Logarytm – co to takiego?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

W siedemnastowiecznej Europie nie było jeszcze telewizji i Internetu, zatem intelektualiści czytali książki. Bestsellerem było wtedy dzieło szkockiego arystokraty Johna Napiera *Mirifici Logarithmorum Canonis (Opis zdumiewającej reguły logarytmów)*.

Pomnik Jana Napiera, szkocka Narodowa Galeria Portretów

Źródło: Stephencdickson, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 4.0.

Napier był prawdziwym człowiekiem Renesansu zaprojektował między innymi czołg napędzany przez ukrytych w nim ludzi, w rolnictwie propagował wykorzystanie nawozów sztucznych. Wynalazł też tzw. pałeczki Napiera – przyrząd do mechanicznego mnożenia i dzielenia liczb oraz wyciągania pierwiastków kwadratowych i sześciennych.

W dziele które opublikował zawarł opis logarytmów – nowatorskiego pomysłu, dzięki któremu między innymi można zastąpić mnożenie i dzielenie odpowiednio dodawaniem i odejmowaniem. Wynalezienie logarytmów uznano za krok milowy, który znacząco ułatwił prace rachunkowe żeglarzom, inżynierom i matematykom.

W tym materiale poznamy logarytmy, ich związki z potęgowaniem i najprostsze sposoby ich obliczania.

Twoje cele

- Zapiszesz potęgę w postaci logarytmu.
- Zapiszesz logarytm w postaci potęgi.
- Obliczysz wartość logarytmu, korzystając z definicji.

Przeczytaj

Z własności potęgowania wynika, że jeśli a jest liczbą dodatnią, różną od 1 i c jest liczbą rzeczywistą, to w sposób jednoznaczny możemy obliczyć potęgę a^c, czyli znaleźć taką liczbę b, że $a^c = b$.

Zastanowimy się teraz, czy można w sposób jednoznaczny określić wykładnik potęgi a^c, gdy znana jest podstawa a i wartość b potęgi.

W niektórych przypadkach odpowiedź na to pytanie jest łatwa.

Na przykład jeśli $5^c = 25$, to od razu odpowiemy, że $c = 2$.

Podobnie, jeśli $4^c = \frac{1}{4}$, to $c = -1$.

Znacznie trudniej jest odgadnąć liczbę c, gdy liczba ta nie jest liczbą całkowitą.

Na przykład jeśli $27^c = 9$, czyli gdy $c = \frac{2}{3}$.

Sytuacja się jeszcze bardziej komplikuje, gdy c jest liczbą niewymierną.

Na przykład, jeśli $5^c = 2$.

Określenie przybliżonej wartości takiego wykładnika ułatwią nam logarytmy.

Logarytmowanie jest zatem działaniem polegającym na obliczaniu wykładnika potęgi, gdy dana jest podstawa oraz wartość tej potęgi.

Przykład 1

- Wykładnik c spełniający równanie $6^c = 10$ nazywamy logarytmem liczby 10 przy podstawie 6.
- Wykładnik x spełniający równanie $4^x = \frac{1}{2}$ nazywamy logarytmem liczby $\frac{1}{2}$ przy podstawie 4.

Definicja: Logarytm

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a dodatniej i różnej od jedności, nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b.

Logarytm oznaczamy symbolem $\log_a b$.

Liczbę a nazywamy „*podstawą logarytmu*”, liczbę b – „*liczbą logarytmowaną*”.

Zapis $\log_a b = c$ **oznacza, że** $a^c = b$.

Szukanie rozwiązania równania $a^c = b$, gdy $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, jest więc szukaniem logarytmu liczby b przy podstawie a.

$$c = \log_a b$$

Przykład 2

- Rozwiązaniem równania $9^c = 9$ jest $c = 1$, zatem $\log_9 9 = 1$.
- Rozwiązaniem równania $10^c = 1000$ jest $c = 3$, zatem $\log_{10} 1000 = 3$.
- Rozwiązaniem równania $7^c = 1$ jest $c = 0$, zatem $\log_7 1 = 0$.
- Rozwiązaniem równania $\sqrt{2}^c = 8$ jest $c = 6$, zatem $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$.

Przykład 3

Zapiszemy potęgowanie za pomocą logarytmowania.

$2^4 = 16$ możemy zapisać jako $\log_2 16 = 4$

$8^{\frac{1}{3}} = 2$ możemy zapisać jako $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

$9^{-1} = \frac{1}{9}$ możemy zapisać jako $\log_9 \frac{1}{9} = -1$

Ważne!

Każda liczba dodatnia ma dokładnie jeden logarytm przy danej podstawie dodatniej i różnej od 1. Dla liczb ujemnych i zera logarytmów nie określamy.

Podamy teraz przykłady wyznaczania wartości logarytmów, korzystając z definicji.

Przykład 4

- Obliczamy $\log_4 64$.

Oznaczamy:

$\log_4 64 = x$

Stąd $4^x = 64$, czyli $x = 3$.

Odpowiedź:

$\log_4 64 = 3$

- Obliczamy $\log_{10} 0{,}01$.

Oznaczamy:

$\log_{10} 0{,}01 = x$

Stąd $10^x = 0{,}01$, czyli $x = -2$.

Odpowiedź:

$\log_{10} 0{,}01 = -2$

- Obliczamy $\log_{36} 6$.

Oznaczamy:

$\log_{36} 6 = x$.

Stąd $36^x = 6$, czyli $x = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź:

$\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

- Obliczamy $\log_{27} \frac{1}{3}$.

Oznaczamy:

$\log_{27} \frac{1}{3} = x$.

Stąd $27^x = \frac{1}{3}$, czyli $x = -\frac{1}{3}$.

Odpowiedź:

$\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

Przykład 5

Zapiszemy w najprostszej postaci wyrażenie $W = \frac{\log_3 81 - 2 \cdot \log_{16} 4}{\sqrt{\log_2 512}}$.

Obliczamy najpierw każdy z logarytmów.

$\log_3 81 = 4$, bo $3^4 = 81$

$\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$, bo $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

$\sqrt{\log_2 512} = \sqrt{9} = 3$, bo $2^9 = 512$

Wyznaczamy teraz wartość danego wyrażenia

$W = \frac{4 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{3} = 1$

Słownik

logarytm

liczby dodatniej b przy podstawie a dodatniej i różnej od jedności, to wykładnik potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją przedstawiającą pochodzenie logarytmów.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D3xECf2La

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej pojęcia logarytmu.

Polecenie 2

Wiedząc, że $a > 0$ i $a \neq 1$, oblicz wartość wyrażenia $W = \log_{3a} 9a^2 + \log_{\sqrt{a}} a\sqrt{a}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Oblicz x.

a) $\log_x 10 = -4$

b) $\log_x 2 = -0{,}5$

c) $\log_x 121 = 2$

Ćwiczenie 8

Określ, dla jakich liczb x określona jest wartość wyrażenia $\log_x(x-4)$.

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Ćwiczenie 12

Ćwiczenie 13

Ćwiczenie 14

Ćwiczenie 15

Ćwiczenie 16

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Logarytm – co to takiego?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje potęgę w postaci logarytmu
- zapisuje logarytm w postaci potęgi
- oblicza wartość logarytmu, korzystając z definicji
- pełni wyznaczone role w grupie
- dokonuje samooceny własnej pracy
- wykorzystuje dotychczasową wiedzę i umiejętności w nowych sytuacjach

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- rybki w akwarium
- interaktywny wykład
- praca z ekspertem

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają wiadomości dotyczące potęg – definicję, podstawowe własności.
2. Wyznaczeni wcześniej uczniowie przedstawiają przygotowaną w domu prezentację wprowadzającą do pojęcia logarytmów. Prezentacja ta powinna mieć charakter interaktywnego wykładu.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują metodą rybki w akwarium – uczniowie, którzy wcześniej zapoznali się z materiałami z sekcji „Przeczytaj”, prowadzą między sobą dyskusję na temat pojęcia logarytmu. Mogą przy tym wykorzystywać wcześniej przygotowane materiały interaktywne, animację.
2. Pozostali uczniowie przysługują się wymianie zdań, ale mogą zadawać też pytania, notować.
3. Po skończonej dyskusji, uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów (tych uczniów, którzy byli „rybkami w akwarium”). Wspólnie rozwiązują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Dyskusja – w jaki sposób pracowali eksperci, w jaki sposób uczniowie pełnili inne role powierzone im w grupie.

3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest ułożenie i rozwiązanie 3 zadań podobnego typu jak na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Definicja logarytmu. Własności logarytmu

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako wyprowadzenie do pojęcia: funkcja logarytmiczna.