



Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Korzystając ze wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wyprowadzimy wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta. Za pomocą tych wzorów będziemy mogli obliczać wartości sinus, cosinus i tangens podwojonego kąta, gdy znane są funkcje trygonometryczne pojedynczego kąta.

Twoje cele

- Zastosujesz wzory na sinus, cosinus, tangens podwojonego kąta do obliczania wartości innych kątów.
- Zastosujesz wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta do wyprowadzania innych wzorów.

Przeczytaj

Wszystkie wzory na funkcje podwojonego argumentu wyprowadzimy ze wzorów na funkcje trygonometryczne sumy argumentów. Zatem przypomnijmy te wzory.

Twierdzenie: sinus sumy argumentów

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

Twierdzenie: cosinus sumy argumentów

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

Twierdzenie: tangens sumy argumentów

Założmy, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Zatem wyprowadźmy wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego argumentu.

Sinus podwojonego argumentu

Zapiszemy $\sin 2x$ jako $\sin(x + x)$ i skorzystamy ze wzoru na [sinus sumy argumentów](#) podstawiając we wzorze za $y = x$.

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$$

Stąd otrzymujemy wzór

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Cosinus podwojonego argumentu

Zapiszemy $\cos 2x$ jako $\cos(x + x)$ i skorzystamy ze wzoru na [cosinus sumy argumentów](#) podstawiając we wzorze za $y = x$.

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Stąd otrzymujemy wzór

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Korzystając z [jedynki trygonometrycznej](#) możemy wzór na cosinus podwojonego argumentu zapisać w dwóch innych, przydatnych postaciach:

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x,$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1.$

Tangens podwojonego argumentu

Zapiszemy $\operatorname{tg} 2x$ jako $\operatorname{tg}(x + x)$ i skorzystamy ze wzoru na [tangens sumy argumentów](#) podstawiając we wzorze za $y = x$.

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Stąd otrzymujemy wzór

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

dla $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ i $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Twierdzenie: funkcje podwojonego argumentu

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, dla $x \in \mathbb{R}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$, dla $x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, dla $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ i $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Przykład 1

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta 15° .

1. Zapisujemy wzór na cosinus kąta 30° jako kąta $2 \cdot 15^\circ$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = 2 \cos^2(15^\circ) - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2(15^\circ) - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2 \cos^2 15^\circ$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2} = \cos^2 15^\circ$$

Ponieważ kąt 15° jest kątem pierwszej ćwiartki, zatem $\cos 15^\circ$ jest liczbą dodatnią. Zatem

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}}.$$

Zapiszemy inaczej wartość $\cos 15^\circ$.

$$\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3} + 4}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

2. Zapisujemy wzór na cosinus kąta 30° jako kąta $2 \cdot 15^\circ$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \sin^2 15^\circ$$

Ponieważ kąt 15° jest kątem pierwszej ćwiartki, zatem $\sin 15^\circ$ jest liczbą dodatnią. Zatem

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}}{2}}.$$

Zapiszemy inaczej wartość $\sin 15^\circ$.

$$\sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

3. Obliczymy tangens 15° jako wynik ilorazu wartości funkcji sinus 15° i wartości funkcji cosinus 15° .

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{6 - 2} = \frac{6 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + 2}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

Przykład 2

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta $22,5^\circ$.

1. Zapisujemy wzór na cosinus kąta 45° jako kąta $2 \cdot 22,5^\circ$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ = \cos(2 \cdot 22,5^\circ) = 2 \cos^2 22,5^\circ - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2 22,5^\circ - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 \cos^2 22,5^\circ$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} = \cos^2 22,5^\circ$$

Ponieważ kąt $22,5^\circ$ jest kątem pierwszej ćwiartki, zatem $\cos 22,5^\circ$ jest liczbą dodatnią. Zatem

$$\cos 22,5^\circ = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2}}.$$

Zapiszemy inaczej wartość $\cos 22,5^\circ$:

$$\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}{1}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}{1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

2. Zapisujemy wzór na cosinus kąta 45° jako kąta $2 \cdot 22,5^\circ$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ = \cos(2 \cdot 22,5^\circ) = 1 - 2 \sin^2 22,5^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2 \sin^2 22,5^\circ$$

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \sin^2 22,5^\circ$$

$$\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \sin^2 22,5^\circ$$

Ponieważ kąt $22,5^\circ$ jest kątem pierwszej ćwiartki, zatem $\sin 22,5^\circ$ jest liczbą dodatnią. Zatem

$$\sin 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}.$$

Spróbujemy zapisać inaczej wartość $\sin 22,5^\circ$:

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{1}} = \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}{1}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

3. Obliczymy tangens $22,5^\circ$ jako wynik ilorazu wartości funkcji sinus $22,5^\circ$ i wartości funkcji cosinus $22,5^\circ$:

$$\operatorname{tg} 22,5^\circ = \frac{\sin 22,5^\circ}{\cos 22,5^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2}} = \sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1.$$

Przykład 3

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta $7,5^\circ$.

1. Zapisujemy wzór na cosinus kąta 15° jako kąta $2 \cdot 7,5^\circ$.

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \cos 15^\circ = \cos(2 \cdot 7,5^\circ) = 2 \cos^2 7,5^\circ - 1$$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 2 \cos^2 7,5^\circ - 1$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + 1 = 2 \cos^2 7,5^\circ$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{8} = \cos^2 7,5^\circ$$

Ponieważ kąt $7,5^\circ$ jest kątem pierwszej ćwiartki, zatem $\cos 7,5^\circ$ jest liczbą dodatnią.
Zatem

$$\cos 7,5^\circ = \sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{8}}.$$

2. Zapisujemy wzór na cosinus kąta 15° jako kąta $2 \cdot 7,5^\circ$:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \cos 15^\circ = \cos(2 \cdot 7,5^\circ) = 1 - 2 \sin^2 7,5^\circ$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 1 - 2 \sin^2 7,5^\circ$$

$$1 - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 2 \sin^2 7,5^\circ$$

$$\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} = \sin^2 7,5^\circ$$

Ponieważ kąt $7,5^\circ$ jest kątem pierwszej ćwiartki, zatem $\sin 7,5^\circ$ jest liczbą dodatnią.
Zatem

$$\sin 7,5^\circ = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}.$$

3. Obliczymy tangens $7,5^\circ$ jako wynik ilorazu wartości funkcji sinus $7,5^\circ$ i wartości funkcji cosinus $7,5^\circ$:

$$\operatorname{tg} 7,5^\circ = \frac{\sin 7,5^\circ}{\cos 7,5^\circ} = \frac{\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}}{\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}} = \frac{\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}.$$

Przykład 4

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kątów $67,5^\circ$, 75° , $82,5^\circ$.

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzorów redukcyjnych prawdziwych dla kątów ostrych:

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Zatem możemy zapisać zależności dla poszukiwanych kątów:

$$\sin 67,5^\circ = \cos 22,5^\circ$$

$$\cos 67,5^\circ = \sin 22,5^\circ$$

$$\operatorname{tg} 67,5^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 22,5^\circ}$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$$

$$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ}$$

$$\sin 82,5^\circ = \cos 7,5^\circ$$

$$\cos 82,5^\circ = \sin 7,5^\circ$$

$$\operatorname{tg} 82,5^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 7,5^\circ}$$

Wyniki możemy zapisać w tabeli:

α	$7,5^\circ$	15°	$22,5^\circ$	$67,5^\circ$	75°	$82,5^\circ$
$\sin \alpha$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$
$\cos \alpha$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} + 1$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}$

Słownik

jedynka trygonometryczna

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

sinus sumy argumentów

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

cosinus sumy argumentów

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

tangens sumy argumentów

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \text{ dla } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w jędnorękiego bandytę. W grze poćwiczysz znajomość wartości funkcji trygonometrycznych połowy charakterystycznych kątów.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3Uif3MCs>

Polecenie 2

Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7

Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}$.



Ćwiczenie 8

Oblicz $\operatorname{tg} x$, jeżeli $\cos 2x = \frac{1}{4}$.



Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5. korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzory na sinus, cosinus, tangens podwojonego kąta do obliczania wartości innych kątów;
- stosuje wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta do wyprowadzania innych wzorów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Gra edukacyjna” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat zajęć: „Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta” i prosi, by na jego podstawie uczniowie sformułowali cel lekcji oraz kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Gra edukacyjna”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli). Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta”).

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Gra edukacyjna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta”.