



Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną
typu $|x + 1| + |x - 2| > 5$

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną typu

$$|x + 1| + |x - 2| > 5$$

Źródło: dostępny w internecie: piqsels.com, domena publiczna.

Nierówności liniowe z wartością bezwzględną rozwiążesz podobnie, jak równania z wartością bezwzględną. Rozważając poszczególne przypadki, ustalisz najpierw zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności. Następnie ze zbioru rozwiązań wybierzesz te liczby, które spełniają rozważany warunek. W tym celu wyznaczysz iloczyn odpowiednich przedziałów liczbowych.

Po rozważeniu wszystkich przypadków ustalisz, jaki jest zbiór rozwiązań Twojej nierówności.

Trudne?

Analizując poniższy materiał, opracujesz swój algorytm rozwiązywania takich nierówności.

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówności zawierające wyrażenia z dwiema wartościami bezwzględnymi.
- Udoskonalisz umiejętności rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.

Przeczytaj

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $|x + 2| + |4x - 2| > 5$.

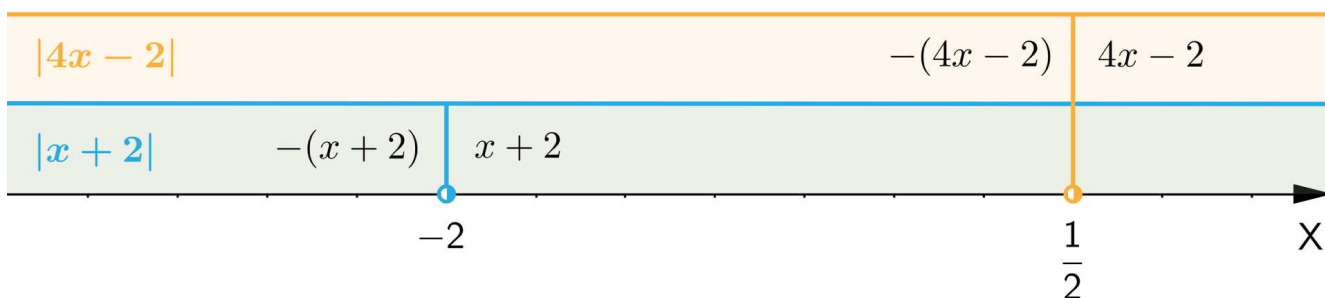
Najpierw zapiszemy wyrażenie $|x + 2|$ korzystając z definicji wartości bezwzględnej:

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & \text{dla } x \geq -2 \\ -(x + 2), & \text{dla } x < -2 \end{cases}$$

Analogicznie

$$|4x - 2| = \begin{cases} 4x - 2, & \text{dla } x \geq \frac{1}{2} \\ -(4x - 2), & \text{dla } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Przedstawimy teraz, jak zmieniają się znaki wartości bezwzględnej w wyznaczonych przedziałach na osi liczbowej.



1. Jeśli $x \in (-\infty, -2)$, to nierówność jest postaci

$$-(x + 2) - (4x - 2) > 5$$

$$-x - 2 - 4x + 2 > 5$$

$$-5x > 5$$

$$x < -1.$$

Po uwzględnieniu założenia, otrzymujemy $x \in (-\infty, -2)$.

2. Jeśli $x \in \langle -2, \frac{1}{2} \rangle$, to nierówność jest postaci

$$x + 2 - (4x - 2) > 5$$

$$x + 2 - 4x + 2 > 5$$

$$-3x > 5 - 4$$

$$-3x > 1$$

$$x < -\frac{1}{3}.$$

Po uwzględnieniu założenia, otrzymujemy $x \in \langle -2, -\frac{1}{3} \rangle$.

3. Jeśli $x \in \langle \frac{1}{2}, \infty \rangle$, to nierówność jest postaci

$$x + 2 + 4x - 2 > 5$$

$$5x > 5$$

$$x > 1.$$

Po uwzględnieniu założenia, otrzymujemy $x \in (1, \infty)$.

Rozwiązaniem nierówności jest suma rozwiązań z poszczególnych przypadków.

Rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$.

Przykład 2

Wykażemy, że zbiorem rozwiązań nierówności $2 + \sqrt{25 - 10x + x^2} > |x - 5|$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zauważmy, że

$$\sqrt{25 - 10x + x^2} = \sqrt{(5 - x)^2} = |5 - x|.$$

Zatem nierówność zapiszemy w postaci $2 + |5 - x| > |x - 5|$.

Skorzystamy z własności wartości bezwzględnej

$$|a - b| = |b - a|,$$

czyli mamy

$$2 + |5 - x| > |5 - x|$$

$$2 > 0.$$

Jest to nierówność zawsze prawdziwa. Zatem zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

Przykład 3

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 5| + |x + 3| > 10 \text{ i } |y - 2| + |y + 4| > 10\}.$$

Zbiorem rozwiązań nierówności będzie zbiór punktów, których odcięte spełniają pierwszą nierówność, a rzędne drugą nierówność.

Aby zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań nierówności, rozwiążemy najpierw każdą nierówność oddzielnie.

Najpierw znajdziemy zbiór rozwiązań nierówności

$$|x - 5| + |x + 3| > 10$$

1. Jeśli $x \in (-\infty, -3)$, to nierówność jest postaci

$$-(x - 5) - (x + 3) > 10$$

$$-x + 5 - x - 3 > 10$$

$$-2x > 8$$

$$x < -4.$$

Po uwzględnieniu założenia, otrzymujemy $x \in (-\infty, -4)$.

2. Jeśli $x \in \langle -3, 5 \rangle$, to nierówność jest postaci

$$-(x - 5) + x + 3 > 10$$

$$-x + 5 + x + 3 > 10$$

$$8 > 10.$$

Otrzymaliśmy **nierówność sprzeczną**. Zatem $x \in \emptyset$.

3. Jeśli $x \in \langle 5, \infty \rangle$ to nierówność jest postaci

$$x - 5 + x + 3 > 10$$

$$2x > 12$$

$$x > 6.$$

Po uwzględnieniu założenia, otrzymujemy $x \in (6, \infty)$.

Rozwiązaniem nierówności jest suma rozwiązań z poszczególnych przypadków.

Rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, -4) \cup (6, \infty)$.

Teraz w analogiczny sposób zajmiemy się rozwiązaniem nierówności

$$|y - 2| + |y + 4| > 10.$$

1. Jeśli $y \in (-\infty, -4)$ to nierówność jest postaci

$$-(y - 2) - (y + 4) > 10$$

$$-y + 2 - y - 4 > 10$$

$$-2y > 12$$

$$y < -6.$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy $y \in (-\infty, -6)$.

2. Jeśli $y \in (-4, 2)$ to nierówność jest postaci

$$-(y - 2) + y + 4 > 10$$

$$-y + 2 + y + 4 > 10$$

$$6 > 12.$$

Otrzymaliśmy **nierówność sprzeczną**. Zatem $y \in \emptyset$.

3. Jeśli $y \in (2, \infty)$ to nierówność jest postaci

$$y - 2 + y + 4 > 10$$

$$2y > 8$$

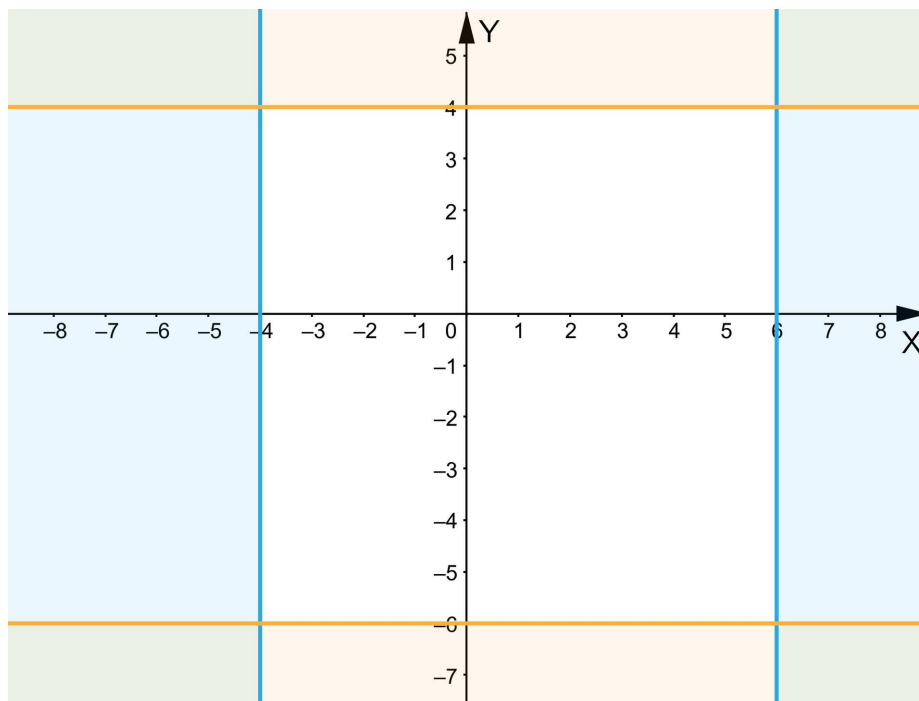
$$y > 4.$$

Po uwzględnieniu założenia, otrzymujemy $y \in (4, \infty)$.

Rozwiązaniem nierówności jest suma rozwiązań z poszczególnych przypadków.

Rozwiązanie nierówności to: $y \in (-\infty, -6) \cup (4, \infty)$.

Następnie zaznaczymy w układzie współrzędnych otrzymane rozwiązania. Punkty należące do „zakolorowanych” dwoma kolorami obszarów spełniają obie nierówności.



Słownik

nierówność sprzeczna

nierówność, która nie jest spełniona przez żadną liczbę należącą do dziedziny tej nierówności

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem, który pokazuje sposób rozwiązywania nierówności z dwiema wartościami bezwzględnymi metodą graficzną, korzystając bezpośrednio z definicji wartości bezwzględnej.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DJvPtrC6p>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego nierówności z dwiema wartościami bezwzględnymi

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność $|x - 8| + |4x + 3| > 4$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8

Rozwiąż nierówność $||x + 1| + |5x - 1|| > 5$.



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną typu $|x + 1| + |x - 2| > 5$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2 \cdot |x + 3| + 3 \cdot |x - 1| = 13$, $|x + 2| + 2 \cdot |x - 3| < 11$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności z dwiema wartościami bezwzględnymi
- doskonali umiejętności rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną
- tworzy algorytmy rozwiązywania nierówności różnych typów
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem filmu

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu przypominają sobie metody algebraiczne i graficzne rozwiązywania nierówności liniowych z wartością bezwzględną.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel wyświetla film i czyta treść polecenia 1.
3. Uczniowie w parach analizują przykład pokazujący sposób rozwiązywania nierówności z wartościami bezwzględnymi.
4. Po omówieniu przykładów w parach nauczyciel sprawdza zrozumienie sposobów rozwiązania przykładów.
5. Nauczyciel prosi uczniów, aby w parach rozwiązali polecenie 2.
6. Uczniowie wspólnie z nauczycielem konsultują poprawność wykonania poleceń umieszczonych pod filmem.
7. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, jakie napotkali podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu zadania 7 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wartość bezwzględna - definicja](#)
- [Nierówności stopnia pierwszego](#)

Wskazówki metodyczne:

Film może być materiałem inspirującym do przygotowania przez uczniów własnego samouczka.