



Błędy obliczeń numerycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Błędy obliczeń numerycznych

Źródło: Nick Hillier, domena publiczna.

Na co dzień korzystamy z pewnych ogólnie przyjętych reprezentacji liczb. Jesteśmy w stanie bez problemu odczytać np. wartość 987,25. Nie oznacza to, że komputery poradzą sobie z tym równie sprawnie. Na poziomie oprogramowania (*software*) zazwyczaj nie używamy specjalnych systemów prezentowania liczb, jednakże *hardware* jest przystosowany do analizy i manipulacji wartościami przedstawionymi w konkretny sposób. Więcej na temat tego, w jaki sposób liczby reprezentowane są w komputerze, znajdziesz w e-materiale [Reprezentacja liczb w komputerze](#).

Liczby wprowadzane z klawiatury, np. do tworzonego programu, trzeba odpowiednio przekonwertować na inny system. Również same działania matematyczne muszą być wykonane za pośrednictwem stosownych procedur. Dlatego w tym e-materiale skupimy się na sposobach wykonywania przez komputer działań arytmetycznych i operacji logicznych oraz na tym, jakimi błędami mogą być obarczone te działania.

Jak wygląda omawiane zagadnienie w poszczególnych językach programowania przedstawiamy w e-materiałach:

- [Błędy obliczeń numerycznych w języku C++](#),
- [Błędy obliczeń numerycznych w języku Java](#),
- [Błędy obliczeń numerycznych w języku Python](#).

Więcej zadań? Sięgnij do [Błędy obliczeń numerycznych – zadania maturalne](#).

Twoje cele

- Przeanalizujesz, jakimi błędami obarczone są obliczenia numeryczne.
- Wyjaśnisz, czym jest błąd względny i błąd bezwzględny oraz prześledzisz sposoby ich obliczania.
- Scharakteryzujesz różnicę między przybliżeniami z nadmiarem i niedomiarem.

Przeczytaj

Wiesz już, że operacje algorytmiczne wykonywane przez komputer obarczone są błędami. Wyróżnić możemy kilka źródeł nieprawidłowości w obliczeniach numerycznych, np.:

- błędy wejściowe (niedostateczna dokładność danych źródłowych),
- błędy reprezentacji (ograniczona liczba bitów na reprezentację danych, konwersja między systemami liczbowymi),
- błędy obcięcia (uproszczenia obliczeń),
- błędy zaokrągleń (wynikające z reprezentacji danych).

Błędy **wejściowe** występują w sytuacji, kiedy dane wprowadzone do pamięci komputera odbiegają od dokładnych, rzeczywistych wartości. Innymi słowy, kiedy wyniki obarczone są błędem pomiaru, np. w przypadku mierzenia wielkości fizycznych.

Błędy **reprezentacji** wynikają z ograniczeń w możliwości przechowywania bitów. Na przykład π ma nieskończoną liczbę cyfr po przecinku, ale ze względu na ograniczenia precyzji w komputerach można przechowywać tylko część z nich (zależnie od systemu, np. 16, 32, 64, 128 i tak dalej).

Błędy **obcięcia** wynikają z procedur numerycznych przy zmniejszaniu liczby działań. Związane są z przybliżaniem obliczeń nieskończonych. Mamy z nimi do czynienia przy obliczaniu całek oznaczonych.

Błędy **zaokrągleń** występują, ponieważ komputery mają ograniczoną zdolność do reprezentowania liczb. Zaokrąglając daną liczbę, nie podajemy zatem jej dokładnej wartości, a jej **przybliżenie**.

Polecenie 1

Zastanów się, czy są problemy, w których nie możemy stosować przybliżeń i zaokrągleń.

Błędy przybliżeń

Przybliżając liczbę (czyli wykonując działania za pomocą komputera, ponieważ uzyskane wyniki zawsze są przybliżeniami), popełniamy błąd przybliżenia. Wyróżniamy błąd bezwzględny oraz błąd względny przybliżenia.

Ważne!

Błąd przybliżenia to różnica między wartością przybliżoną (tą, którą obliczyliśmy, oszacowaliśmy lub zmierzaliśmy) a wartością dokładną (oczekiwaną).

Błąd bezwzględny

Błąd bezwzględny wyraża bezwzględną różnicę pomiędzy wartością zmierzoną a dokładną. Obliczamy go zgodnie ze wzorem:

$$\Delta x = |x - x_0|$$

gdzie x to dokładna wartość, x_0 oznacza zmierzoną wartość, a Δx – błąd bezwzględny.

Ważne!

Błąd bezwzględny jest zawsze liczbą nieujemną. Wyrażamy go w takich samych jednostkach jak wartość, którą przybliżamy.

Przykład 1

Martyna i Grzegorz postanowili kupić nową grę planszową. Jednak pozycja, którą wybrali, była dostępna jedynie w zagranicznym sklepie, a jej cenę podano w euro. Martyna oszacowała, że za grę kosztującą 50 euro zapłacą 250 złotych. Grzegorz się z nią nie zgadzał i twierdził, że wydadzą 225 złotych. Ostatecznie zapłacili 242 złote. Jaki błąd przybliżenia popełniła Martyna, a jaki Grzegorz?

$$x_M = 250 \text{ zł}$$

$$x_G = 225 \text{ zł}$$

Wartość dokładna: $x = 242 \text{ zł}$

Przybliżenie wykonane przez Martynę to przybliżenie z **nadmiarem**. Błąd tego przybliżenia wynosi 8 zł.

Przybliżenie wykonane przez Grzegorza to przybliżenie z **niedomiarem**. Błąd tego przybliżenia wynosi 17 zł.

Przykład 2

Przybliżenie pewnej liczby x jest równe 3,83. Błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi $\frac{1}{300}$. Oblicz dokładną wartość liczby x .

Korzystając ze wzoru na błąd bezwzględny przybliżenia, możemy zapisać:

$$|x - 3,83| = \frac{1}{300}$$

Rozważamy zatem dwie możliwości:

$$x - 3,83 = \frac{1}{300} \text{ lub } x - 3,83 = -\frac{1}{300}$$

$$x = \frac{1}{300} + 3,83 \text{ lub } x = -\frac{1}{300} + 3,83$$

$$x = \frac{1}{300} + \frac{383}{100} \text{ lub } x = -\frac{1}{300} + \frac{383}{100}$$

$$x = \frac{1 + 1149}{300} \text{ lub } x = \frac{-1 + 1149}{300}$$

$$x = \frac{1150}{300} \text{ lub } x = \frac{1148}{300}$$

$$x = 3\frac{5}{6} \text{ lub } x = 3\frac{62}{75}$$

W pierwszym przypadku $x > p$, więc liczba 3,83 to **przybliżenie z niedomiarem**.

W drugim przypadku $x < p$, zatem liczba 3,83 to **przybliżenie z nadmiarem**.

Więcej przykładów znajdziesz w e-materiale [Błąd przybliżenia. Błąd bezwzględny. przybliżenia.](#)

Błąd względny

Błąd względny to stosunek błędu bezwzględnego do oczekiwanego wyniku. Obliczamy go zgodnie ze wzorem:

$$\partial_x = \frac{|x - x_0|}{|x|} = \frac{\Delta x}{x}$$

gdzie x to dokładna wartość, x_0 oznacza zmierzoną wartość, Δx – błąd bezwzględny, a za pomocą δ określamy błąd względny.

Błąd względny najczęściej jest wyrażany w procentach i nazywany wtedy **błędem procentowym**:

$$\partial_x = \frac{\Delta x}{x} \times 100\%$$

Ważne!

Błąd względny jest wielkością niemianowaną, czyli nie ma jednostki miary. Błąd procentowy podajemy w procentach.

Przeanalizujemy omówiony wcześniej przykład, tym razem jednak obliczymy błąd względny.

Przykład 3

Wiemy, że gra Martyny i Grzegorza kosztowała 242 zł, błąd bezwzględny przybliżenia Martyny wynosił $\Delta x_M = 8$ zł, a Grzegorza $\Delta x_G = 17$ zł. Ile zatem wynoszą błędy względne?

Błąd Martyny wynosi:

$$\partial_M = \frac{8}{242} = 0,033$$

Błąd Grzegorza wynosi:

$$\partial_G = \frac{17}{242} = 0,070$$

Popełnione przez nich błędy procentowe to:

$$\partial_M = \frac{8}{242} \times 100\% = 3,3\%$$

$$\partial_G = \frac{17}{242} \times 100\% = 7\%$$

Przykład 4

Jeśli podamy przybliżenie odległości z Warszawy do Krakowa, dla którego błąd bezwzględny to 25 km oraz przybliżenie długości trasy z Warszawy do Londynu

z błędem bezwzględnym wynoszącym 25 km, to otrzymane błędy bezwzględne są sobie równe. Widzimy jednak, że ich znaczenie jest zupełnie inne.

Rzeczywista odległość z Warszawy do Krakowa wynosi $x = 320$ km.

Błąd bezwzględny Δ_x wynosi 25 km, więc błąd względny przybliżenia wynosi:

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} = \frac{25}{320} \approx 0,078$$

Błąd procentowy to:

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} \cdot 100\% \approx 0,078 \cdot 100\% = 7,8\%$$

Z kolei rzeczywista odległość z Warszawy do Londynu wynosi $y = 1625$ km.

Jeżeli błąd bezwzględny Δ_y wyniesie 25 km, to błąd względny przybliżenia wynosi:

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{25}{1625} \approx 0,015$$

Natomiast błąd procentowy to:

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} \cdot 100\% \approx 0,015 \cdot 100\% = 1,5\%$$

Podsumowując, chociaż w obu szacunkach błąd bezwzględny wynosi 25 km, to w przypadku drogi z Warszawy do Krakowa pomyliliśmy się o około 8%, a w kwestii trasy Warszawa-Londyn tylko o około 1,5%.

Więcej przykładów znajdziesz w e-materiale [Błąd względny przybliżenia](#).

Słownik

błąd bezwzględny

wyraża bezwzględną różnicę pomiędzy wartością zmierzona a dokładną; obliczamy go zgodnie ze wzorem:

$$\Delta x = |x - x_0|$$

gdzie x to dokładna wartość, x_0 oznacza zmierzona wartość, a Δx – błąd bezwzględny

błąd względny

stosunek błędu bezwzględnego do oczekiwanego wyniku; obliczamy go zgodnie ze wzorem:

$$\delta = \frac{|x - x_0|}{x} \cdot 100\% = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$$

gdzie x to dokładna wartość, x_0 oznacza zmierzona wartość, Δx – błąd bezwzględny, a za pomocą δ określamy błąd względny

przybliżenie

operacja zmniejszająca dokładność, z jaką prezentujemy liczbę; odbywa się poprzez pozbycie się z wartości ustalonej liczby miejsc po przecinku, przy założeniu, że ostatnią cyfrę przybliżenia (ostatnie zachowane miejsce po przecinku) zwiększamy o 1, gdy następuje po niej cyfra większa lub równa 5

Animacja

Ważne!

Metodami numerycznymi (obliczeniowymi) nazywamy metody rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą operacji arytmetycznych. Wyniki zastosowania metod numerycznych najczęściej są przybliżone (choć dokładność obliczeń można często z góry określić), są zatem obarczone błędami obliczeń numerycznych.

Do przykładów metod numerycznych należy np. metoda bisekcji czy stycznych, czyli metody wyznaczania przybliżonej wartości miejsca zerowego funkcji. Zostały one opisane w e-materiałach [Algorytmy numeryczne i przybliżone](#) oraz [Wyznaczanie przybliżonej wartości miejsca zerowego funkcji metodą stycznych](#).

W animacji znajdziesz więcej przykładów metod numerycznych.

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją przedstawiającą historię metod numerycznych.



Historia metod numerycznych

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RbSTsVuhUWofX>

Film przedstawiający historię metod numerycznych

Polecenie 2

Na podstawie dostępnych źródeł przygotuj notatkę na temat rzeczywistych skutków błędów obliczeń numerycznych.

Polecenie 3

Poszukaj przykładów innych metod numerycznych niż te wymienione w animacji. Na temat jednej z nich przygotuj notatkę.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnij wzór na obliczenie błędu bezwzględnego, gdzie x to dokładna wartość, a x_0 to zmierzona wartość.

$$\Delta x = \boxed{} \boxed{} \boxed{}$$

$$\boxed{-} \boxed{x_0} \boxed{+} \boxed{x}$$

Ćwiczenie 2



Uzupełnij wzór na obliczenie błędu względnego, gdzie x to dokładna wartość, a x_0 to zmierzona wartość.

$$\partial_x = \boxed{}$$

$$\boxed{\frac{|x_0 - x|}{|x|}} \quad \boxed{\frac{|x_0 + x|}{|x|}} \quad \boxed{\frac{|x - x_0|}{|x|}} \quad \boxed{\frac{|x + x_0|}{|x|}}$$

Ćwiczenie 3

Połącz w pary.

przybliżenie z nadmiarem

wielkość przybliżona jest większa od wartości dokładnej

przybliżenie z niedomiarem

wielkość przybliżona jest mniejsza od wartości dokładnej

Ćwiczenie 4

Dokończ zdanie.

Liczba 0,4 jest jednym z przybliżeń liczby $\frac{3}{7}$. Błąd względny tego przybliżenia wyrażony w procentach jest równy...

☐ 10%.

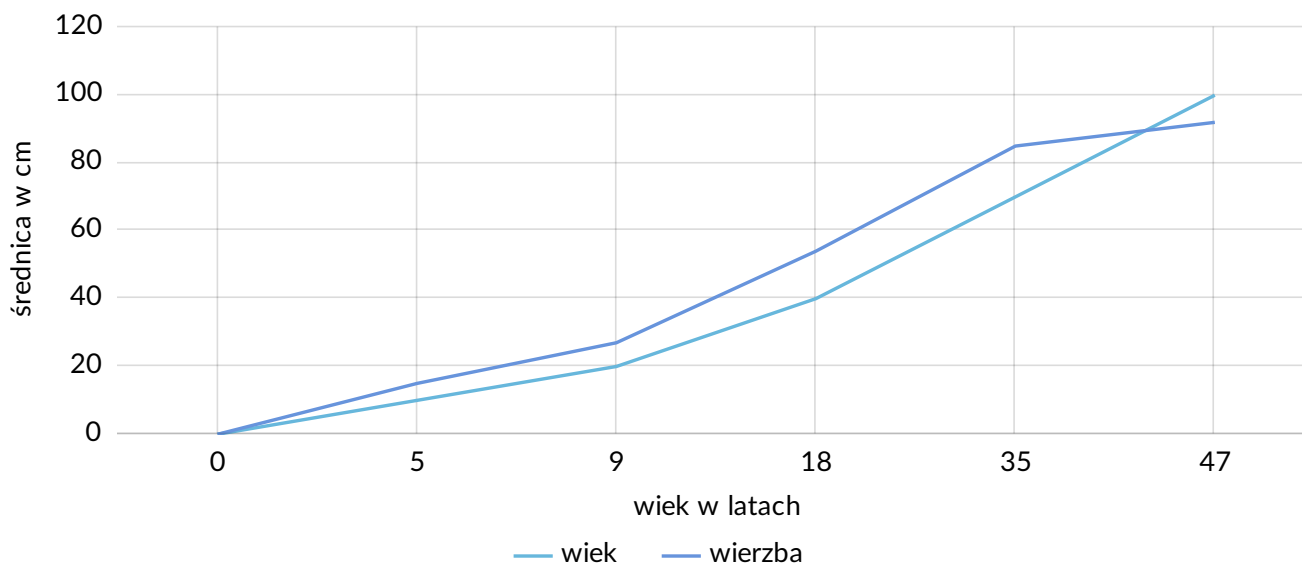
☐ 0,11%.

☐ 0,01%.

☐ 1,1%.

Materiał źródłowy do ćwiczeń nr 5–7

Wykres przedstawia średnicę (cm) pni dwóch drzew w kolejnych latach ich wzrostu.



Ćwiczenie 5

Oblicz średni roczny przyrost średnicy pnia dla obu drzew. Wynik zaokrąglaj do jednego miejsca po przecinku.

Wierzba

Miejsce na obliczenia:

Średni roczny przyrost (cm):

Dąb

Miejsce na obliczenia:

Średni roczny przyrost (cm):

Ćwiczenie 6

Oblicz błąd bezwzględny otrzymanego przybliżenia średniego rocznego przyrostu średnicy pnia wierzby oraz dębu.

Wierzba

Miejsce na obliczenia:

Błąd bezwzględny:

Dąb

Miejsce na obliczenia:

Błąd bezwzględny:

Ćwiczenie 7

Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia średniego rocznego przyrostu średnicy pnia wierzby oraz dębu. Wyraż go w procentach.

Wierzba

Miejsce na obliczenia:

Błąd względny:

Dąb

Miejsce na obliczenia:

Błąd względny:

Ćwiczenie 8

Pewna wydawczyni przygotowała kosztorys druku najnowszej książki poczytnego autora. Założyła, że druk 10 000 egzemplarzy będzie kosztował 35 000 złotych. Po analizie pozostałych kosztów doszła do wniosku, że jej obliczenia mogą być obarczone błędem względnym o wartości 17%. Po ich przekroczeniu koszt druku byłby za wysoki do szacowanej sprzedaży. Wysłała zapytanie do czterech drukarni. Otrzymała następujące wyliczenia:

- pierwsza drukarnia: 40 000 złotych;
- druga drukarnia: 33 000 złotych;
- trzecia drukarnia: 45 000 złotych, ale przy założeniu, że minimalny drukowany nakład wynosi 12 000 egzemplarzy;
- czwarta drukarnia 45 000 złotych.

Które drukarnie mieszczą się w założonych kosztach? Wydawczyni jest skłonna zwiększyć nakład i proporcjonalnie do niego budżet.

Wymień drukarnie, które mieszczą się w budżecie wydawczyni.

Zapisz swoje obliczenia.

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Błędy obliczeń numerycznych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

7) wyjaśnia, jakie może być źródło błędów pojawiających się w obliczeniach komputerowych: błąd zaokrąglenia, błąd przybliżenia;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Przeanalizujesz, jakimi błędami obarczone są obliczenia numeryczne.
- Wyjaśnisz, czym jest błąd względny i błąd bezwzględny oraz prześledzisz sposoby ich obliczania.
- Scharakteryzujesz różnicę między przybliżeniami z nadmiarem i niedomiarem.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;

- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Błędy obliczeń numerycznych”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla temat i cele zajęć zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. Następnie wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Nauczyciel ocenia, na podstawie informacji na platformie, stan przygotowania uczniów do zajęć. Jeżeli jest ono niewystarczające prosi o ciche zapoznanie się z treścią w sekcji „Przeczytaj”. Uczniowie analizują przedstawione tam przykłady i powtarzają zaprezentowane rozwiązania na swoim komputerze.
2. **Praca z multimediami.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”. Uczniowie wspólnie analizują animację dotyczącą historii metod numerycznych.
3. Uczniowie dyskutują, jak radzić sobie z obecnością błędów w obliczeniach komputerowych.
4. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia nr 1–8 z sekcji „Sprawdź się”. Po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel ponownie wyświetla na tablicy temat i cele lekcji zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. W kontekście ich realizacji następuje omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. W wyniku pomiaru ustalono, że do uszycia sukienki wykorzystano pasek koronki Calais o długości 999 cm i szerokości 9 cm. Wartości ustalone ze sprzedawcą to 1000 i 10. Oblicz błąd względny oraz bezwzględny dla podanych przypadków.
2. Wykonaj polecenia 2–3 z sekcji „Animacja”.

Wskazówki metodyczne:

- Treści w sekcji „Przeczytaj” można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy uczniów.