



Równanie kwadratowe zapisane w postaci iloczynowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie kwadratowe zapisane w postaci iloczynowej

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

W tym materiale zapiszemy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ w postaci iloczynowej (jeżeli $\Delta \geq 0$). Postać iloczynowa równania jest bardzo wygodna dla znalezienia pierwiastków równania.

Zapisanie równania w postaci iloczynowej nazywa się również rozkładem na czynniki liniowe, czyli takie, w których niewiadoma występuje w pierwszej potęgze.

Twoje cele

- Przedstawisz równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ w postaci iloczynowej.
- Podasz pierwiastki równania kwadratowego zapisanego w postaci iloczynowej.
- Obliczysz współczynniki trójmianu kwadratowego o danych pierwiastkach.

Przeczytaj

Wiemy, że równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, dla $a \neq 0$ możemy zapisać w postaci:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

Jeżeli $\Delta > 0$ możemy przekształcić równoważnie równanie.

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Jeżeli $\Delta = 0$ to równanie ma jeden podwójny pierwiastek, zatem równanie możemy zapisać w postaci $a(x - x_0)^2 = 0$.

Twierdzenie: Postać iloczynowa równania kwadratowego

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie można przedstawić w postaci iloczynowej

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

gdzie:

x_1 i x_2 – są pierwiastkami tego równania.

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie można przedstawić w postaci iloczynowej

$$a(x - x_0)^2 = 0$$

gdzie:

x_0 – jest podwójnym pierwiastkiem tego równania.

3. Jeżeli $\Delta < 0$, to równania nie można zapisać w postaci iloczynowej.

Wyrazy $x - x_1$, $x - x_2$ nazywamy **czynnikami liniowymi**.

Przykład 1

Zapiszemy równanie kwadratowe $2x^2 - 7x - 4 = 0$ w postaci iloczynowej.

Obliczymy Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$$

Ponieważ $\Delta > 0$ zatem równanie ma dwa rozwiązania.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-7) - 9}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(-7) + 9}{2 \cdot 2}$$

$$x_2 = 4$$

Zatem równanie kwadratowe można zapisać w postaci iloczynowej

$$2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 4) = 0.$$

Przykład 2

Zapiszemy równanie $-2x^2 + 4\sqrt{2}x - 4 = 0$ w postaci iloczynowej.

Obliczymy Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = 32 - 32 = 0$$

Ponieważ $\Delta = 0$ zatem równanie posiada jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_0 = \frac{-4\sqrt{2}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_0 = \sqrt{2}$$

Zatem równanie kwadratowe można zapisać w postaci iloczynowej $-2 \cdot \left(x - \sqrt{2}\right)^2 = 0$.

Przykład 3

Znajdziemy, jeżeli istnieje, postać iloczynową równania $2\sqrt{2}x^2 + 2x + \sqrt{3} = 0$.

Obliczymy Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 4 - 8\sqrt{6}$$

Ponieważ $\Delta < 0$ równania nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

Zatem równania nie można zapisać w postaci iloczynowej.

Przykład 4

Pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ są liczby $\frac{1}{2}$ i 2.

Wykażemy, że $a = c$.

Zapiszemy równanie w postaci iloczynowej.

$$a\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) = 0$$

Przekształcimy równoważnie równanie.

$$a\left(x^2 - 2x - \frac{1}{2}x + 1\right) = 0$$

$$a\left(x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1\right) = 0$$

$$ax^2 - 2\frac{1}{2}ax + a = 0$$

Zatem $a = c$.

Przykład 5

Wyznamy wartości parametru a tak, aby liczba $x_0 = 2$ była jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania $x^2 - 4x + 6 = a^2 + a$.

Zauważmy, że współczynnik przy x^2 jest równy 1.

Zgodnie z poznanyin twierdzeniem, aby liczba 2 była jedynym pierwiastkiem równania, możemy równanie zapisać w postaci $(x - 2)^2 = 0$.

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Zapiszemy równanie $x^2 - 4x + 6 = a^2 + a$ w postaci równoważnej.

$$x^2 - 4x + 4 = a^2 + a - 2$$

$$(x - 2)^2 = a^2 + a - 2$$

Czyli

$$a^2 + a - 2 = 0$$

Obliczymy deltę i miejsca zerowe równania z niewiadomą a .

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a_1 = \frac{-1 - 3}{2 \cdot 1}$$

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a_2 = \frac{-1 + 3}{2 \cdot 1}$$

$$a_2 = 1$$

Aby liczba $x_0 = 2$ była jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania $a = -2$ lub $a = 1$.

Słownik

postać iloczynowa równania kwadratowego

postać iloczynowa równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ dla $\Delta > 0$ oraz $a(x - x_0)^2 = 0$ dla $\Delta = 0$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką przedstawiającą sposób zapisania równań kwadratowych w postaci iloczynowej.

Polecenie 2

Zapisz (jeżeli to możliwe) równanie kwadratowe w postaci iloczynowej.

a) $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$

b) $2x^2 - 4\sqrt{5}x + 10 = 0$

c) $x^2 - \sqrt{2}x + 10 = 0$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz równanie kwadratowe przedstawione w postaci iloczynowej z pierwiastkami równania.

$$5 \cdot (x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\{-3, 2\}$$

$$-3 \cdot (x + 3)(x + 2) = 0$$

$$\{-3, -2\}$$

$$-2 \cdot (x - 3)(x + 2) = 0$$

$$\{-2, 3\}$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\{2, 3\}$$

Ćwiczenie 2



Oblicz współczynniki równania kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$, którego pierwiastkami są liczby 3 i -7 .

Wpisz w wyznaczone miejsca odpowiednie liczby.

$$b = \text{[input box]}$$

$$c = \text{[input box]}$$

Ćwiczenie 3



Wstaw w wyznaczone miejsce taką liczbę, aby liczba -2 była podwójnym pierwiastkiem równania $\frac{1}{2}x^2 + \text{[input box]} \cdot x + 2 = 0$.

Ćwiczenie 4



Podaj pierwiastki równania kwadratowego $\sqrt{2} \cdot (x + 1 - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} - 1) = 0$.

Wybierz poprawną odpowiedź.

☐ $x_1 = -1 + \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{2} + 1$

☐ $x_1 = -1 + \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{2} - 1$

☐ $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{2} - 1$

☐ $x_1 = 1 - \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{2} - 1$

Ćwiczenie 5



Wiedząc, że pierwiastkami równania $2,4x^2 + tx - 48 = 0$ są liczby -5 i 4 wybierz i przeciągnij odpowiednią liczbę.

$t =$

20

-20

-2, 4

2, 4

Ćwiczenie 6



Połącz równanie kwadratowe przedstawione w postaci ogólnej z równaniem kwadratowym zapisanym w postaci iloczynowej.

$$2x^2 + 4x - 48 = 0$$

$$-(x - 3)^2 = 0$$

$$-x^2 - 1,5x + 1 = 0$$

$$-(x + 2)(x - 0,5) = 0$$

$$-x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$2 \cdot (x - 4)(x - 6) = 0$$

$$-x^2 - 2,5x - 1 = 0$$

$$-(x + 2)(x + 0,5) = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$2 \cdot (x - 4)(x + 6) = 0$$

Ćwiczenie 7



Zaznacz poprawną odpowiedź. Pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ są liczby $\frac{1}{5}$ i 5. Wynika z tego, że:

☐ $c = 1$

☐ $a = c$

☐ $a = 1$

☐ $b = 5\frac{1}{5}$

Ćwiczenie 8



Wyznacz wartość parametru a tak, aby liczba $x_0 = -1$ była jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania $x^2 + 2x + 7 - 5a = -a^2$.

Wybierz wszystkie poprawne rozwiązania.

☐ 1

☐ -3

☐ 2

☐ -1

☐ 3

☐ -2

☐ 0

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równania kwadratowe zapisane w postaci iloczynowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przedstawia równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ w postaci iloczynowej
- podaje pierwiastki równania kwadratowego zapisanego w postaci iloczynowej
- oblicza współczynniki trójmianu kwadratowego o danych pierwiastkach
- dobiera odpowiedni model matematyczny do rozwiązania nietypowego zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadków
- burza mózgów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe postaci równań kwadratowych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 5 przykładów równań kwadratowych zapisanych w postaci iloczynowej. Zadaniem uczniów jest zapisanie równań w postaci ogólnej.
2. Nauczyciel prosi uczniów o przeanalizowanie twierdzenia i przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie oglądają infografikę i omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują wyniki. Tworzą wspólny plakat ilustrujący rozwiązania zadań.
5. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania równań kwadratowych i zapisywania równań w postaci iloczynowej.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie polecenia 2.

Materiały pomocnicze:

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania prezentacji pokazującej sposoby zapisywania równań kwadratowych w postaci iloczynowej.