



## Metoda drzew w rachunku prawdopodobieństwa

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Metoda drzew w rachunku prawdopodobieństwa

Źródło: Felix Mittermeier, dostępny w internecie: [pixabay.com](https://pixabay.com), domena publiczna.

Być może zdziwił Cię tytuł tego materiału:

*Metoda drzew w rachunku prawdopodobieństwa.*

Niestety, nie wybierzemy się na wycieczkę do lasu, ale poznamy jedno z matematycznych drzew, zwane drzewem stochastycznym.



Dąb szypułkowy

Według słownika języka polskiego PWN – *stochastyka to dział matematyki zajmujący się badaniem modeli zjawisk losowych w ich przebiegu czasowym.*

Proces stochastyczny to pewna funkcja zależna od czasu, której wartości w każdym momencie czasowym są zmiennymi losowymi. Wartości tej funkcji są więc zdarzeniami losowymi. W praktyce dziedziną funkcji jest przedział czasowy (taki proces nazywamy szeregiem czasowym) lub obszar przestrzeni. Przykłady szeregów czasowych to dane medyczne – EKG, ciśnienie krwi, losowe ruchy (np. ruchy Browna).

W tym materiale nie będziemy jednak rozważać skomplikowanych teorii stochastycznych, ale zajmiemy się jedynie graficznym przedstawianiem przebiegów i wyników doświadczeń losowych.

### Twoje cele

- Utworzysz drzewo stochastyczne dla danego doświadczenia losowego.
- Określisz liczbę zdarzeń elementarnych oraz liczbę zdarzeń sprzyjających dla danego zdarzenia losowego.
- Obliczysz prawdopodobieństwo zdarzenia, korzystając z drzewa stochastycznego.

# Przeczytaj

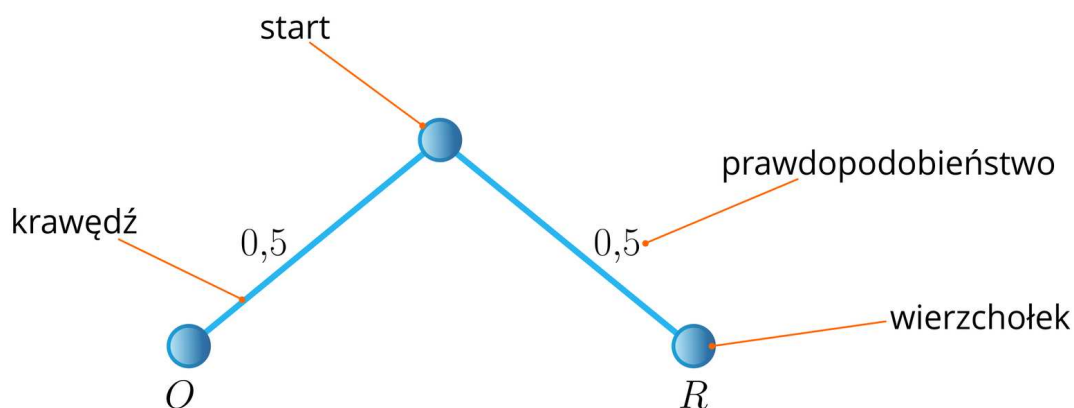
---

Doświadczenie losowe kilkietapowe wygodnie jest zilustrować za pomocą drzewa doświadczenia losowego (drzewa stochastycznego). Możemy w ten sposób graficznie przedstawić przebieg i wyniki doświadczenia.

Rysunek rozpoczynamy od punktu, zwanego startem (korzeniami drzewa). Wyniki kolejnych etapów doświadczenia to węzły. Odcinki, które łączą dwa kolejne węzły to krawędzie. Każdy końcowy węzeł to wierzchołek drzewa (zatem drzewo może mieć kilka wierzchołków!). Kolejne krawędzie łączące początek drzewa z jednym z wierzchołków to gałąź drzewa. Każdej gałęzi odpowiada jeden wynik doświadczenia wieloetapowego.

## Przykład 1

Zbudujemy drzewo stochastyczne dla rzutu monetą.



Drzewo składa się z dwóch gałęzi, odpowiadających wynikom  $O$  (orzeł),  $R$  (reszka). Na każdej gałęzi zapisane jest prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia (czyli wyrzucenia orła bądź reszki).

## Przykład 2

Budujemy drzewo stochastyczne dla dwukrotnego rzutu monetą.



Zdarzenie: *za pierwszym razem wylosowaliśmy kulę niebieską, a za drugim fioletową*, zilustrowane jest za pomocą dwóch krawędzi tej samej gałęzi. Prawdopodobieństwo zdarzenia obliczamy, mnożąc liczby zapisane przy krawędziach tej gałęzi.

$$p = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że za pierwszym razem wyciągniemy kulę niebieską, a za drugim fioletową, jest równe 0,24.

Wiemy już, że prawdopodobieństwo zdarzenia jednoelementowego reprezentowanego przez daną gałąź jest równe iloczynowi prawdopodobieństw wypisanych obok krawędzi tej gałęzi. Ten sposób wyznaczania prawdopodobieństwa zdarzeń jednoelementowych w wieloetapowych doświadczeniach, nazywamy **regułą mnożenia prawdopodobieństw dla drzewa stochastycznego**.

#### **Reguła: Reguła mnożenia prawdopodobieństw dla drzewa stochastycznego**

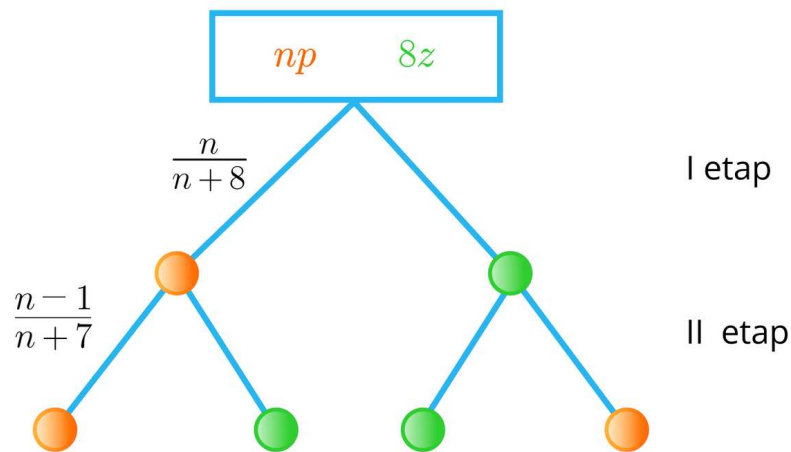
Prawdopodobieństwo zdarzenia jednoelementowego reprezentowanego przez daną gałąź drzewa, jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się rozważana gałąź.

Jeżeli zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych wieloetapowego doświadczenia składa się z  $n$  elementów, to liczba gałęzi drzewa sporządzonego dla tego doświadczenia jest równa  $n$  ( $n \in \mathbb{N}_+$ ).

#### **Przykład 4**

W urnie znajduje się  $n$  ( $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) kul pomarańczowych i 8 kul zielonych. Losujemy dwie kule bez zwracania. Wiedząc, że prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul pomarańczowych jest równe  $\frac{10}{23}$ , obliczymy ile jest wszystkich kul.

Tworzymy model graficzny doświadczenia.



Tym razem odpowiednie prawdopodobieństwa zapisaliśmy tylko przy interesujących nas krawędziach.

W urnie jest  $n$  kul pomarańczowych. W I etapie losujemy kulę pomarańczową spośród  $n + 8$  wszystkich kul znajdujących się w urnie.

Teraz w urnie jest już tylko  $n + 7$  kul, w tym  $n - 1$  pomarańczowych. W II etapie losujemy więc kulę pomarańczową spośród  $n + 7$  kul.

Odczytujemy z drzewa, że prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul pomarańczowych jest równe

$$\frac{n}{n+8} \cdot \frac{n-1}{n+7}$$

Na podstawie treści zadania zapisujemy równanie (patrz: [reguła mnożenia prawdopodobieństw dla drzewa stochastycznego](#)):

$$\frac{n}{n+8} \cdot \frac{n-1}{n+7} = \frac{10}{23}$$

Przekształcamy zapisane równanie, otrzymując równanie kwadratowe.

$$23n^2 - 23n = 10 \cdot (n^2 + 15n + 56)$$

$$13n^2 - 173n - 560 = 0$$

Rozwiązujemy równanie.

$$\sqrt{\Delta} = 243$$

$$n_1 = \frac{173-243}{26} < 0 \text{ - nie spełnia warunków zadania}$$

$$n_2 = \frac{173+243}{26} = 16$$

Obliczamy ile jest wszystkich kul:  $16 + 8 = 24$ .

Odpowiedź:

W urnie są 24 kule.

Nie zawsze prawdopodobieństwo danego zdarzenia jest reprezentowane przez jedną gałąź. Korzystamy wtedy z reguły sum.

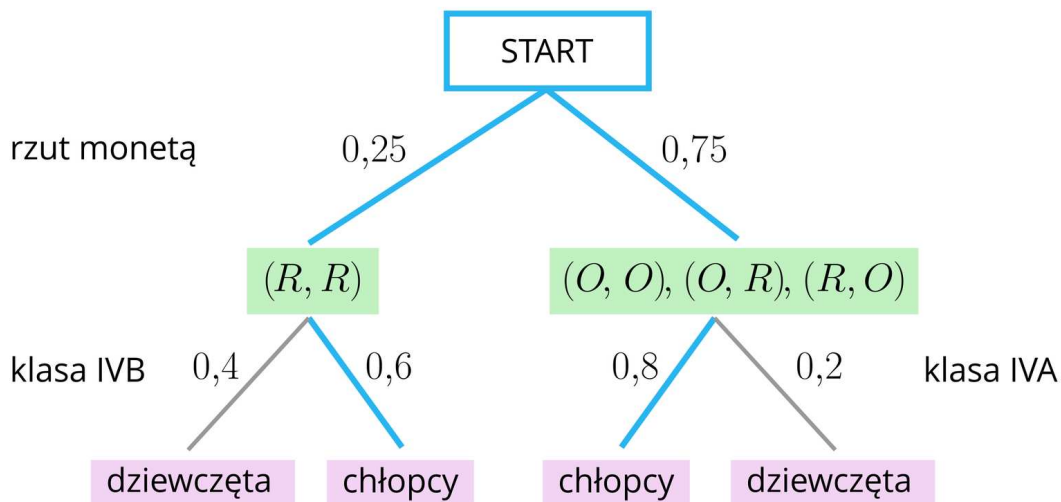
### Reguła: Reguła sum dla drzewa stochastycznego

Prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi drzewa jest równe sumie prawdopodobieństw otrzymanych zgodnie z regułą mnożenia dla tych gałęzi.

### Przykład 5

Rzucamy dwiema monetami. Jeżeli wpadnie co najmniej jeden orzeł – losujemy osobę z klasy IV A. W przeciwnym wypadku losujemy osobę z klasy IV B. W klasie IV A jest ośmiu chłopców i są dwie dziewczyny, w klasie IV B jest dwunastu chłopców i osiem dziewcząt. Obliczymy prawdopodobieństwo wylosowania chłopca.

Tworzymy model graficzny doświadczenia.



Zaznaczamy na niebiesko gałęzie, na których opisane jest interesujące nas zdarzenie. Żeby obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  – wylosowano chłopca, najpierw mnożymy liczby zapisane wzdłuż niebieskich krawędzi na każdej z gałęzi, a następnie dodajemy otrzymane liczby.

$$P(A) = 0,25 \cdot 0,6 + 0,75 \cdot 0,8 = 0,15 + 0,6 = 0,75$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wylosowania chłopca jest równe 0,75.

W przypadku, gdy doświadczenie składa się z kilku etapów, na drzewie stochastycznym można zaznaczać tylko gałęzie obrazujące rozpatrywane doświadczenie.

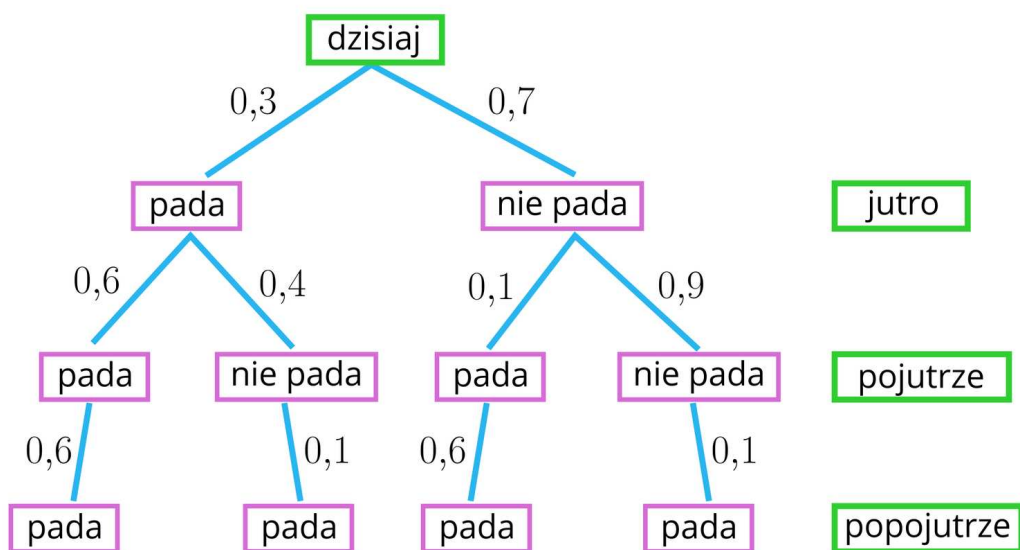
### Przykład 6

Prawdopodobieństwo, że jutro będzie padał śnieg jest równe  $0,3$ . W każdym innym dniu, jeśli pada śnieg, prawdopodobieństwo, że będzie padał śnieg następnego dnia jest równe  $\frac{3}{5}$ . Jeśli śnieg nie pada prawdopodobieństwo, że śnieg będzie padać następnego dnia jest równe  $\frac{1}{10}$ . Obliczymy prawdopodobieństwo, że śnieg będzie padać popojutrze.

Jeśli prawdopodobieństwo tego, że śnieg będzie padał następnego dnia, jest równe  $\frac{3}{5}$ , czyli  $(0,6)$ , to prawdopodobieństwo tego, że śnieg nie będzie padał jest równe  $1 - 0,6 = 0,4$ .

Jeśli śnieg nie pada w danym dniu, prawdopodobieństwo, że śnieg będzie padać następnego dnia jest równe  $\frac{1}{10} = 0,1$ , to prawdopodobieństwo tego, że śnieg nie będzie padał jest równe  $1 - 0,1 = 0,9$ .

Sporządzamy drzewo prawdopodobieństwa, na którym zaznaczymy tylko przydatne gałęzie.



Obliczając prawdopodobieństwo, skorzystamy z reguły sum.

$$p = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,1 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,9 \cdot 0,1$$

$$p = 0,225$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że popojutrze będzie padał śnieg jest równe  $p = 0,225$ .

# Słownik

**reguła mnożenia prawdopodobieństw dla drzewa stochastycznego**

prawdopodobieństwo zdarzenia jednoelementowego reprezentowanego przez daną gałąź drzewa, jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się rozważana gałąź

# Infografika

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką przedstawiającą budowę drzewa stochastycznego.

## Polecenie 2

W torbie znajduje się 10 cukierków czekoladowych i jeden cukierek wiśniowy. Losujesz z torby jeden cukierek bez zwracania, a następnie drugi. Narysuj drzewo obrazujące to doświadczenie losowe.

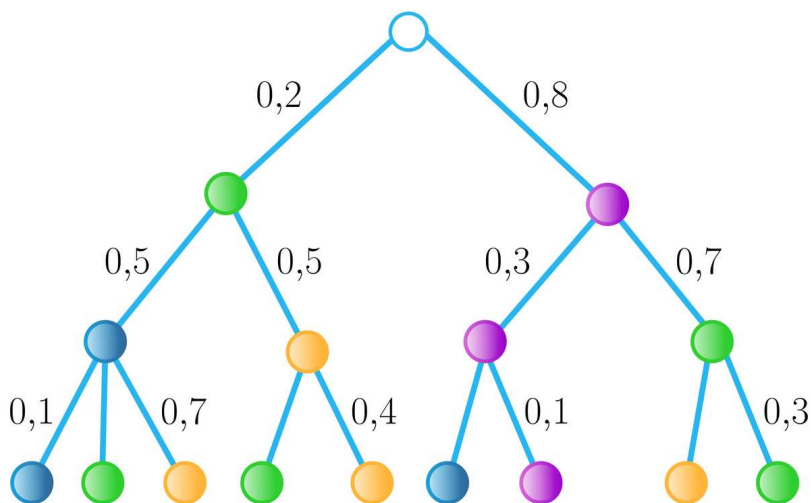
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



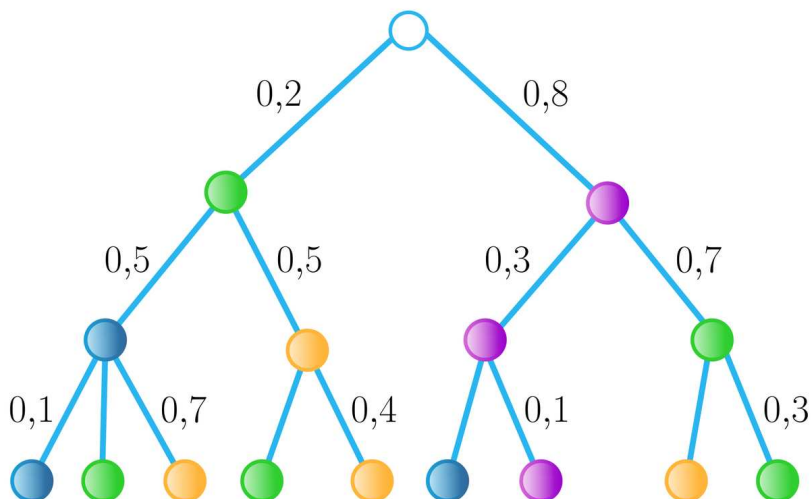
Poniższe drzewo opisuje przebieg pewnego doświadczenia losowego polegającego na kolejnym losowaniu trzech kul z urny.



## Ćwiczenie 2



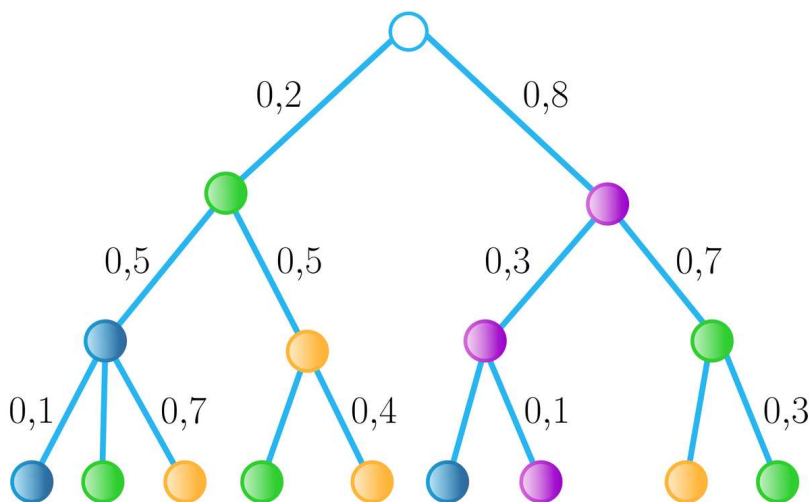
Poniższe drzewo opisuje przebieg pewnego doświadczenia losowego polegającego na kolejnym losowaniu trzech kul.



### Ćwiczenie 3



Drzewo opisuje przebieg pewnego doświadczenia losowego polegającego na kolejnym losowaniu trzech kul.

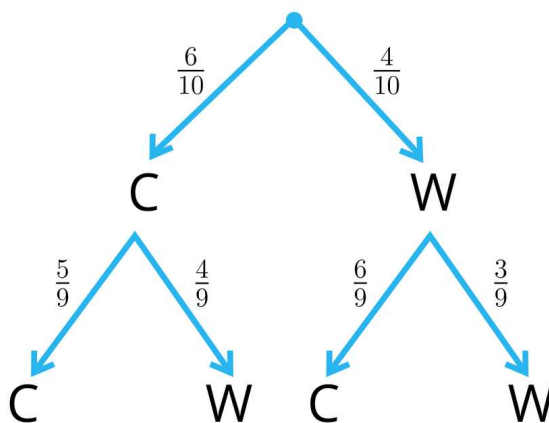


Niech  $A$  oznacza zdarzenie: za trzecim razem wylosowano kulę pomarańczową.

### Ćwiczenie 4



W koszyku znajdują się wiśnie ( $W$ ) i czereśnie ( $C$ ). Na drzewie probabilistycznym zaznaczono wyniki losowania z koszyka dwóch owoców.



### Ćwiczenie 5



## Ćwiczenie 6



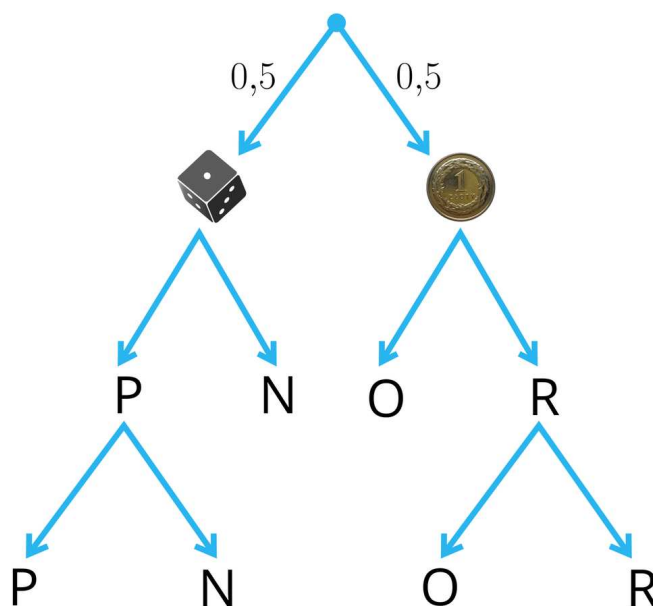
Rzucamy kostką do gry i symetryczną monetą. Oznaczmy:

$P$  – wypadnie parzysta liczba oczek,

$N$  – wypadnie nieparzysta liczba oczek,

$O$  – wypadnie orzeł,

$R$  – wypadnie reszka.



## Ćwiczenie 7



Strzelec strzela do tarczy tylko trzy razy. Prawdopodobieństwo trafienia do tarczy za pierwszym razem jest równe  $0,6$ . Po każdym strzale zmniejsza się o  $0,1$ . Sporządź odpowiednie drzewo i oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy trzykrotnym strzale strzelec trafi co najmniej raz.

## Ćwiczenie 8



W urnie znajduje się  $n$  kul ( $n \geq 5$ ), w tym 5 zielonych. Z urny losujemy kolejno bez zwracania dwie kule.

Znajdź liczbę  $n$ , dla której prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul zielonych jest większe od  $\frac{1}{3}$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Metoda drzew w rachunku prawdopodobieństwa

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- tworzy drzewo stochastyczne dla danego doświadczenia losowego
- określa liczbę zdarzeń elementarnych oraz liczbę zdarzeń sprzyjających dla danego zdarzenia losowego
- oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia, korzystając z drzewa stochastycznego

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- praca z obserwatorem

**Formy pracy:**

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie powtarzają wspólnie wiadomości dotyczące prawdopodobieństwa – może to być na przykład szybki test przygotowany wcześniej przez nauczyciela, na pytania którego uczniowie odpowiadają kolejno.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w 5 grupach. Zadaniem każdej z grup jest zapoznanie się z infografiką, treściami teoretycznymi i jednym z przykładów zapisanych w sekcji „Przeczytaj” w taki sposób, aby uzyskane wiadomości przekazać innym grupom. Które to mają być przykłady – wskazuje nauczyciel.
2. W każdej grupie jeden z uczniów pełni rolę obserwatora. Jego zadaniem jest zaobserwowanie jak uczniowie pracują w grupie – czy pełnią powierzone im role, jaka jest strategia rozwiązywania problemów, itp.
3. Następnym etapem zajęć jest zaprezentowanie przez grupy uzyskanych wiadomości i pokazanie sposobu rozwiązania zadania zamieszczonego w odpowiednim przykładzie.
4. Uczniowie wspólnie tworzą algorytm rozwiązywania zadania probabilistycznego za pomocą drzewa.
5. Uczniowie w parach rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 – 4.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Każdy z obserwatorów przedstawia wyniki swoich obserwacji, jednocześnie konfrontując je z obserwacjami lidera danej grupy.  
Dyskusja – czy łatwo jest pełnić wyznaczoną rolę w grupie i dlaczego.
2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

#### **Praca domowa:**

Zadaniem uczniów jest wykonanie zadań interaktywnych 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych

**Wskazówki metodyczne:**

Z infografiką uczniowie mogą zapoznać się w domu przed lekcją. Infografika może być też pomocna na zajęciach z kombinatoryki.