Wyznaczanie funkcji odwrotnej do danej funkcji

Źródło: Alice Yamamura, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

W czasie Twoich spotkań z matematyką bardzo często spotykasz się z operacją szukania elementu odwrotnego. Weźmy na przykład takie proste równanie $3 \cdot x = 5$. Aby wyliczyć z tego równania niewiadomą, mnożymy to równanie obustronnie przez element odwrotny do 3. Wiemy, że ma on postać: $\frac{1}{3}$. Mnożąc obustronnie otrzymamy $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 5$. I dalej $x = \frac{1}{3} \cdot 5$.

W tym materiale utrwalimy umiejętność wyznaczania funkcji odwrotnej. Zagadnienie funkcji odwrotnej wykracza poza podstawę programową nauczania matematyki, ale jest ciekawym i przystępnym uzupełnieniem wiadomości o funkcjach.

> **Twoje cele**
>
> - Sprawdzisz, czy dana funkcja jest różnowartościowa, korzystając z twierdzeń dotyczących funkcji złożonych.
> - Znajdziesz wzór funkcji odwrotnej do danej funkcji.

Przeczytaj

W tym materiale zmierzymy się z różnymi zadaniami dotyczącymi sprawdzania, czy funkcja odwrotna istnieje do danej funkcji oraz wyznaczania wzoru funkcji odwrotnej, jeśli odpowiedź na nasze pytanie jest pozytywna.

Wiemy, że aby istniała funkcja odwrotna, to dana funkcja musi być różnowartościowa i „na”. Funkcję, która jest jednocześnie funkcją różnowartościową i funkcją „na” nazywamy **bijekcją.**

W przykładzie poniżej bardzo dokładnie omówimy wykazywanie tych własności.

Przykład 1

Znajdziemy funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = 6x - 7$.

Rozwiązanie:

Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Pokażemy z definicji, że funkcja f jest różnowartościowa:

   Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$.

   Mamy więc ciąg równości

   $6x_1 - 7 = 6x_2 - 7$

   $6x_1 = 6x_2$

   $x_1 = x_2$

2. Pokażemy z definicji, że funkcja jest „na”. Weźmy dowolny $y \in \mathbb{R}$. Rozważmy $x = \frac{y+7}{6}$. Oczywiście jest to liczba rzeczywista. Wówczas:

   $f(x) = f\left(\frac{y+7}{6}\right) = 6\frac{y+7}{6} - 7 = y + 7 - 7 = y$.

Funkcja jest różnowartościowa i „na”, więc jest odwracalna, tj. istnieje funkcja odwrotna $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aby wyznaczyć wzór funkcji odwrotnej do danej, z równania $y = 6x - 7$ wyliczamy zmienną x: $y + 7 = 6x$, skąd $x = \frac{y+7}{6}$. Otrzymujemy wówczas funkcję zmiennej y. Wystarczy wrócić do oznaczeń nam znanych i wstawić w miejsce y literę x, a w miejsce wyliczonego x literę y: $y = \frac{x+7}{6}$.

Funkcja odwrotna do funkcji f ma zatem postać $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$.

Przykład 2

Wyznaczymy funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ w jej dziedzinie naturalnej.

Rozwiązanie:

Wyznaczmy dziedzinę funkcji f. Rozwiązujemy nierówność:
$x^3 - 1 \geq 0$, czyli $(x-1)\left(x^2+x+1\right) \geq 0$. Ponieważ wyróżnik kwadratowy trójmianu kwadratowego $x^2 + x + 1$ jest mniejszy od 0 ($\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$), nierówność $x^2 + x + 1 > 0$, jest spełniona dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem możemy pominąć ten czynnik rozważając jedynie nierówność $x - 1 \geq 0$, skąd $x \geq 1$.

Obierzmy za przeciwdziedzinę zbiór wartości funkcji, czyli $f : <1,\ \infty) \to <0,\ \infty)$. Wówczas funkcja f jest „na”.

Sprawdźmy, czy jest różnowartościowa. Niech $x_1, x_2 \in \langle 1,\ \infty)$. Wówczas następujące równości są równoważne

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\sqrt{x_1^3 - 1} = \sqrt{x_2^3 - 1}$$

$$x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1$$

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$x_1^3 - x_2^3 = 0$$

$$(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0$$

$$x_1 = x_2$$

Ostatnia równoważność wynika z faktu, że $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \neq 0$ dla $x_1, x_2 \in \langle 1,\ \infty)$.

Pokazaliśmy, że funkcja f jest bijekcją.

Znajdźmy funkcję odwrotną. W tym celu wyznaczymy x ze wzoru $y = \sqrt{x^3 - 1}$. Mamy więc

$$y^2 = x^3 - 1$$

$$y^2 + 1 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{y^2+1}$$

Stosując schemat z Przykładu 1 po zamianie liter x na y i y na x otrzymujemy: $y = \sqrt[3]{x^2+1}$
.

Funkcja odwrotna do funkcji f ma postać: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$, $f^{-1} :<0,\ \infty) \to <1,\ \infty)$.

Czasami wykazując własność różnowartościowości funkcji będziemy korzystać z definicji. Na ogół jednak nie jest to proste, dlatego przydatne będą „**Własności funkcji złożonej**”:

- złożenie funkcji rosnącej z rosnącą jest funkcją rosnącą,
- złożenie funkcji rosnącej z malejącą jest funkcją malejącą,
- złożenie funkcji malejącej z malejącą jest funkcją rosnącą,
- złożenie funkcji różnowartościowych jest funkcją różnowartościową.

Twierdzenie: Związek monotoniczności z różnowartościowością

Funkcja rosnąca (malejąca) jest różnowartościowa.

Dowód

Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie funkcją rosnącą. Niech $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Możemy założyć, że $x_1 < x_2$. Ponieważ f jest rosnąca, więc $f(x_1) < f(x_2)$. Stąd oczywiście wynika, że $f(x_1) \neq f(x_2)$. Pokazaliśmy, że funkcja f jest różnowartościowa.

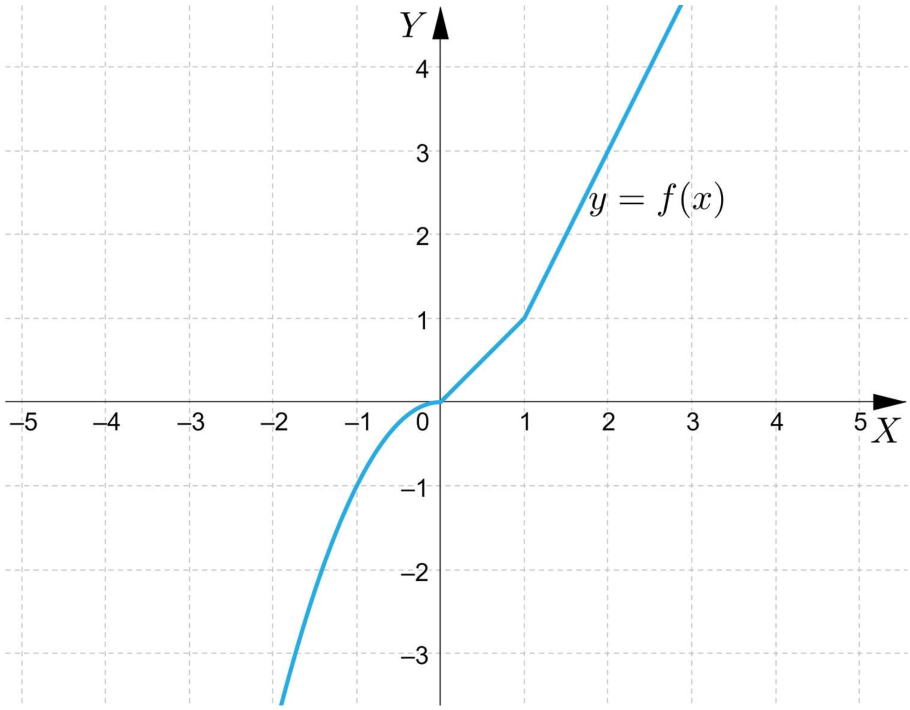
Przykład 3

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem: $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$.

Znajdziemy, o ile istnieje, funkcję odwrotną do f.

Rozwiązanie:

Narysujmy wykres funkcji.



Zbiór wartości $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Stąd funkcja jest „na”. Funkcja $f_1(x) = -x^2$ jest na przedziale $(-\infty,\ 0)$ rosnąca, $f_2(x) = x$ na $\langle 0,1)$ rosnąca, $f_3(x) = 2x - 1$ na $\langle 1,\ \infty)$ rosnąca, czyli funkcja f jest rosnąca na całej dziedzinie $\mathbb{R}$, w takim razie jest różnowartościowa na mocy powyższego twierdzenia.

Zatem istnieje funkcja odwrotna $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Niech $x < 0$. Wówczas $y = -x^2$. Zatem $x = \sqrt{-y}$ i zamieniając miejscami x i y otrzymujemy wzór: $f^{-1}(x) = \sqrt{-x}$.

Niech $0 \leq x < 1$. Wówczas $y = x$, więc $f^{-1}(x) = x$.

Niech $x \geq 1$. Wówczas $y = 2x - 1$. Po przekształceniu mamy, że $y + 1 = 2x$, więc $x = \frac{y+1}{2}$. Zatem $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1. \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Przykład 4

Wyznaczymy funkcję odwrotną do $f(x) = \sqrt{1 + 2^x}$.

Rozwiązanie:

Wyznaczmy dziedzinę funkcji $f : D = \{x : 1 + 2^x \geq 0\} = \mathbb{R}$. Zbiorem wartości jest przedział $(1,\ \infty)$. Czyli $f : \mathbb{R} \to (1,\ \infty)$ jest „na”. Funkcja wewnętrzna $f_1(x) = 1 + 2^x$ jest funkcją rosnącą oraz funkcja zewnętrzna $f_2(x) = \sqrt{x}$ jest rosnąca, zatem jako złożenie funkcji rosnących jest rosnąca i stąd różnowartościowa.

Istnieje funkcja odwrotna $f^{-1} :(1,\ \infty) \to \mathbb{R}$.

Wyznaczmy wzór tej funkcji:

Z równości $y = \sqrt{1+2^x}$ wyznaczymy x przekształcając kolejno:

$y^2 = 1 + 2^x$

$2^x = y^2 - 1$

$x = \log_2\left(y^2 - 1\right)$.

Stosując schemat otrzymujemy $y = \log_2\left(x^2 - 1\right)$. Czyli $f^{-1}(x) = \log_2\left(x^2 - 1\right)$.

Czasami, szukając funkcji odwrotnej do funkcji złożonej, wygodnie jest skorzystać z następującego twierdzenia:

Twierdzenie: O funkcji odwrotnej do funkcji złożonej

Jeżeli funkcje $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ są bijekcjami, to złożenie $g \circ f$ jest bijekcją i $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Dowód

---

1. Ponieważ złożenie dwóch funkcji różnowartościowych jest funkcją różnowartościową, więc $g \circ f$ jest funkcją różnowartościową. Pokażemy, że jest też „na”.
   Funkcja $g \circ f : X \to Z$. Weźmy dowolny element $z \in Z$. Skoro funkcja g jest „na” zbiór Z, to istnieje taki element $y \in Y$, że $g(y) = z$. Jednocześnie, skoro f jest „na” Y, to istnieje taki element $x \in X$, że $f(x) = y$. Mamy, że
   $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Więc funkcja $g \circ f$ jest „na” zbiór Z.

2. Pozostaje pokazać, że $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Niech $x \in X$. Wówczas
   $\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f)(x) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(g(f(x))) = f^{-1}\left(g^{-1}(g(f(x)))\right) =$
   $= f^{-1}(f(x)) = x$.
   Jednocześnie dla $z \in Z$ mamy, że
   $(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(z) = (g \circ f)\left(f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right)\right) =$
   $= g\left(f\left(f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right)\right)\right) = g\left(g^{-1}(z)\right) = z$,
   czyli funkcja odwrotna do $g \circ f$ jest postaci: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Przykład 5

Korzystając z poprzedniego twierdzenia wyznaczymy funkcję odwrotną do funkcji złożonej: $f(x) = \log_3(2^x + 1)$.

Rozwiązanie:

Niech $g(x) = 2^x + 1$, $g : \mathbb{R} \to (1,\ \infty)$, $h(x) = \log_3 x$, $h : (0,\ \infty) \to \mathbb{R}$. Ponieważ $(1,\ \infty) \subset (0,\ \infty)$ istnieje złożenie $(h \circ g)(x) = \log_3(2^x + 1) = f(x)$.

Funkcje g i h są rosnące, a więc różnowartościowe. Ponieważ zbiór wartości funkcji g to przedział $(1,\ \infty)$ oraz zbiór wartości funkcji h to $\mathbb{R}$, więc obie funkcje są „na”. Zatem są bijekcjami. Zatem f też jest bijekcją. Istnieją funkcje odwrotne do g, h, $h \circ g$. Znajdźmy funkcje odwrotne g i h:

$y = 2^x + 1$, stąd $y - 1 = 2^x$, więc $\log_2(y - 1) = x$. Zamieniając x i y miejscami, otrzymujemy
$\log_2(x - 1) = y$, czyli $g^{-1}(x) = \log_2(x - 1)$.

$y = \log_3 x$, więc $3^y = x$. Postępując analogicznie jak wyżej $y = 3^x$ i $h^{-1}(x) = 3^x$.

A więc: $(h \circ g)^{-1}(x) = \left(g^{-1} \circ h^{-1}\right)(x) = \log_2(3^x - 1)$, $(h \circ g)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sprawdźmy z jednej strony:

$$\left((h \circ g) \circ (h \circ g)^{-1}\right)(x) = \log_3\left(2^{\log_2(3^x - 1)} + 1\right) = \log_3(3^x - 1 + 1) = \log_3 3^x = x.$$

Słownik

funkcja „na”

funkcja jest „na” cały zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje takie $x \in X$, że $f(x) = y$

funkcja różnowartościowa

funkcja jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y \in Y$ i dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ jeżeli spełniony jest warunek $f(x_1) = y$ i $f(x_2) = y$, to $x_1 = x_2$

bijekcja

funkcja będąca jednocześnie „na” i różnowartościową

funkcja odwrotna

niech funkcja $f : X \to Y$ będzie różnowartościowa i „na”; funkcję $f^{-1} : Y \to X$ nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f, jeśli $f^{-1}(y) = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = f(x)$ dla każdego $x \in X$ i $y \in Y$

funkcja odwracalna

funkcję, dla której istnieje funkcja odwrotna, nazywamy funkcją odwracalną

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, dzięki której utrwalisz schemat pozwalający znaleźć funkcję odwrotną do dowolnej funkcji odwracalnej.

Polecenie 2

Posługując się powyższą infografiką wyznacz funkcję odwrotną do funkcji wzajemnie jednoznacznej: $f(x) = \sqrt[3]{3x-7}$.

Polecenie 3

Posługując się powyższą infografiką wyznacz funkcję odwrotną do funkcji wzajemnie jednoznacznej

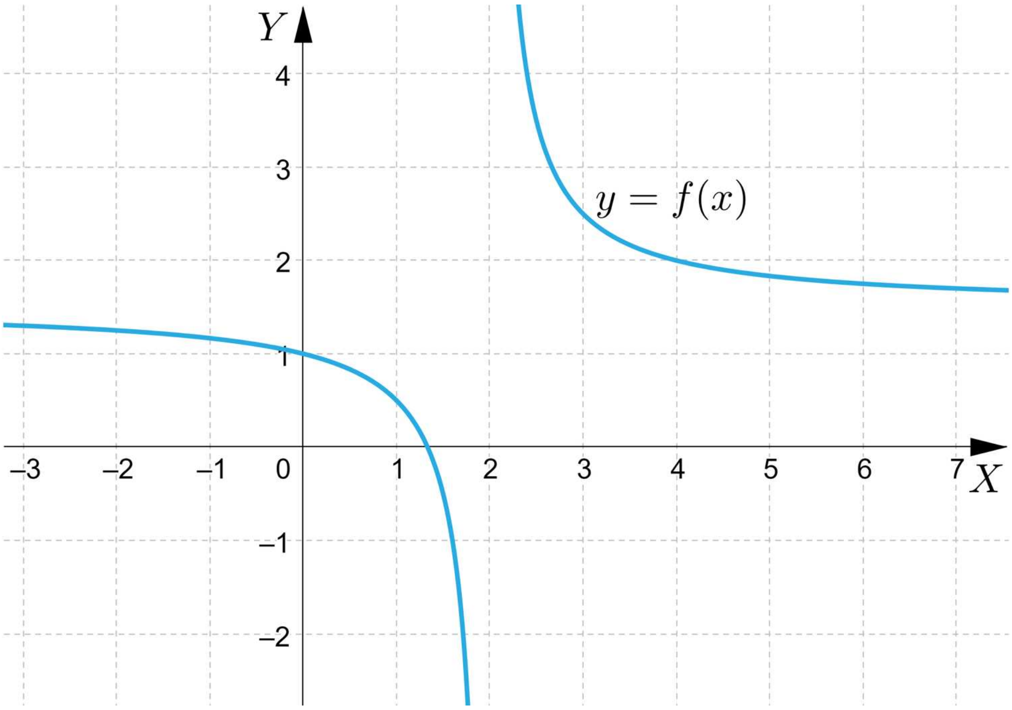
$f : \mathbb{R} \setminus \{-4\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ danej wzorem: $f(x) = \frac{3x-1}{x+4}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

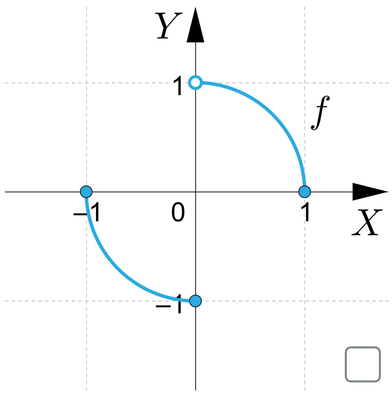
Dana jest funkcja homograficzna. Jest to bijekcja, posiada funkcję odwrotną. Czy punkt o współrzędnych $(1,\ 0)$ należy do wykresu funkcji odwrotnej do funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku?

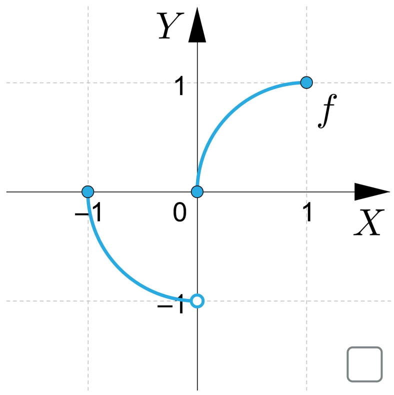


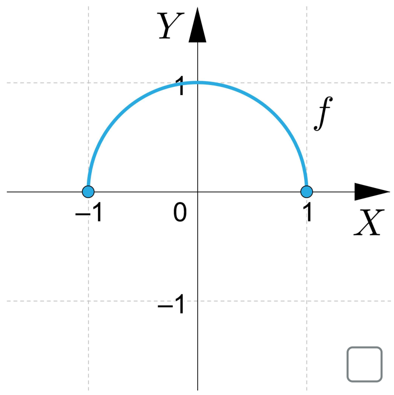
- NIE
- TAK

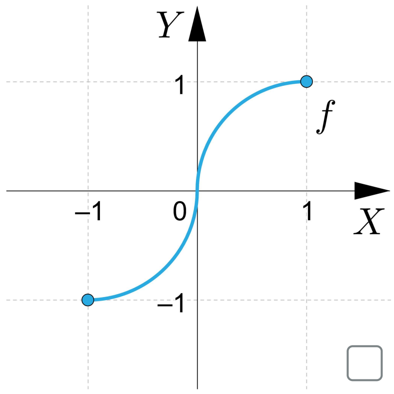
Ćwiczenie 2

Na rysunkach przedstawione są wykresy funkcji. Zaznacz dla których z nich **nie istnieje** funkcja odwrotna?









Ćwiczenie 3

Kliknij w lukę, aby wyświetlić listę i wybrać prawidłową odpowiedź.

Wartość funkcji odwrotnej do $f(x) = \sqrt{3x-2}$ dla argumentu równego 1, wynosi ______.

2 -1 $\frac{2}{3}$ 1

Ćwiczenie 4

Zaznacz poprawną odpowiedź. Pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych oraz wykresami funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ oraz funkcji do niej odwrotnej wynosi:

- 6
- 2
- 8
- 4

Ćwiczenie 5

Dana jest funkcja homograficzna $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$. Wyznacz funkcję do niej odwrotną.

Naszkicuj jej wykres.

Ćwiczenie 6

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x < 0 \\ \log_3(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$. Wyznacz funkcję odwrotną do niej.

Naszkicuj jej wykres.

Ćwiczenie 7

Wyznacz funkcję odwrotną do $f : \langle 0,\ \infty) \to \langle -2,\ \infty)$, $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$.

Ćwiczenie 8

Wyznacz (jeżeli istnieje) funkcję odwrotną do funkcji $f : (1,\ \infty) \to (0,\ \infty)$, określonej wzorem: $f(x) = \log_x 2$.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Kuna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyznaczanie funkcji odwrotnej do danej funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:
12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
13) posługuje się funkcją $f\left(x\right) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
2) posługuje się złożeniami funkcji;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się
- kompetencje obywatelskie

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprawdza, czy istnieje funkcja odwrotna do danej funkcji
- wyznacza wzór funkcji odwrotnej do danej funkcji
- wyznacza wzór funkcji odwrotnej do funkcji będącej złożeniem dwóch bijekcji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa kierowana
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają co to jest element odwrotny i przeciwny w mnożeniu i dodawaniu.
2. Nauczyciel razem z uczniami przypomina definicję funkcji odwrotnej. Pokazuje diagram albo go rysuje. Przypomina własność różnowartościowości i „na” funkcji.
3. Następnie nauczyciel podaje temat lekcji i wraz z uczniami określa cele i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel omawia przykład 1, zwraca uwagę na uzasadnienie różnowartościowości i „na” funkcji z definicji.
2. Uczniowie zapoznają się z infografiką. Zgłaszają pytania, na które odpowiada nauczyciel.
3. Przykład 2 uczniowie rozwiązują samodzielnie.
4. Nauczyciel wykazuje twierdzenie o różnowartościowości funkcji rosnącej. Pozostawia treść na tablicy mówiąc, że będziemy z niego korzystać przy następnych przykładach. Uczniowie rozwiązują Przykład 3.
5. Nauczyciel dopisuje na tablicy twierdzenia o monotoniczności funkcji złożonych. Wspólnie z uczniami omawia Przykład 4.
6. Nauczyciel wykazuje Twierdzenie 2 i omawia Przykład 5.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem przykładów, które pojawiły się na lekcji.

Praca domowa:

- Uczeń rozwiązuje zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Monotoniczność funkcji
- Dziedzina funkcji
- Zbiór wartości funkcji

Wskazówki metodyczne:

- Polecenia związane z Infografiką można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału lub przygotowania do matury.
- Infografikę można wykorzystać podczas realizacji lekcji „Funkcja odwrotna”.