



Graniastosłup prawidłowy sześciokątny - zadania z kontekstem realistycznym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Graniastosłup prawidłowy sześciokątny - zadania z kontekstem realistycznym

Źródło: [Brett Hondow z Pixabay](#), domena publiczna.

Kształt sześciokąta, który kojarzony jest z plastrzem miodu bywa powszechnie stosowany w meblarstwie i sztuce użytkowej. Ponieważ przedmioty codziennego użytku są zazwyczaj trójwymiarowe, to wykorzystujący kształt sześciokąta architekci i artyści sięgają zazwyczaj po graniastosłup prawidłowy sześciokątny. Kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego przyjmują więc szkatułki, szklanki, doniczki, półki, kolumny itp. Używając tych przedmiotów lub stykając się z nimi w życiu codziennym bardzo rzadko zastanawiamy się nad tym, ile materiału potrzeba było na jego zbudowanie – to konstruktorzy i wytwórcy dbają o to, aby mieć wystarczająco dużo materiału. Częściej interesuje nas objętość szklanek, misek, wazonów i innych pojemników. Jedno i drugie zagadnienie ma swoje źródło w matematyce – jest to nic innego, jak obliczanie pola powierzchni i objętości graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.

Twoje cele

- Obliczysz pole powierzchni i objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego w sytuacjach rzeczywistych.
- Dobierzesz strategię rozwiązywania zadań tekstowych dotyczących graniastosłupów.

Przeczytaj

Tak jak w przypadku większości brył, wśród zadań z kontekstem realistycznym dotyczących [graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych](#), możemy wyróżnić zadania dotyczące objętości i zadania dotyczące pola powierzchni (niekoniecznie całkowitej).

Zadania dotyczące objętości graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego

Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego obliczymy ze wzoru

$$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} H.$$

Przykład 1

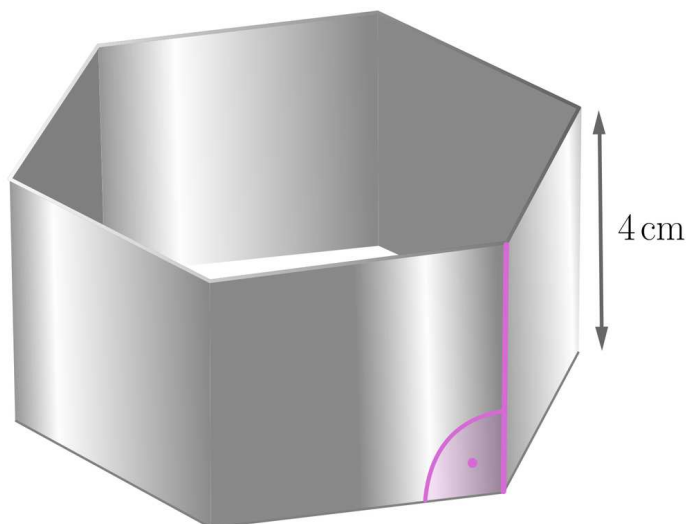
Do szklanki w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 15 cm wleto 200 ml wody. Obliczymy, do jakiej wysokości (w przybliżeniu do 0,1 cm) sięgnie woda.

Rozwiązanie

Objętość wody wynosi 200 ml = 200 cm³. Mamy więc $6 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} H = 200$, a stąd $H = \frac{200}{24\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}}{3} \approx 14,4$ (cm).

Przykład 2

W foremce do ciastek o wysokości 4 cm zmieści się około 166 cm³. Sprawdźmy, czy z kawałka ciasta w kształcie koła o średnicy 9 cm można wyciąć ciastko korzystając z tej foremki?



Rozwiązanie

Promień kawałka ciasta musi być co najmniej równy promieniowi okręgu opisanego na podstawie foremki. Oznaczmy przez a krawędź podstawy foremki.

Wówczas $166 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4$, a stąd $a^2 = \frac{166}{6\sqrt{3}} \approx 16$.

Czyli $a \approx 4$ (przy czym jest to przybliżenie z nadmiarem).

Ponieważ promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym ma długość taką, jak jego bok, to promień kawałka ciasta musi spełniać nierówność $r \geq 4$, a średnica musi być równa co najmniej 8. Czyli z kawałka o średnicy 9 cm możemy wyciąć ciastko za pomocą tej foremki.

Zagadnienia dotyczące pola powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego

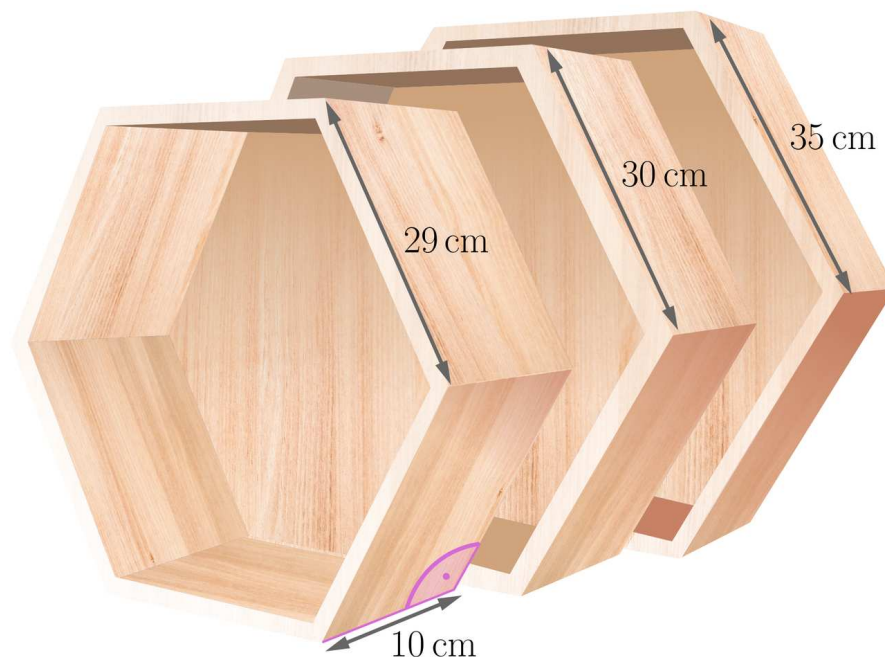
Przypomnijmy, że powierzchnia boczna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego składa się z sześciu przystających prostokątów o wymiarach $a \times H$, gdzie a długością krawędzi podstawy, a H **wysokością graniastosłupa**.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wyraża się wzorem

$$P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6aH.$$

Przykład 3

Stolarz wykonuje komplet półek ściennych (wraz z tylną ścianą) w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędziach 29 cm, 30 cm, 35 cm i wysokości 10 cm. Obliczymy, jaką powierzchnię ma deska (wynik przybliż do 0,01 m²) zużyta na budowę takiego kompletu.



Rozwiązanie

Obliczmy sumę pól powierzchni bocznych tych półek:

$$P = 6 \cdot 29 \cdot 10 + 6 \cdot 30 \cdot 10 + 6 \cdot 35 \cdot 10 = 5640 \text{ (cm}^2\text{)} = 0,564 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Obliczamy sumę pól podstaw:

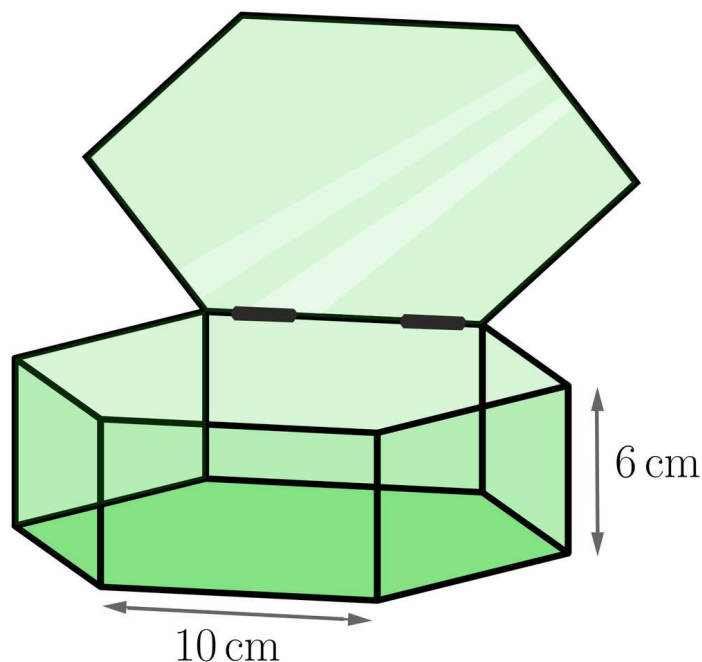
$$P_{\text{podstaw}} = 6 \cdot \left(\frac{29^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{30^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{35^2 \sqrt{3}}{4} \right) \approx 7705,9 \text{ (cm}^2\text{)} = 0,77059 \text{ (m}^2\text{)}.$$

A zatem łącznie zużyjemy:

$$P_{\text{półek}} \approx 0,564 + 0,77059 = 1,33459 \approx 1,33 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Przykład 4

Obliczmy, jaką powierzchnię (w przybliżeniu do 0,1 m²) ma szkło potrzebne na zbudowanie 100 zamykanych szkatulek na obrączki w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 10 cm i wysokości 6 cm.



Rozwiązanie

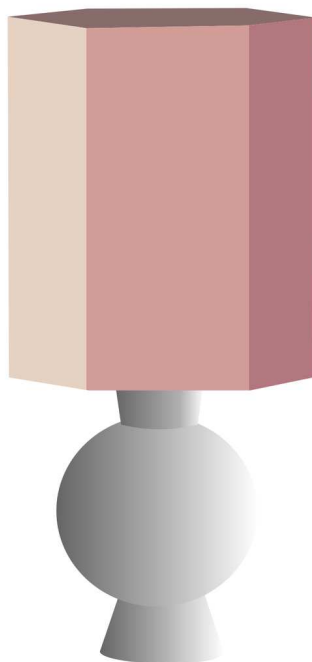
Obliczmy pole powierzchni takiego graniastosłupa:

$$P_c = 3 \cdot 100\sqrt{3} + 6 \cdot 10 \cdot 6 \approx 879,62 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Dla 100 sztukulek będzie to: $87962 \text{ (cm}^2\text{)} \approx 8,8 \text{ (m}^2\text{)}.$

Przykład 5

Pani Danuta ma prostokątny kawałek juty o wymiarach $0,2 \text{ m} \times 1 \text{ m}$. Chce z niego wykonać abażur w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. W magazynie wnętrzarskim znalazła model abażuru, którego stosunek krawędzi podstawy do wysokości wynosi $3 : 2$, a powierzchnia zużytego materiału 900 cm^2 . Sprawdźmy, czy Pani Danuta może wykonać taki abażur tak, aby był on wycięty w jednym kawałku.



Rozwiązanie

Mamy $6aH = 900$ i $a = \frac{3}{2}H$. Czyli $6 \cdot \frac{3}{2}H \cdot H = 900$, a stąd $9H^2 = 900$.

Ostatecznie $H = 10$ (cm). A zatem $a = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$ (cm).

Powierzchnia boczna tego graniastosłupa po wycięciu w jednym kawałku będzie prostokątem o wymiarach $0,1 \text{ m} \times 0,9 \text{ m}$. Czyli kawałek, który posiada Pani Danuta, jest wystarczający, aby wykonać taki abażur.

Słownik

graniastosłup prawidłowy sześciokątny

graniastosłup, którego podstawy są sześciokątami foremnymi, a ściany boczne przystającymi prostokątami

wysokość graniastosłupa

najkrótszy odcinek łączący punkty leżące w płaszczyznach dwóch przeciwległych podstaw graniastosłupa

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem edukacyjnym, a następnie wykonaj polecenia poniżej.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DFzvrylzs>

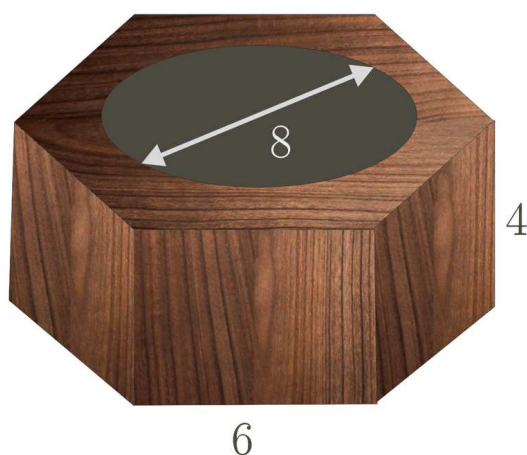
Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej graniastopuła prawidłowego sześciokątnego- zadania z kontekstem realistycznym.

Polecenie 2

Stalowa rura konstrukcyjna do maszyn ma długość 12 m i jest w kształcie graniastopuła prawidłowego sześciokątnego. Dłuższa przekątna otworu ma długość 360 mm, a dłuższa przekątna rury 400 mm. Ile waży ta rura, jeżeli gęstość stali wynosi $7,86 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?

Polecenie 3

Drewniany świecznik ma kształt graniastopuła prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 4 cm, w którym wydrążono otwór w kształcie walca o średnicy 8 i głębokości 1 cm.



Cały świecznik (łącznie z otworem i spodem) malujemy farbą o wydajności 1 liter na 2 m^2 . Ile świeczników możemy pomalować mając opakowanie farby o pojemności 0,5 l?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dwa naczynia w kształcie graniastostupa prawidłowego sześciokątnego mają taką samą objętość, a wysokość pierwszego z nich jest czterokrotnie większa od drugiego. Wówczas krawędź podstawy pierwszego naczynia jest:

- ☐ czterokrotnie dłuższa od krawędzi podstawy drugiego.
- ☐ dwukrotnie krótsza od krawędzi podstawy drugiego.
- ☐ dwukrotnie dłuższa od krawędzi podstawy drugiego.
- ☐ czterokrotnie krótsza od krawędzi podstawy drugiego.

Ćwiczenie 2



Pani Kowalska ma doniczkę w kształcie graniastostupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 5 cm i wysokości 20 cm. Pani Kowalska ma dziesięciolitrowe opakowanie ziemi. Ile doniczek może napęłnić w całości?

- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 6
- ☐ 7

Ćwiczenie 3



Oceń, czy podane zdania są prawdziwe czy fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Jeżeli szklanka ma kształt graniastostupa prawidłowego sześciokątnego i jej objętość wynosi 250 ml, a wysokość 10 cm, to krawędź podstawy ma długość 5 cm.	☐	☐
W słoiku w kształcie graniastostupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 10 cm zmieści się ośmiokrotnie mniej cukru, niż w słoiku o krawędzi podstawy 8 cm i wysokości 20 cm.	☐	☐
Jeżeli do wazonu w kształcie graniastostupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 5 cm i wysokości 20 cm wlejemy 2 l wody, to woda przeleje się.	☐	☐

Ćwiczenie 4



W tabeli znajdują się wymiary prętów o przekroju sześciokątnym (d - średnica okręgu opisanego na podstawie, h - długość) i gęstości materiałów, z których zostały wykonane.

Materiał	Stal nierdzewna	Mosiądz	Aluminium	Stal
Wymiary	$d = 20 \text{ mm}$, $h = 2 \text{ dm}$	$d = 18 \text{ mm}$, $h = 15 \text{ cm}$	$d = 16 \text{ mm}$, $h = 1 \text{ m}$	$d = 20 \text{ mm}$, $h = 22 \text{ cm}$
Gęstość	7860 kg/m^3	8500 kg/m^3	2720 kg/m^3	7600 kg/m^3

Ustaw pręty w kolejności rosnącej masy.

Stal



Mosiądz



Aluminium



Stal nierdzewna



Ćwiczenie 5



Poliwęglanowy sześciokątny ogród zimowy ogranicza powierzchnię 3-krotnie mniejszą od powierzchni szkła, które należy użyć do budowy ścian bocznych. Suma tych powierzchni wynosi około $93,5 \text{ m}^2$. Jaka długość ma krawędź podstawy i wysokość ścian tego ogrodu?



Ćwiczenie 6



Dwanaście szkatułek w kształcie graniastopuła prawidłowego sześciokątnego jak na rysunku pomalowano (na zewnątrz) dwukrotnie farbą akrylową o pojemności 500 ml. Jaka jest wydajność tej farby w m^2/l ?



Ćwiczenie 7



Dwie świece w kształcie graniastopuła prawidłowego sześciokątnego o wysokości 20 cm i krawędziach podstawy 4 cm i 6 cm przetopiono na wosk. Ile świeczek w kształcie graniastopuła prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 2 cm i wysokości 4 cm można wykonać z otrzymanego wosku?

Ćwiczenie 8



Betonowa donica ma wymiary zewnętrzne: krawędź podstawy 40 cm i wysokość 50 cm. Wysokość wewnętrzna jest o 10 cm mniejsza. Ile wynosi wewnętrzna krawędź donicy (z dokładnością do 1 cm), jeżeli gęstość betonu wynosi 2000 kg/m^3 , a donica waży 240 kg?



Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Graniastosłup prawidłowy sześciokątny - zadania z kontekstem realistycznym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria

Poziom podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego;
- oblicza długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym;
- analizuje treść zadania, dobiera strategię rozwiązywania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa kierowana;
- burza mózgów;

- rozmowa nauczająca;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu;
- projektor multimedialny;
- e-podręcznik;
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wraz z uczniami prowadzi rozmowę kierowaną na temat własności graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych i tego, gdzie można je spotkać w życiu codziennym.
2. Nauczyciel wraz z uczniami formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla uczniom film z sekcji Film edukacyjny.
2. Uczniowie rozwiązują Polecenia z sekcji Film edukacyjny samodzielnie, następnie dyskutują odpowiedzi z sąsiadem z ławki lub ławki obok wypracowując wspólne rozwiązanie. Nauczyciel prezentuje właściwe odpowiedzi. Pary dokonują samooceny.
3. Uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia (bez ćw. 3) z sekcji Sprawdź się.
4. Nauczyciel prezentuje odpowiedzi. W razie potrzeby wybrany uczeń rozwiązuje zadanie na tablicy. Uczniowie dokonują samooceny.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie wraz z nauczycielem dokonują podziału zadań ze względu na strategię rozwiązania. Podają przykłady sytuacji, w których liczymy objętość (nalewanie napojów, obliczanie masy) i pole powierzchni (malowanie, pakowanie prezentu itp.).

Praca domowa:

1. Ćwiczenie 3 z sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

Pole powierzchni granasłupa

Objętość granastosłupa

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać film edukacyjny w domu jako utrwalenie materiału.