



## Nierówność wymierna, której licznik jest wielomianem stopnia drugiego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Nierówność wymierna, której licznik jest wielomianem stopnia drugiego

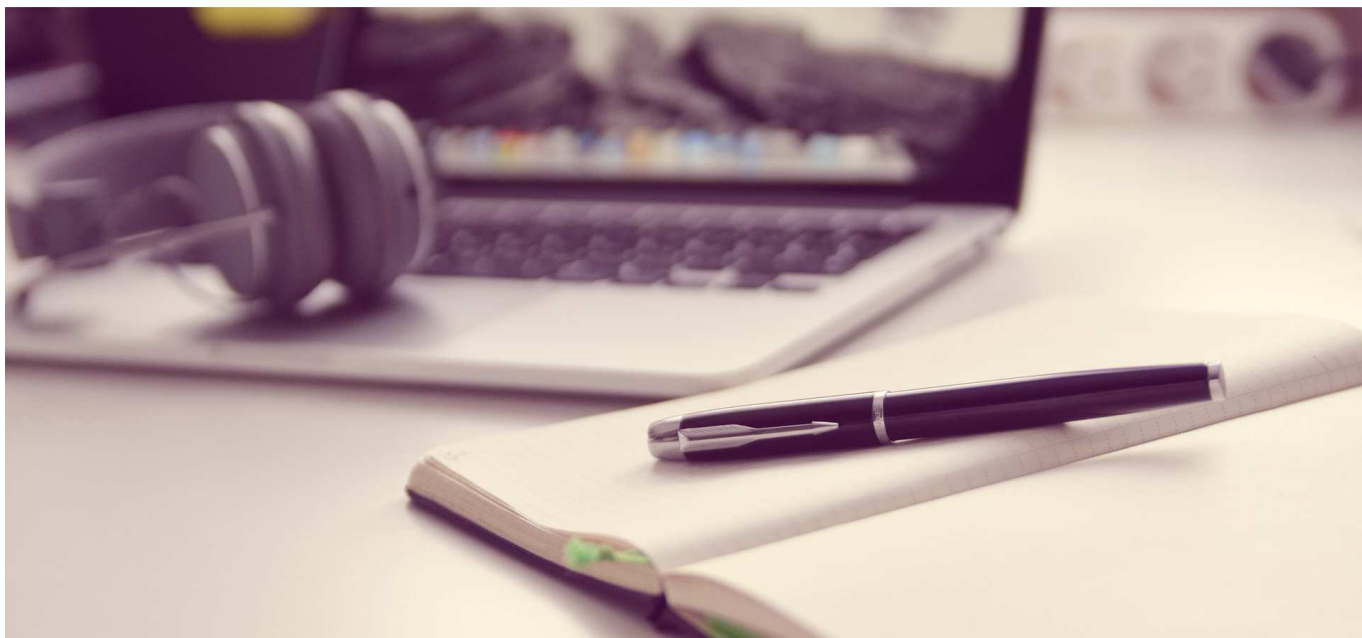
Źródło: Rod Long, licencja: CC BY 3.0.

Rozwiązując arkusze maturalne niejednokrotnie będziesz korzystać z elementarnych nierówności wymiernych tj.:

- Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $a$  zachodzi nierówność  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ;
- Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $a, b$  zachodzi nierówność  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

Po przekształceniu powyższych nierówności otrzymasz nierówności wymierne, których licznik jest wielomianem stopnia drugiego:

- Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $a$  zachodzi nierówność  $\frac{a^2+1}{a} \geq 2$ ;
- Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $a, b$  zachodzi nierówność  $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ .



Źródło: dostępny w internecie: [www.pixabay.com](http://www.pixabay.com), domena publiczna.

W tym materiale rozwiążesz nierówności wymierne, których licznik jest wielomianem stopnia drugiego. Często będziesz korzystać z postaci iloczynowej wielomianu. Przypomnij sobie postać iloczynową wielomianu, wzory skróconego mnożenia oraz wyznaczanie dziedziny nierówności wymiernej.

### Twoje cele

- Rozwiążesz nierówności wymierne kilkoma sposobami.
- Wykorzystasz nierówności wymierne w dowodzeniu.
- Rozwiążesz zadania z kodowaną odpowiedzią.

# Przeczytaj

---

## Przykład 1

Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej  $a, b$  zachodzi nierówność  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

### Rozwiązanie:

Sprowadźmy ułamki algebraiczne do wspólnego mianownika  $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ .

Pomnóżmy obie strony nierówności przez  $a \cdot b$ :

$$\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \quad | \cdot a \cdot b, \text{ gdzie } a \cdot b > 0.$$

Zauważmy, że iloczyn liczb dodatnich  $a, b$  jest liczbą dodatnią, czyli zwrot nierówności nie zmienia się

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

$$(a - b)^2 \geq 0.$$

Nierówność jest prawdziwa, bo kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny więc i nierówność  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$  jest prawdziwa.

## Przykład 2

Wykaż, że jeśli  $x > 0$ , to  $\frac{10x^2+x+10}{x} \geq 21$ .

### Rozwiązanie:

Dowód nie wprost:

Założmy, że  $\frac{10x^2+x+10}{x} < 21$  dla  $x > 0$ .

Pomnóżmy obie strony nierówności przez  $x$ .

Znak nierówności nie ulegnie zmianie, ponieważ  $x > 0$ .

$$\text{Zatem } 10x^2 + x + 10 < 21x,$$

$$10x^2 - 20x + 10 < 0,$$

$$(x - 1)^2 < 0.$$

Nierówność  $(x - 1)^2 < 0$  jest sprzeczna, bo kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Skoro nierówność  $\frac{10x^2+x+10}{x} < 21$  dla  $x > 0$  okazała się fałszywa, to nierówność  $\frac{10x^2+x+10}{x} \geq 21$  jest prawdziwa dla  $x > 0$ .

## Algorytmy rozwiązywania nierówności wymiernych z wielomianem stopnia drugiego w liczniku

### I sposób:

1. Wyznaczamy **dziedzinę nierówności wymiernej**.
2. Sprowadzamy nierówność do postaci ogólnej - przenosimy wszystkie wyrażenia na jedną stronę nierówności.
3. Wykonujemy wskazane działania.
4. Nierówność wymierną rozwiązujemy doprowadzając ją do równoważnej postaci wielomianowej przy wyznaczonej **dziedzinie nierówności wymiernej** (zastępujemy iloraz iloczynem z uwzględnieniem założeń).
5. Wyznaczamy **pierwiastki wielomianu** oraz szkicujemy wykres.
6. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań danej nierówności.
7. Wyznaczamy rozwiązanie nierówności wymiernej uwzględniając dziedzinę.

### II sposób:

1. Wyznaczamy **dziedzinę nierówności wymiernej**.
2. Mnożymy obustronnie nierówność przez kwadrat mianownika lub przez inne wyrażenia, których znak jest jednoznacznie określony.
3. Wykonujemy wskazane działania.
4. Wyznaczamy pierwiastki wielomianu oraz szkicujemy wykres
5. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań danej nierówności.
6. Wyznaczamy rozwiązanie nierówności wymiernej uwzględniając dziedzinę.

W podanych poniżej przykładach będziemy korzystać z poniższego twierdzenia.

#### Twierdzenie: o równoważności nierówności

- $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} > 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) > 0 \wedge W_2(x) \neq 0,$
- $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} < 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) < 0 \wedge W_2(x) \neq 0,$
- $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \geq 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) \geq 0 \wedge W_2(x) \neq 0,$
- $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \leq 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) \leq 0 \wedge W_2(x) \neq 0.$

Zatem przy rozwiązywaniu nierówności wymiernych często skorzystamy z twierdzenia, że iloraz i iloczyn tych samych wyrażeń mają ten sam znak.

**Ważne!**

Rozwiązując nierówność wymierną, pamiętajmy o wyznaczeniu **dziedziny nierówności wymiernej**.

**Przykład 3**

Rozwiążemy nierówność  $\frac{x^2-10x+25}{x^4-9x^2} \leq 0$ .

**Rozwiązanie:**

Podajmy konieczne założenie:  $x^4 - 9x^2 \neq 0$ ,

$$x^2(x^2 - 9) \neq 0$$

$$x^2 \neq 0, x^2 - 9 \neq 0$$

$$x^2 \neq 0, x^2 \neq 9$$

$$x \neq 0, x \neq -3, x \neq 3$$

Dziedziną nierówności wymiernej jest  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$ .

Dla nierówności  $\frac{x^2-10x+25}{x^4-9x^2} \leq 0$

przedstawmy licznik i mianownik w postaci iloczynowej.

$$\frac{(x-5)^2}{x^2(x-3)(x+3)} \leq 0$$

Skorzystajmy z poniższej równoważności:

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \leq 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) \leq 0 \wedge W_2(x) \neq 0,$$

czyli zapiszmy nierówność w postaci równoważnej nierówności iloczynowej

$$x^2(x-5)^2(x-3)(x+3) \leq 0 \wedge x \neq -3, x \neq 0, x \neq 3.$$

Wielomian  $W(x) = x^2(x-5)^2(x-3)(x+3)$  ma dwa **pierwiastki** dwukrotne: 0; 5 oraz dwa **pierwiastki** jednokrotne: (-3); 3.



**Odpowiedź:** Rozwiązaniem nierówności jest zbiór  $(-3; 0) \cup (0; 3) \cup \{5\}$ .

#### Dla zainteresowanych

Nierówność wielomianową  $x^2(x-5)^2(x-3)(x+3) \leq 0$ , gdzie  $x \neq -3$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq 3$  możemy rozwiązać za pomocą tzw. „siatki znaków”.

$x$	$(-\infty; -3)$	$-3$	$(-3; 0)$	$0$	$(0; 3)$	$3$	$(3; 5)$	$5$	$(5; +\infty)$
$x+3$	-	0	+		+		+		+
$x^2$	+		+	0	+		+		+
$x-3$	-		-		-	0	+		+
$(x-5)^2$	+		+		+		+	0	+
$W(x) = x^2(x+3)(x-3)(x-5)^2$	+	X	-	X	-	X	+	0	+

Zatem rozwiązaniem nierówności jest zbiór  $(-3; 0) \cup (0; 3) \cup \{5\}$ .

#### Przykład 4

Wyznamy zbiór rozwiązań nierówności  $\frac{7x^2-16x-15}{-x^2+4x-3} > 1$ .

#### Rozwiązanie:

Podajmy konieczne założenie:  $-x^2 + 4x - 3 \neq 0$

$$-(x-1)(x-3) \neq 0$$

$$x \neq 1, x \neq 3$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}.$$

Dla nierówności

$$\frac{7x^2-16x-15}{-x^2+4x-3} > 1.$$

przedstawmy licznik i mianownik ułamka algebraicznego w postaci iloczynowej

$$\frac{7(x + \frac{5}{7})(x-3)}{-(x-1)(x-3)} > 1.$$

Po skróceniu wyrażenie  $x - 3$  nierówność ma postać

$$\frac{7(x + \frac{5}{7})}{-(x-1)} > 1,$$

$$\frac{7(x + \frac{5}{7})}{-(x-1)} > 1 \quad | \cdot (-1).$$

Rozwiążmy nierówność mnożąc obie strony nierówności przez  $(x - 1)^2 > 0$ :

$$\frac{7(x + \frac{5}{7})}{(x-1)} < -1 \quad | \cdot (x - 1)^2,$$

$$7(x + \frac{5}{7})(x - 1) < -(x - 1)^2,$$

$$7(x + \frac{5}{7})(x - 1) + (x - 1)^2 < 0.$$

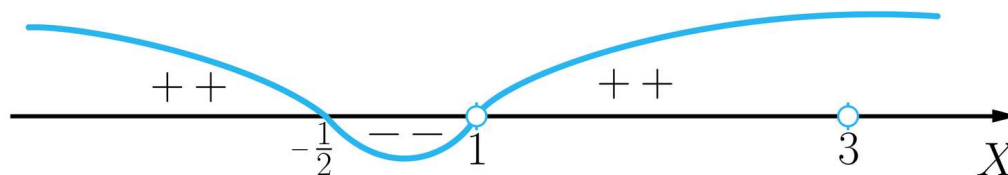
Wyłączmy czynnik  $x - 1$  przed nawias

$$(x - 1)[7(x + \frac{5}{7}) + x - 1] < 0,$$

$$(x - 1)[7x + 5 + x - 1] < 0,$$

$$(x - 1)(8x + 4) < 0.$$

Uwzględniając dziedzinę nierówności wymiernej  $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$ , sporządźmy szkic wykresu funkcji wielomianowej  $R(x) = 8(x - 1)(x + \frac{1}{2})$ , gdzie pierwiastkami jednokrotnymi są liczby:  $(-\frac{1}{2}), 1$ .



**Odpowiedź:** Zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{7x^2 - 16x - 15}{-x^2 + 4x - 3} > 1$  jest przedział  $(-\frac{1}{2}; 1)$ .

**Ważne!**

Zwróćmy uwagę na to, że przy rozwiązywaniu nierówności wymiernej drugim sposobem, nie możemy mnożyć obustronnie nierówności przez mianownik wyrażenia wymiernego, jeśli nie wiemy jaki on ma znak, czy ujemny, czy dodatni. Jeśli znak

mianownika byłby ujemny, to po pomnożeniu nierówności przez ten mianownik, musielibyśmy zmienić zwrot nierówności.

### Przykład 5

Rozwiążemy nierówność  $\frac{-3x^2+5x}{x} \geq 3x^2 + 10x - 5$ .

#### Rozwiązanie:

Podajmy założenie:  $x \neq 0$ , czyli  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Przedstawmy licznik i mianownik ułamka algebraicznego w postaci iloczynowej

$$\frac{-3x(x-\frac{5}{3})}{x} \geq 3x^2 + 10x - 5.$$

Skróćmy ułamek algebraiczny, otrzymując nierówność wielomianową

$$-3x + 5 \geq 3x^2 + 10x - 5,$$

Pomnóżmy nierówność obustronnie przez  $(-1)$ :

$$-3x^2 - 13x + 10 \geq 0 \mid \cdot (-1),$$

$$3x^2 + 13x - 10 \leq 0,$$

$$3(x - \frac{2}{3})(x + 5) \leq 0.$$

Uwzględniając dziedzinę nierówności wymiernej  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sporządźmy szkic wykresu funkcji  $S(x) = 3(x - \frac{2}{3})(x + 5)$ , gdzie pierwiastkami jednokrotnymi są liczby:  $(-5); \frac{2}{3}$ .



**Odpowiedź:** Rozwiązaniem nierówności jest zbiór  $\langle -5; 0 \rangle \cup (0; \frac{2}{3} \rangle$ .

## Słownik

dziedzina nierówności wymiernej

dziedziną nierówności wymiernej są wszystkie liczby rzeczywiste za wyjątkiem pierwiastków wielomianu  $W_2(x)$  znajdującego się w mianowniku danego wyrażenia  $\frac{W_1(x)}{W_2(x)}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x : W_2(x) = 0\}.$$

### **ułamek algebraiczny**

ułamkiem algebraicznym jednej zmiennej rzeczywistej  $x$  nazywamy wyrażenie  $\frac{W_1(x)}{W_2(x)}$ , którego licznikiem jest wielomian  $W_1(x)$ , a mianownikiem jest wielomian  $W_2(x)$  i  $W_2(x) \neq 0$

### **pierwiastek wielomianu**

Pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$  nazywamy liczbę rzeczywistą  $a$ , dla której  $W(a) = 0$

# Galeria zdjęć interaktywnych

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z dowodem przedstawionym za pomocą galerii zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj polecenie 2 i 3.

## Polecenie 2

Wartości funkcji  $f(x) = \frac{-6x^2+6x}{x^3-3x^2-x+3}$  są nieujemne dla

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup \langle 1; 3 \rangle$

$x \in (-\infty; -1) \cup \langle 0; 1 \rangle \cup (1; 3)$

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$

$x \in (-\infty; -1) \cup \langle 0; 3 \rangle$

## Polecenie 3

Które liczby należą do zbioru rozwiązań nierówności  $\frac{-x^2+4x+2}{9-x^2} < \frac{1}{2}$ ? Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

$2\pi$

$-2$

$4 + 2\sqrt{11}$

$0$

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Ile liczb całkowitych spełnia nierówność  $\frac{-2x^2+18}{x^2-11x+28} \geq 0$ ?

10

7

9

11

## Ćwiczenie 2



Dopasuj nierówność wymierną do zbioru rozwiązań nierówności.

$x \in \mathbb{R}$

$$\frac{7x^2+1}{4x^2+1} \leq 0$$

$$\frac{6x^2-2x}{3x^3+12x^2+12x} > \frac{6x}{3x^2+6x}$$

$x \in \emptyset$

$$\frac{7x^2-7}{x^4-1} \leq 0$$

$$\frac{-3x^2-5}{x^2+3x+7} < 0$$

$$\frac{3x^2+2x+5}{2x^2-x+4} \geq 0$$

$$\frac{4x^2}{3x^2+6} < 4$$

### Ćwiczenie 3



Połącz w pary nierówność wymierną ze zbiorem rozwiązań nierówności.

$$\frac{6x^2-12}{x^2-1} \leq 0$$

$$x \in \langle -\sqrt{2}; -1 \rangle \cup (1; \sqrt{2})$$

$$\frac{-x^2}{x^2+x+3} < -x^2 + x + \frac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$$

$$x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$$

$$\frac{6x^2-6}{3x^2+12} > \frac{1}{3}$$

$$x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

### Ćwiczenie 4



Zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{3x^2+14x-5}{x^2-10x+25} \geq 0$  jest:

$x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 5) \cup (5; +\infty)$

$x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$

$x \in (-\infty, 5) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

$x \in (-\infty, -5) \cup (\frac{1}{3}, 5) \cup (5; +\infty)$

### Ćwiczenie 5



Liczba  $k$  jest największą liczbą całkowitą, która spełnia nierówność  $\frac{7x^2+2x}{7x^3+2x^2-21x-6} < \frac{1}{x^2-3}$ .  
Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku liczby  $\frac{|k|}{2\sqrt{15}}$ .

## Ćwiczenie 6



Zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{x^2-4x+4}{x^2+8x+16} + 2 \cdot \frac{x-2}{x+4} > 3$  jest:

$x \in (-4; 2)$

$x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -\frac{5}{2})$

$x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -\frac{5}{2})$

$x \in (-1; +\infty)$

## Ćwiczenie 7



Wykaż, że jeśli  $x > 0$ , to  $\frac{4x^2-10x+25}{x} \geq 10$ .

## Ćwiczenie 8



Wykaż, że dla dowolnych liczb  $a, b$ , gdzie  $a \neq b$ , nierówność  $\frac{a^2-ab+1\frac{1}{3}b^2}{a^2-ab+b^2} > \frac{1}{3}$  jest prawdziwa.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Monika Dudek

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Nierówność wymierna, której licznik jest wielomianem stopnia drugiego

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.$$

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności wymierne kilkoma sposobami;
- wykorzystuje nierówności wymierne w dowodzeniu;
- rozwiązuje zadania z kodowaną odpowiedzią.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- burza mózgów;
- dyskusja.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

- Uczniowie przed lekcją zapoznają się z materiałem w sekcji „Przeczytaj” i przypominają sobie postać iloczynową wielomianu, wzory skróconego mnożenia oraz wyznaczanie dziedziny ułamka algebraicznego.

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Nierówność wymierna, której licznik jest wielomianem stopnia drugiego”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel przedstawia materiał przedstawiony w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe lub 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach wykonują polecenie nr 2 oraz 3.
3. Nauczyciel sprawdza poprawność zadań. W razie wątpliwości udziela odpowiedzi na zadane przez uczniów pytania.
4. Następnie uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7,8,9 w sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić

uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

5. Uczniowie realizują indywidualnie kolejne ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

#### **Faza podsumowująca:**

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Nierówność wymierna, której licznik jest wielomianem stopnia drugiego” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli).
- Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i uzupełnia informacje.

#### **Praca domowa:**

- Uczniowie wykonują pozostałe zadania z sekcji „Sprawdź się”.

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Nierówności wielomianowe](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać na lekcji jako powtórzenie do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym.