia i bankowość.

Twoje cele

- Określisz własność funkcji, dzięki której odczytasz wymagane dane z wykresu w celu ich interpretacji.
- Uzyskasz potrzebne informacje na podstawie wykresu funkcji.
- Dokonasz interpretacji danych z wykresu do analizy wybranych zastosowań funkcji.

Przeczytaj

Dane są dwa niepuste zbiory X i Y .

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y .

Symbolicznie oznaczamy $f : X \rightarrow Y$ i czytamy „funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y ”.

Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a jego elementy argumentami funkcji f

Przyjrzyjmy się sytuacjom z życia codziennego, które można opisać za pomocą funkcji:

- każdemu obywatelowi Polski przyporządkowany jest numer PESEL,
- każdemu uczniowi w klasie przyporządkowany jest numer w dzienniku lekcyjnym,
- każdej książce w bibliotece przyporządkowany jest numer ewidencyjny,
- każdemu towarowi na półce przyporządkowana jest jego cena sprzedaży,
- godzinie 6 : 00 każdego dnia danego miesiąca przyporządkowana jest temperatura powietrza w danej chwili w danym miejscu.

Funkcją jest też zależność długości pokonanej drogi od czasu trwania ruchu.

Podobnych sytuacji można odnaleźć bardzo dużo, w tym materiale będziemy je wspólnie analizowali i [interpretowali](#). Ważne jest, aby mieć na uwadze fakt, że nie wszystkie sytuacje z życia codziennego można interpretować jako funkcje w rozumieniu matematycznym. Oto kilka przykładów.

- Pralka i jej programy do prania.
Każdej pralce przyporządkowanych jest kilka programów, np.: do prania firanek, do prania tkanin delikatnych, do bawełny itp.
- Użytkownik komputera i adres jego poczty e-mailowej.
Nie każdy użytkownik komputera ma adres e-mailowy, a niektórzy użytkownicy posiadają więcej niż jeden taki adres.
- Nauczyciel w szkole i funkcje, które pełni.
Okazuje się, że zazwyczaj każdy nauczyciel w szkole pełni więcej niż jedną funkcję, ponieważ oprócz tego, że jest nauczycielem konkretnego przedmiotu, np.: pełni funkcję wychowawcy klasy, opiekuna samorządu szkolnego, przewodniczącego zespołu przedmiotowego nauczycieli, opiekuna koła wolontariatu itp.

Jednym ze sposobów określania funkcji jest wykres. To przejrzysty i klarowny sposób przedstawienia i uporządkowania pewnych zależności. Przenalizujemy je na przykładach.

Przykład 1

Pani Natalia dojeżdża do pracy autobusem i tramwajem. Wykres przedstawia, jak zmieniała się długość drogi przebyta przez nią (wyrażona w kilometrach) w zależności od czasu wyrażonego w minutach.

Pani Natalia wyszła z domu o godzinie 6 : 45, pracę rozpoczynała o 7 : 30, ale potrzebowała 10 min, aby przygotować się do pracy. Najpierw pieszo dotarła do przystanku, jechała autobusem 6 minut, później wysiadła i z tego samego przystanku pojechała tramwajem. Ostatni odcinek drogi do pracy pokonała pieszo.

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Ile czasu Pani Natalia czekała na autobus, a ile na tramwaj?
2. Jaką odległość Pani Natalia pokonała autobusem, a jaką tramwajem?
3. Miejsce pracy Pani Natalii znajduje się w odległości 9,25 km od domu. Jaką część drogi do pracy Pani Natalia pokonała pieszo?
4. Z jaką średnią prędkością jechał autobus, a z jaką tramwaj?
5. Czy Pani Natalia zdążyła przygotować się do pracy i rozpocząć ją punktualnie?

Rozwiązanie

Ad 1)

Pani Natalia czekała na autobus 2 minuty oraz 4 minuty na tramwaj.

Uzasadnienie: odnajdujemy na wykresie fragmenty funkcji stałej: w czasie od 10 do 12 minuty Pani Natalia oczekiwała na autobus oraz w czasie od 18 do 22 minuty, Pani Natalia oczekiwała na tramwaj.

Ad 2)

Pani Natalia pokonała autobusem 3,5 km, a tramwajem 5 km.

Ad 3)

Pani Natalia pokonała pieszo 750 m.

Ad 4)

Średnia prędkość autobusu wynosiła $V_A = 35 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość, z jaką poruszał się tramwaj: $V_T = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Uzasadnienie $V_{\text{śr}} = \frac{s}{t}$, zatem: $V_A = \frac{3,5 \text{ km}}{\frac{1}{10} \text{ h}} = 35 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$$6 \text{ min} = \frac{6}{60} \text{ h} = \frac{1}{10} \text{ h},$$

$$V_T = \frac{5 \text{ km}}{\frac{1}{12} \text{ h}} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$5 \text{ min} = \frac{5}{60} \text{ h} = \frac{1}{12} \text{ h}.$$

Ad 5)

Tak, pani Natalia zdążyła przygotować się do pracy i rozpocząć ją punktualnie.

Uzasadnienie: podróż zajęła 30 min, 10 min przygotowanie, więc Pani Natalii zostało 5 min wolnego czasu.

Przykład 2

Wykresy funkcji bardzo często stosowane są w meteorologii. Przeanalizuj wykres zmian temperatury powietrza w pewnej miejscowości w marcu i odpowiedz na pytania zamieszczone pod wykresem.

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Jaka była najwyższa a jaka najniższa temperatura powietrza?
2. W jakim przedziale czasu temperatura wzrastała?
3. Jaka temperatura była ostatniego marca?
4. W jakim okresie temperatura była niedodatnia?
5. W jakim okresie temperatura wynosiła co najmniej 5°C ?

Rozwiązanie**Ad 1)**

Najniższa temperatura wyniosła: -4°C , zaś najwyższa: 9°C .

Uzasadnienie: to pytanie dotyczy wartości najmniejszej i największej funkcji.

Ad 2)

Temperatura wzrastała: od 1 do 2 marca, od 9 do 13 marca, od 16 do 26 marca, od 28 do 29 marca.

Uzasadnienie: to pytanie o zbiór argumentów, dla których funkcja jest rosnąca.

Symboliczny zapis $f \nearrow \langle 1, 2 \rangle ; \langle 9, 13 \rangle ; \langle 16, 26 \rangle ; \langle 28, 29 \rangle$.

Ad 3)

Ostatniego dnia marca temperatura wynosiła 3°C .

Uzasadnienie: to pytanie o wartość funkcji dla argumentu 31.

Ad 4)

Temperatura była niedodatnia od 6 do 10 marca.

Uzasadnienie: to pytanie o zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie.

Ad 5)

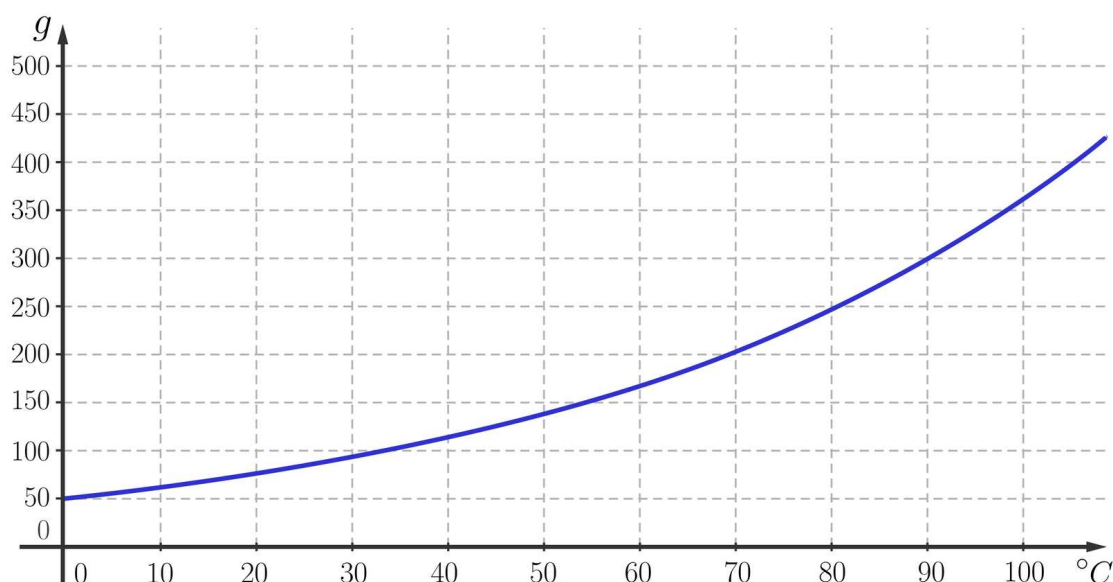
Temperatura wynosiła co najmniej 5°C : 2 marca, od 12 do 14 marca, 26 marca.

Uzasadnienie: to pytanie o zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość 5 lub więcej.

Symboliczny zapis: $f(x) \geq 5$ dla $x \in \langle 12, 14 \rangle \cup \{2, 26\}$.

Przykład 3

Funkcje mają zastosowanie w chemii przy badaniu własności substancji. Poniższy wykres przedstawia zależność masy (w g) rozpuszczonego w wodzie pierwiastka od temperatury w $[^{\circ}\text{C}]$.



Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Czy 150 g pierwiastka można rozpuścić w 100 g wody po ogrzaniu jej do 60°C ?
2. Do jakiej temperatury trzeba ogrzać 100 g wody, aby rozpuścić w niej 300 g pierwiastka?
3. Ile gram pierwiastka rozpuszcza się w 65 g wody po podgrzaniu jej do 70°C ?

Rozwiązanie

Ad 1)

150 g pierwiastka można rozpuścić w 100 g wody po ogrzaniu jej do 60°C .

Ad 2)

Wodę należy ogrzać do temperatura 90°C .

Ad 3)

W 65 g wody, po podgrzaniu jej do 70°C , można rozpuścić 130 g pierwiastka.

Uzasadnienie:

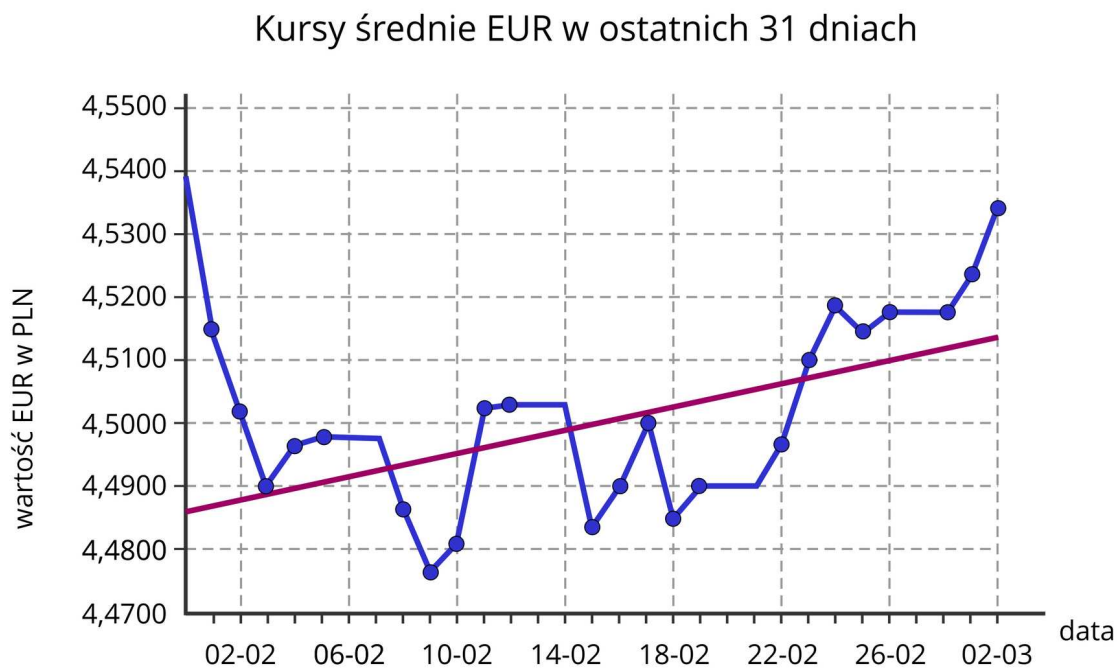
Nich x będzie szukaną wielkością. Tworzymy proporcję 200 g pierwiastka – 100 g wody (podgrzanej do 70°C)

$$x - 65$$

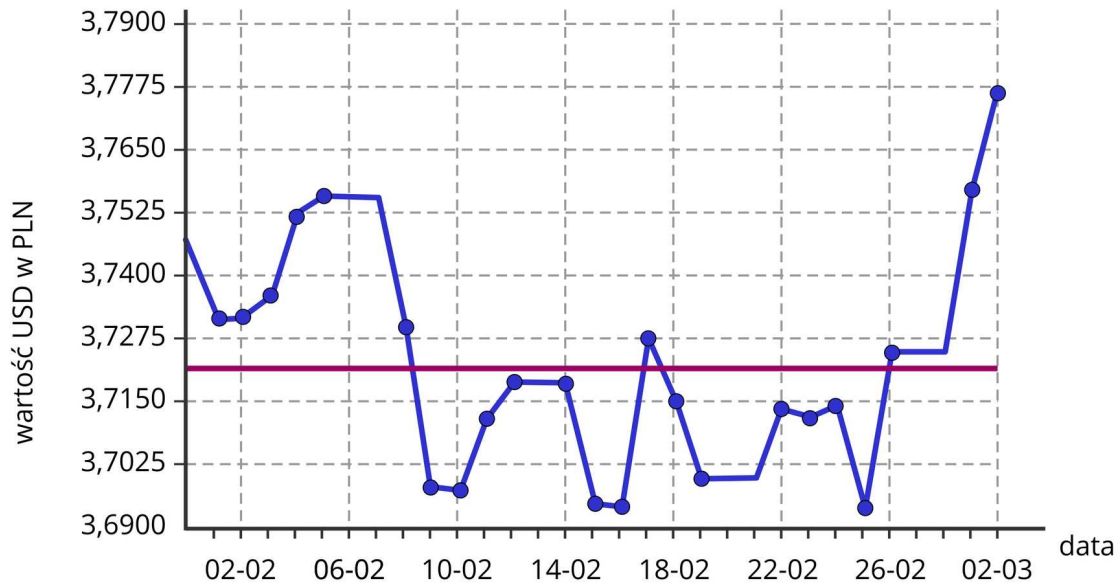
$$\text{Zatem } x = \frac{200 \cdot 65}{100} = 130 \text{ (g)}.$$

Przykład 4

Na poniższych wykresach przedstawiono notowania średnich kursów euro i dolara amerykańskiego. Dane odczytano 02. 03. 2021 r.



Kursy średnie USD w ostatnich 31 dniach



1. Na podstawie wykresów odpowiedz na pytania:

- Którego dnia odnotowano najwyższy spadek cen każdej z walut?
- W jakich dniach kurs euro nie malał w okresie dłuższym niż tydzień?

2. Na podstawie wykresów rozwiąż problem:

Maciej i jego kolega Karol zainwestowali oszczędności w walutę. Obaj 3 lutego mieli taką ilość dolarów amerykańskich, która równała się 10000 zł. Maciej potrzebował pilnie większej kwoty pieniędzy. Podjął ryzykowną decyzję. Zdecydował się tego dnia sprzedać dolary i tego samego dnia za całą kwotę kupić euro. Obaj koledzy 2 marca wymienili swoje oszczędności na złotówki. Który z nich zarobił więcej i o ile procent?

Wykonując obliczenia liczbę EUR oraz USD, zaokrąglaj do części całkowitych, a kursy walut z dokładnością do części setnych.

Rozwiązanie

Ad 1)

- Najwyższy spadek ceny dolara odnotowano 9 lutego, zaś euro – 1 lutego.
- Kurs euro nie malał w okresie dłuższym niż tydzień od 18 do 24 lutego.

Ad 2)

- Maciej:**

3 lutego – 1 EUR – 4,49 zł

$10000 : 4,49 = 2227$ (EUR)

2 marca – 1 EUR – 4,53 zł
 $2227 \cdot 4,53 \text{ zł} = 10088,31 \text{ zł}$
Zatem Maciej zarobił 88,31 zł.

- **Karol:**

3 lutego – 1 USD – 3,74 zł
 $10000 : 3,74 = 2674 \text{ (USD)}$
2 marca – 1 USD – 3,78 zł
 $2674 \cdot 3,78 \text{ zł} = 10107,72 \text{ zł}$
Zatem Karol zarobił 107,72 zł.

$107,72 \text{ zł} - 88,31 \text{ zł} = 19,41 \text{ zł}.$

Karol zarobił więcej o 19,41 zł, czyli o około 22%.

Słownik

interpretować dane

wykorzystać pojęcia, zapisy i własności matematyczne do analizy zjawisk, procesów i odpowiedzi na zadane pytania lub problemy

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w filmie edukacyjnym, a następnie wykonaj Polecenie 2.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3pldbKf4>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zastosowania własności funkcji.

Polecenie 2

Znajdź co najmniej dwa „pożyteczne” zastosowania wykresów funkcji. Przygotuj lub znajdź na dostępnych stronach internetowych wykresy tych funkcji. Upewnij się, że wykresy ilustrują przekształcenia, które są funkcjami.

a) Przygotuj do każdego wykresu pytania o interesujące Twoim zdaniem informacje, które można odczytać lub obliczyć na podstawie wykresu.

b) W parach z koleżanką lub kolegą wymieńcie się zadaniami i następnie sprawdźcie poprawność swoich odpowiedzi.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż, które z poniższych przyporządkowań opisuje funkcję. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐

Każdemu uczniowi w szkole, w której funkcjonuje dziennik internetowy, przyporządkowano login.

☐

Każdemu samochodowi, którym można poruszać się po drogach publicznych, przyporządkowano numer rejestracyjny.

☐

Każdemu aktorowi przyporządkowujemy film, w którym zagrał rolę.

☐

Każdemu lekarzowi w przychodni przyporządkowujemy jego pacjentów.

☐

Każdemu podręcznikowi przyporządkowano jego autora.

☐

Każdej karcie bankomatowej przyporządkowano numer.

Ćwiczenie 2



Monika przygotowuje się do konkursu z matematyki. Do dnia konkursu zostało jej jeszcze 10 dni. Monika postanowiła zaplanować swoją pracę. Liczbę godzin, które przeznaczyła na przygotowania w ciągu kolejnych dni, przedstawiła na wykresie.

Na podstawie powyższego wykresu uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby. Jeśli w danym zdaniu jest więcej niż jedna odpowiedź, liczby wpisz w kolejności od najmniejszej do największej.

1. W ciągu trzech ostatnich dni Monika poświęciła na przygotowania do konkursu

godzin.

2. W ciągu 10 dni Monika poświęciła na przygotowanie do konkursu

godzin.

3. Najwięcej godzin Monika przygotowywała się do konkursu

dnia.

4. Co najwyżej trzy godziny Monika przygotowywała się do konkursu w dniach

.

5. Co najmniej 5 godzin Monika przygotowywała się do konkursu w dniach

.

Ćwiczenie 3



Poniższe wykresy przedstawiają dobowe zmiany temperatury powietrza w miejscowościach *A* i *B*.

Uwaga: w odpowiedziach zostały uwzględnione zapisy przedziałów godzinowych jako przedziały liczbowe. Wykres zmian temperatury w miejscowości *A* to ten zaczynający się „niżej”. Możesz „kliknąć” na oznaczenia poniżej wykresu, aby to sprawdzić.

Połącz w pary odpowiedzi z właściwymi pytaniami.

O której godzinie temperatura w obu miejscowościach była taka sama?

O godzinie 7 : 00 i o godzinie 23 : 00

W jakich godzinach temperatura w miejscowości *B* była wyższa od temperatury w miejscowości *A*?

4 °C

Jaka była różnica temperatur w obu miejscowościach o godz. 18 : 00?

Między 0 : 00 a 6 : 00 oraz między 21 : 00 a 24 : 00

W jakich godzinach temperatura w miejscowości *A* malała?

Między 0 : 00 a 7 : 00 oraz między 23 : 00 a 24 : 00

O której godzinie w obu miejscowościach była największa różnica we wskazaniach termometrów?

Między 1 : 00 a 3 : 00, 12 : 00 a 14 : 00 oraz między 15 : 00 a 24 : 00

W jakich godzinach w miejscowości *A* temperatura była niedodatnia?

10 °C

Jaka była dobową różnica temperatur w miejscowości *A*?

Między 9 : 00 a 18 : 00

W jakich godzinach termometr w miejscowości *A* wskazywał co najmniej 3 °C?

O godzinie 12 : 00, o godzinie 17 : 00 i o godzinie 18 : 00

Ćwiczenie 4



Poniższy wykres przedstawia, jak zmieniała się temperatura ciała pewnego pacjenta mierzona przez kolejne 12 godzin.

Przyjmujemy, że normalna temperatura ciała człowieka wynosi $36,6^{\circ}\text{C}$.

Ćwiczenie 5



Poniższy wykres przedstawia notowania (w zł) cen akcji spółki PKO BP w dniach od 1 sierpnia 2020 do 30 października 2020. Uwaga! Dane nie są zbierane w soboty i w niedziele.



Notowania spółki w okresie od 1 sierpnia 2020 r. do 31 października 2020 r.

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Którego dnia cena akcji spadła poniżej 20 zł?
2. Którego dnia najkorzystniej, w podanym okresie, należało kupić akcje, a którego sprzedać, aby na przeprowadzonych transakcjach zarobić jak najwięcej?
3. 12. 08. 2020 r. notowania akcji były najwyższe i wynosiły 23,36 zł, a 29 października najniższe 18,90 zł. O ile procent spadła wartość akcji w tym okresie? (Wynik podaj z dokładnością do 0,1 procenta).



Poniższy wykres przedstawia zmiany w notowaniach funduszu PKO Akcji Rynku Złota w okresie miesięcznym.



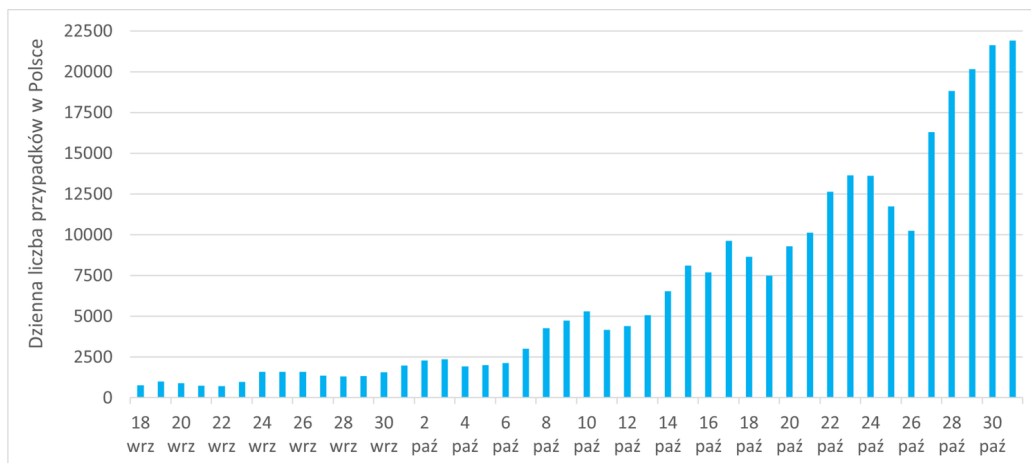
Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Którego dnia należało sprzedać tzw. jednostki funduszu, aby zyskać jak najwięcej?
2. O ile punktów procentowych spadła wartość jednostek funduszu akcji Rynku Złota między 13 października (+2,4%), a 28 października (-7%)?
3. Która doba była najmniej korzystna dla inwestorów tego funduszu?

Ćwiczenie 7



Poniższy wykres przedstawia dzienną liczbę zachorowań na Covid-19 w Polsce w okresie pandemii koronawirusa w okresie od 18 września do 31 października 2020 r.



Na podstawie wykresu oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Ponad 3 tys. zachorowań zanotowano po raz pierwszy 30 września.	☐	☐
Ponad 10 tys. zachorowań zanotowano po raz pierwszy 21 października.	☐	☐
Po 8 dniach, od kiedy liczba zachorowań przekroczyła 10 tys., nastąpiło podwojenie tej liczby.	☐	☐

Ćwiczenie 8



Wykorzystując dane z wykresu z ćwiczenia 7, odczytaj najwyższy wskaźnik zachorowań w październiku. Wynik podaj z dokładnością do cyfry tysięcy.

Wiedząc, że 1 października liczba nowych zachorowań wynosiła dokładnie 1967, oblicz, o ile procent wzrosła liczba zachorowań w okresie od 1 października do dnia najwyższego wskaźnika zachorowań.

Wynik podaj z dokładnością do 1 procenta.

Dla nauczyciela

Autor: Hanna Mąka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wiadomości o funkcjach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje, interpretuje i przetwarza informacje wyrażone w postaci wykresu funkcji;

- wybiera poprawną własność funkcji, dzięki której odczytuje wymagane dane z wykresu w celu w ich interpretacji;
- uzyskuje potrzebne informacje na podstawie wykresu funkcji;
- dokonuje interpretacji danych z wykresu do analizy wybranych zastosowań funkcji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- burza mózgów;
- liga zadaniowa;
- technika świateł drogowych;
- technika niedokończonych zdań.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i słuchawkami/tablety/smartfony z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- kolorowe kartki lub metodniki.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie przed lekcją zapoznają się z materiałami z sekcji: „Wprowadzenie” oraz „Przeczytaj” – fragment do Przykładu 1 (na temat opisów przykładów przekształceń, które są lub nie są funkcjami). Analizują informacje z Filmu edukacyjnego i przygotowują przykłady zgodnie z Poleceniem 2a.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Zastosowanie wiadomości o funkcjach”, wskazuje cele zajęć.
2. Nauczyciel wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu lub sam je przedstawia (formułuje je w „języku uczniów” na podstawie celów operacyjnych).

3. Wybrany uczeń przypomina definicję funkcji.
4. Uczniowie, metodą burzy mózgów, podają przykłady przyporządkowań, które są funkcjami i przykłady przyporządkowań, które nie są funkcjami.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach analizują Przykłady 2–4 z sekcji: „Przeczytaj”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości uczniów. Następnie wykonują Polecenie 2b z sekcji „Film edukacyjny”.
2. Nauczyciel robi „stop klatkę” – prosi, aby uczniowie za pomocą świateł drogowych ocenili, na ile poradzili sobie z dotychczasową pracą.
3. Nauczyciel dzieli klasę na małe grupy. Uczniowie wykonują ćwiczenia 5–8 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która jako pierwsza rozwiąże ćwiczenia, wygrywa. Nauczyciel może nagrodzić pracę uczniów plusami za aktywność.
4. Członków grupy, która skończy wcześniej pracę, nauczyciel prosi o wsparcie w pracy inne grupy, które jeszcze pracują, w szczególności te, które zgłaszają problemy.

Faza podsumowująca:

- Na koniec zajęć nauczyciel przypomina uczniom cel lekcji i kryteria sukcesu.
Prosi uczniów, o dokończenie zdania:
Na dzisiejszej lekcji najbardziej zaskoczyło mnie zastosowanie funkcji w/do ...
Jeśli jest mało czasu nauczyciel może wysłać uczniom wygenerowany kod QR i w ten sposób uzyskać informacje podsumowujące lekcję, które można omówić na następnej lekcji.

Praca domowa:

1. Wykonaj ćwiczenia 1–4 z sekcji „Sprawdź się”.
2. Swoje autorskie zadania, które na dziś przygotowałeś/aś do Polecenia 2 i 3a pod filmem edukacyjnym zamieść w udostępnionym pliku na one note (lub innym dokumencie współdzielonym).

Materiały pomocnicze:

- [Miejsca zerowe funkcji](#)
- [Funkcja jej własności. Część II](#)

Wskazówki metodyczne:

Film edukacyjny można wykorzystać jako uzupełnienie tematu: „Funkcje liczbowe”.