Odcinek łączący środki ramion trapezu

Odcinek łączący środki ramion trapezu

Źródło: OpenClipart-Vectors z Pixabay, domena publiczna.

Znane są własności linii środkowej w trójkącie, czyli linii która w trójkącie łączy środki dwóch boków. Linia ta jest równoległa do trzeciego boku a jej długość jest równa połowie trzeciego boku.

Zadamy sobie pytanie o własności odcinka, który łączy środki ramion trapezu (nazywanego linią środkową w trapezie). Czy jest równoległy do podstaw trapezu? Czy można wyznaczyć jego długość?

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz i sformułujesz pojęcie linii środkowej w trapezie.
> - Poznasz własności linii środkowej w trapezie.
> - Poznasz stosunek pól trapezów, na jakie linia środkowa w trapezie dzieli ten trapez.
> - Zastosujesz własności linii środkowej w trapezie w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Definicja: linii środkowej w trapezie

Linia środkowa w trapezie jest to odcinek łączący środki ramion trapezu.

Zanim przejdziemy do głównego twierdzenia w tym materiale przypomnimy:

Twierdzenie: o linii środkowej w trójkącie

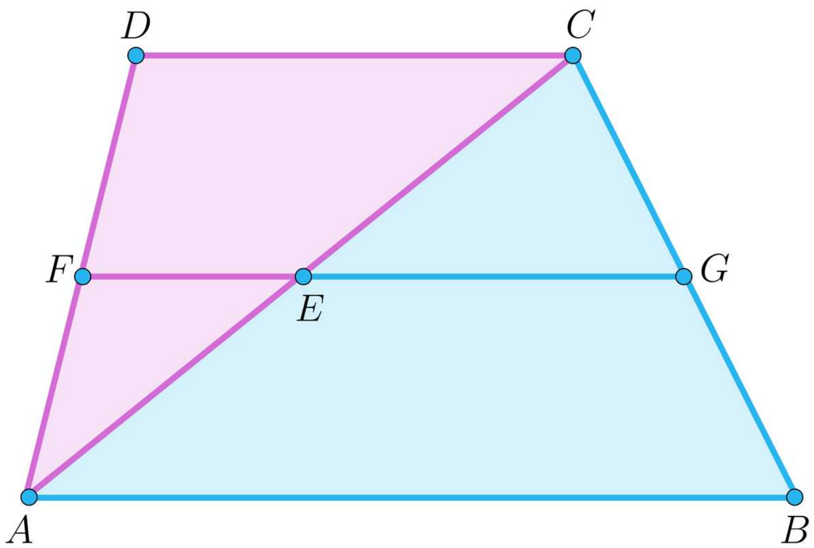
Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie (linia środkowa w trójkącie) jest równoległy do trzeciego boku i długość tego odcinka jest równa połowie długości trzeciego boku.

Twierdzenie: o linii środkowej w trapezie

Linia środkowa w trapezie jest równoległa do podstaw a jej długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

Dowód

Na rysunku prowadzimy przekątną AC trapezu $ABCD$. Niech E będzie jej środkiem, a punkt F środkiem boku AD. Wtedy odcinek FE jest linią środkową w trójkącie ACD, więc jest równoległy do podstawy DC i równy połowie jej długości.



Podobnie, niech punkt G będzie środkiem boku BC. Wtedy EG jest linią środkową w trójkącie ABC, więc jest równoległy do podstawy AB i równy połowie jej długości.

Teraz zauważmy, że odcinki FE i EG są równoległe i mają wspólny koniec E. To oznacza, że leżą na jednej prostej i stąd odcinek FG jest równoległy do podstaw trapezu i jego długość jest równa sumie długości odcinków FE i EG, czyli

$$\frac{|DC|}{2} + \frac{|AB|}{2} = \frac{|DC|+|AB|}{2}.$$

Przykład 1

Obliczymy długość linii środkowej w trapezie o podstawach długości 20, 16.

Rozwiązanie

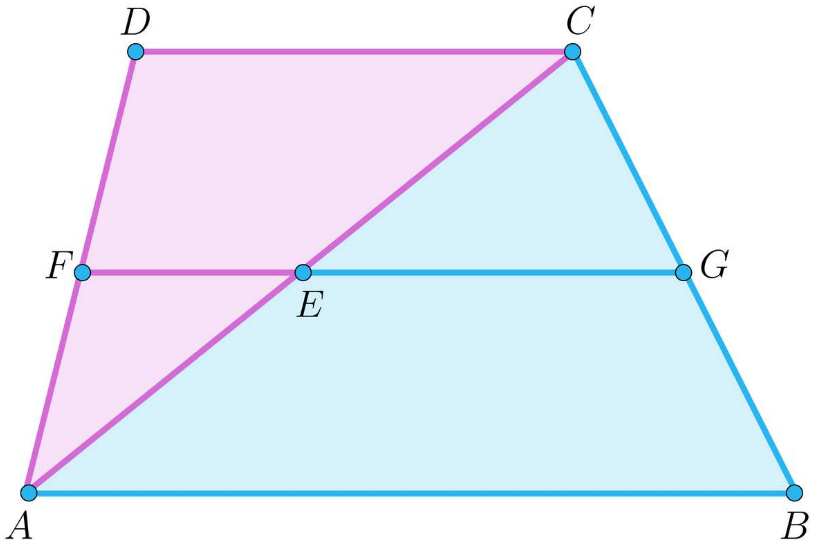
Bezpośrednio z powyższego twierdzenia długość tej linii jest równa $\frac{20+16}{2} = 18$.

Przykład 2

Pokażemy, że linia środkowa w trapezie dzieli wysokość trapezu na połowy.

Rozwiązanie

Wystarczy zastosować twierdzenie Talesa do trójkąta ABC.



Ponieważ linia środkowa w tym trójkącie dzieli boki na połowy, to też dzieli na połowy każdy odcinek łączący wierzchołek C z podstawą AB, w szczególności wysokość trójkąta ABC, która jest jednocześnie wysokością trapezu.

Przykład 3

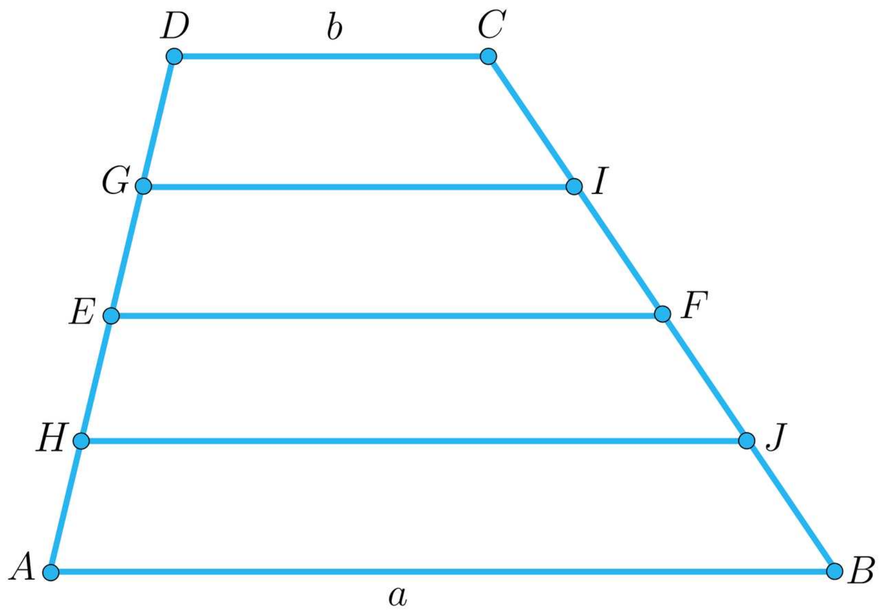
W trapezie długość linii środkowej jest równa c, a długość wysokości jest równa h. Wyznaczymy pole trapezu.

Rozwiązanie

Ponieważ $c = \frac{a+b}{2}$ i $P = \frac{a+b}{2}h$, to $P = ch$.

Przykład 4

Przeanalizujemy sytuację, w której ramiona trapezu zostały podzielone na cztery równe odcinki, a następnie końce odpowiednich odcinków na ramionach trapezu zostały połączone odcinkami jak na rysunku. Pokażemy, że powstałe w ten sposób odcinki są równoległe oraz wyznaczymy ich długości w zależności od długości podstaw trapezu a i b.



Rozwiązanie

Ponieważ punkty E i F są środkami ramion trapezu, to EF jest linią środkową w trapezie, więc EF jest równoległy do podstaw i ma długość $\frac{a+b}{2}$.

Punkty G i I są środkami ramion DE i CF trapezu $CDEF$, więc GI jest linią środkową w trapezie, i stąd GI jest równoległy do podstaw i ma długość $\frac{b+\frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3b+a}{4}$.

Podobnie, HJ jest równoległy do podstaw i ma długość $\frac{\frac{a+b}{2}+a}{2} = \frac{3a+b}{4}$.

Zanim przejdziemy do kolejnego przykładu przypomnimy pojęcie ciągu arytmetycznego.

Ciąg arytmetyczny to taki ciąg liczb, w którym każda kolejna liczba różni się od poprzedniej o ustaloną wartość r. Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego. Zachodzi własność, że każdy (oprócz pierwszego) wyraz ciągu arytmetycznego jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.

Przykład 5

Pokażemy, że długości odcinków równoległych z poprzedniego przykładu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = \frac{a-b}{4}$.

Rozwiązanie

Po pierwsze z własności linii środkowej w trapezie wynika, że długość każdego odcinka poniżej podstawy b jest średnią arytmetyczną odcinków sąsiednich. Stąd długości tych odcinków, począwszy od b tworzą ciąg arytmetyczny.

Różnica tego ciągu jest równa $r = |GI| - |DC| = \frac{3a+b}{4} - b = \frac{a-b}{4}$.

Twierdzenie: o stosunku pól trapezów wyznaczonych przez linię środkową w trapezie

Niech AB i CD będą podstawami trapezu i $|AB| = a$, $|CD| = b$ i niech punkty F, G będą środkami ramion trapezu.

Wtedy stosunek pola trapezu $FGBA$ do pola trapezu $CDFG$ wynosi $\frac{b+3a}{a+3b}$.

Dowód

Zastosujemy oznaczenia z rysunku przedstawionego w dowodzie twierdzenia o linii środkowej w trapezie. Niech h oznacza wysokość w trapezie $ABCD$.

Znów skorzystamy z własności linii środkowej w trójkącie.

Z twierdzenia Talesa w trójkącie ADC wynika, że trójkąt AFE jest podobny do trójkąta ADC w skali $1:2$. Stąd pole trójkąta AFE jest równe $P_{AFE} = \frac{1}{4} P_{ACD} = \frac{hb}{8}$. Pole trapezu $CDFE$ jest równe $P_{CDFE} = \frac{3hb}{8}$.

Podobne rozumowanie przeprowadzone dla trójkąta ABC daje $P_{CEG} = \frac{ha}{8}$ i $P_{ABGE} = \frac{3ha}{8}$.

Stąd $P_{FGBA} = P_{AFE} + P_{ABGE} = \frac{hb}{8} + \frac{3ha}{8} = \frac{h}{8}(b + 3a)$.

Analogicznie $P_{CDFG} = P_{CEG} + P_{CDFE} = \frac{ha}{8} + \frac{3hb}{8} = \frac{h}{8}(a + 3b)$.

Ostatecznie $\frac{P_{FGBA}}{P_{CDFG}} = \frac{b+3a}{a+3b}$.

Przykład 6

Przy oznaczeniach z powyższego twierdzenia wyznaczymy stosunki pól trapezów wyznaczonych przez linię środkową w trapezie do pola tego trapezu.

Rozwiązanie

Ponieważ $\frac{P_{FGBA}}{P_{CDFG}} = \frac{b+3a}{a+3b}$ i $P_{ABCD} = P_{FGBA} + P_{CDFG}$, to

$P_{FGBA} = \frac{\frac{h}{8}(b+3a)}{\frac{h}{8}(a+3b)+\frac{h}{8}(b+3a)} = \frac{b+3a}{a+3b+b+3a} P_{ABCD} = \frac{b+3a}{4a+4b} P_{ABCD}$.

Stąd $\frac{P_{FGBA}}{P_{ABCD}} = \frac{b+3a}{4a+4b}$ i analogicznie $\frac{P_{CDFG}}{P_{ABCD}} = \frac{a+3b}{4a+4b}$.

Przykład 7

Trapez $ABCD$ ma podstawy długości 8 i 10 oraz wysokość równą 4. Obliczymy pola trapezów wyznaczonych przez linię środkową w tym trapezie.

Rozwiązanie

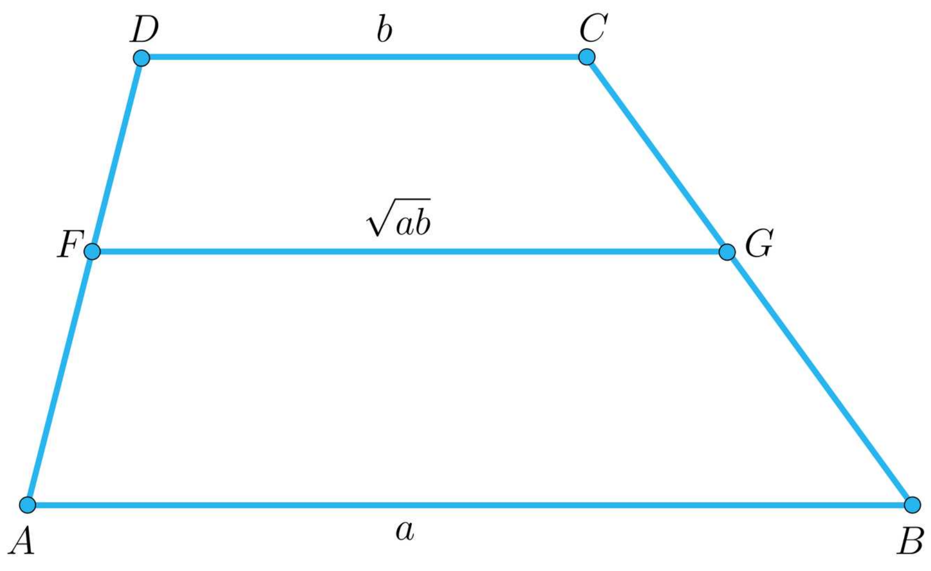
Stosunek pól tych trapezów jest równy $\frac{8+30}{24+10} = \frac{38}{34} = \frac{19}{17}$. Niech P oznacza pole trapezu $ABCD$. Wtedy $P = \frac{4(8+10)}{2} = 36$.

Wtedy większy z trapezów ma pole równe $\frac{19}{19+17} P = \frac{19}{36} \cdot 36 = 19$ a mniejszy ma pole $36 - 19 = 17$.

Zaraz sformułujemy własność linii środkowej w trapezie związaną z podobieństwem trapezów, ale wpierw zobaczmy jak powiązane są ze sobą podobne trapezy wyznaczone przez odcinek łączący ramiona trapezu i równoległy do jego podstaw.

Własność: trapezów podobnych

Jeżeli trapez $ABCD$ podzielimy odcinkiem równoległym do podstaw na trapezy podobne, to długość tego odcinka jest równa średniej geometrycznej $\sqrt{ab}$, gdzie a i b są długościami podstaw AB i CD.



Dowód

Jeżeli trapezy $FGCD$ i $ABGF$ są podobne, to $|DC| : |FG| = |FG| : |AB|$.

Stąd $|FG|^2 = ab$ i stąd $|FG| = \sqrt{ab}$.

Twierdzenie: o związku linii środkowej w trapezie z podobieństwem trapezów wyznaczonych przez linię środkową

Niech FG będzie linią środkową w trapezie $ABCD$, w którym dłuższa podstawa AB ma długość a i krótsza podstawa CD ma długość b. Trapezy $ABGF$ i $FGCD$ są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy trapez $ABCD$ jest równoległobokiem.

Dowód

Załóżmy, że trapez $ABCD$ jest równoległobokiem. Wtedy $a = b$ i $|FG| = a$.

Wtedy $ABGF$ i $FGCD$ są przystającymi równoległobokami, więc też są podobne.

Aby pokazać twierdzenie w drugą stronę, załóżmy, że trapezy $ABGF$ i $FGCD$ są podobne. Wtedy $|FG| = \sqrt{ab}$. Z własności linii środkowej w trapezie wynika, że $|FG| = \frac{a+b}{2}$.

Stąd $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ i po przekształceniu $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + 2ab + b^2\right)$ i dalej

$4ab = a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = 0$

$(a-b)^2 = 0$

$a = b$.

Stąd wynika, że postawy trapezu są równe, więc trapez jest równoległobokiem.

Przykład 8

W trapezie $ABCD$, który nie jest równoległobokiem, poprowadzono odcinek FG równoległy do podstaw trapezu tak, że trapezy $ABGF$ i $FGCD$ są podobne. Pokażemy, że FG nie jest linią środkową w trapezie $ABCD$.

Rozwiązanie

Wynika to wprost z powyższego twierdzenia, bo gdyby FG był linią środkową w trapezie $ABCD$, to ten trapez byłby równoległobokiem, a to jest sprzeczne z założeniem.

Słownik

linia środkowa w trójkącie

odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta

trapez

czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych

równoległobok

czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych

ciąg arytmetyczny

ciąg liczbowy, w którym każda kolejna liczba różni się od poprzedniej o ustaloną wartość r

średnia arytmetyczna liczb a, b

wartość wyznaczona ze wzoru $\frac{a+b}{2}$

średnia geometryczna liczb dodatnich a, b

wartość wyznaczona ze wzoru $\sqrt{ab}$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

1. Na ekranie przedstawiony jest trapez $ABCD$ oraz linia środkowa EF w tym trapezie.
2. Poruszaj punktami A, B, C, D aby uzyskać różne trapezy.
3. Poruszając punktami A i D zmieniasz trapez, ale długości podstaw się nie zmieniają.
4. Poruszając punktem A zmieniasz tylko długość podstawy AB. Natomiast poruszając punktem C zmieniasz tylko długość podstawy CD.
5. Obserwuj położenie podstaw i linii środkowej.
6. Obserwuj długości podstaw i długość linii środkowej.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DEdB4slwe

Polecenie 2

Oceń prawdziwość zdań. Zaznacz Prawda lub Fałsz.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Linia środkowa w trapezie jest równoległa do podstaw.	○	○
Jeżeli dwa trapezy mają równe odpowiednie podstawy to długość linii środkowej zależy od odległości między podstawami.	○	○
Długość linii środkowej zależy tylko od długości podstaw trapezu.	○	○
Jeżeli długość linii środkowej w trapezie jest równa długości jednej z podstaw, to trapez jest równoległobokiem.	○	○

Polecenie 3

W trapezie $ABCD$ podstawa AB ma długość a, podstawa CD ma długość b, a linia środkowa ma długość c. Wyznacz wskazane w poleceniach poniżej wartości. Jeżeli nie jesteś pewien odpowiedzi skorzystaj z symulacji interaktywnej.

1. Wyznacz c jeśli $a = 5$, $b = 8$.

2. Wyznacz a jeśli $b = 20$, $c = 27$.

3. Wyznacz b jeśli $a = 23$, $c = 15$.

4. Wyznacz c jeśli $a + b = 2\sqrt{3}$.

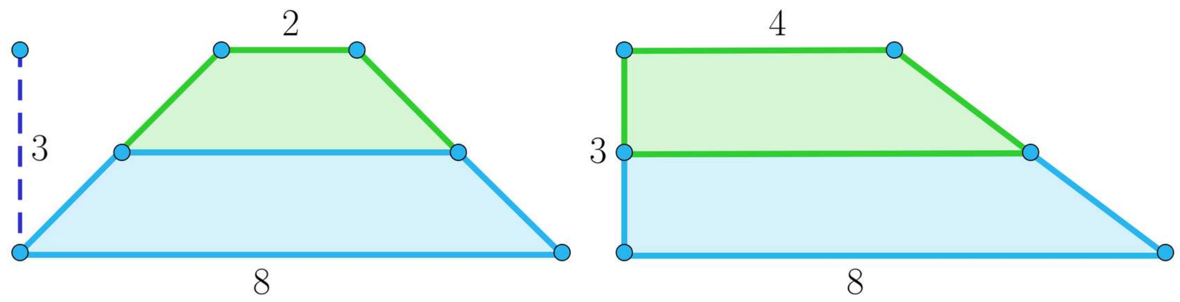
5. Wyznacz a jeśli $b + c = \sqrt{5}$ i $a + b = 4$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dane są dwa trapezy przedstawione na rysunku.



Ustalmy oznaczenia obowiązujące dla obu trapezów:

P – pole trapezu,
P_1 - pole trapezu zielonego,
P_2 – pole trapezu niebieskiego,
c – długość linii środkowej,
d – odległość linii środkowej od dłuższej podstawy.

Podane odpowiedzi przyporządkuj do czterech kategorii.

prawdziwe tylko dla trapezu po lewej stronie

prawdziwe tylko dla trapezu po prawej stronie

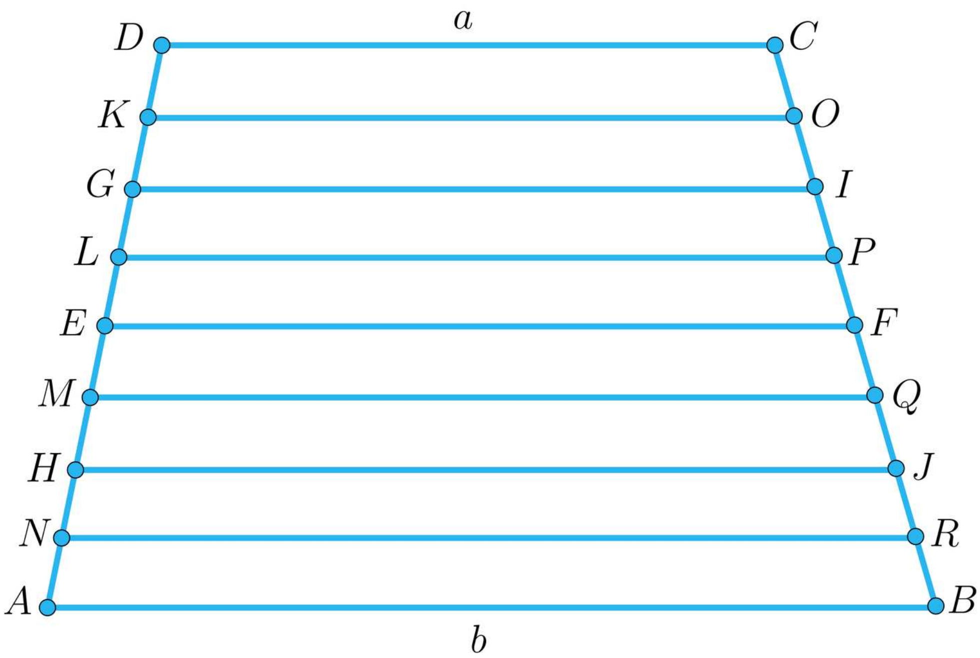
prawdziwe dla obu trapezów

nie zachodzi dla żadnego z trapezów

$P_2 = \frac{52}{4}$ | $P = 18$ | $\frac{P_1}{P} = \frac{9}{20}$ | $d = \frac{3}{2}$ | $P_1 = \frac{27}{4}$ | $P = 15$ | $P = 16$ | $\frac{P_1}{P} = \frac{7}{20}$ | $\frac{P_1}{P} = \frac{5}{12}$ | $P_1 = \frac{30}{4}$ | $c = 6$ | $\frac{P_1}{P_2} > 1$ | $P = P_1 + P_2$ | $P_1 = \frac{21}{4}$ | $c = 5$ | $P_2 = \frac{39}{4}$ | $c = 7$ | $P_2 = \frac{42}{4}$

Ćwiczenie 2

Na rysunku ramiona trapezu podzielono na 8 równych odcinków i połączono końce odpowiednich odcinków tak, że powstałe odcinki są równoległe do podstaw.



Uzupełnij luki, wstawiając podane wyrażenia w odpowiednie miejsca.

1. Trapezy, których podstawami są kolejne odcinki ______ podobne do trapezów sąsiednich.
2. Długości powstałych odcinków tworzą ciąg ______.
3. Jeżeli odcinek nie jest podstawą, to jego długość jest ______ sąsiednich.
4. Trapezy, których podstawami są kolejne odcinki mają ______ wysokości.

nierówne | równe | sumą | różnicą odcinków | nie są | arytmetyczny | są | harmoniczny | geometryczny | średnią arytmetyczną

Ćwiczenie 3

Przyjmując, że podstawy trapezu oznaczymy a oraz b, natomiast linię środkową c, wskaż poprawne odpowiedzi.

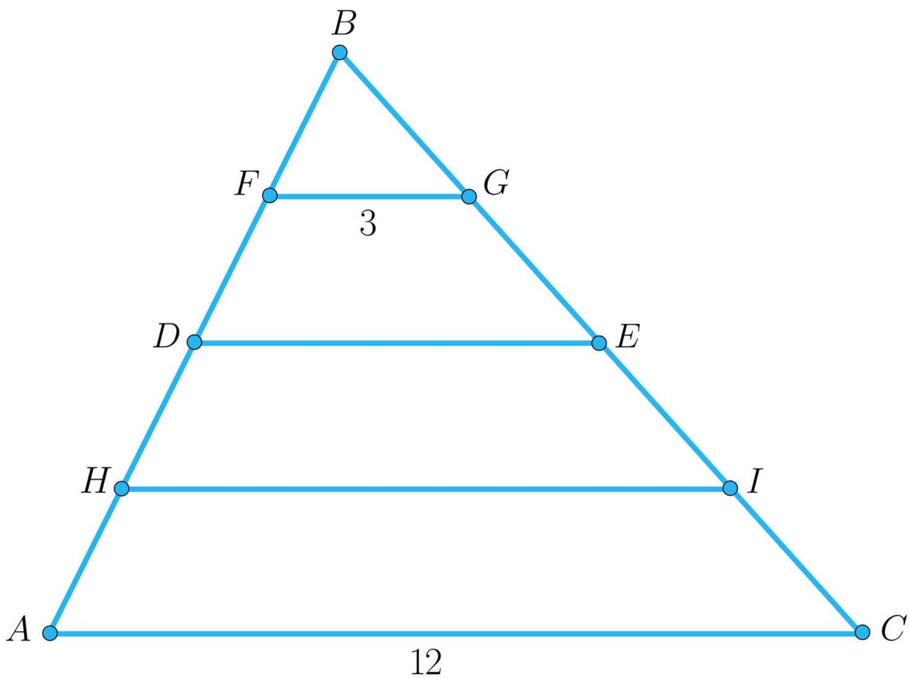
Opis trapezu	Odpowiedź 1	Odpowiedź 2
W trapezie dłuższa podstawa ma długość $27\ \text{cm}$ i jest o $10\ \text{cm}$ dłuższa niż krótsza podstawa. Wyznacz długość linii środkowej w tym trapezie.	$a = 27, b = 8{,}5, c = 37$	$a = 27, b = 17, c = 22$
W trapezie dłuższa podstawa ma $16\ \text{cm}$. Linia środkowa ma $12,5\,\text{cm}$. Wyznacz długość krótszej podstawy.	$a = 16, b = 9, c = 12,5$	$a = 16, b = 10, c = 12,5$

Ćwiczenie 4

Ramiona trapezu prostokątnego mają długości 6 i 10. Odcinek łączący środki ramion ma długość 10. Oblicz długości podstaw trapezu.

Ćwiczenie 5

Boki AB i BC trójkąta ABC podzielono na cztery równe części i połączono odcinkami.

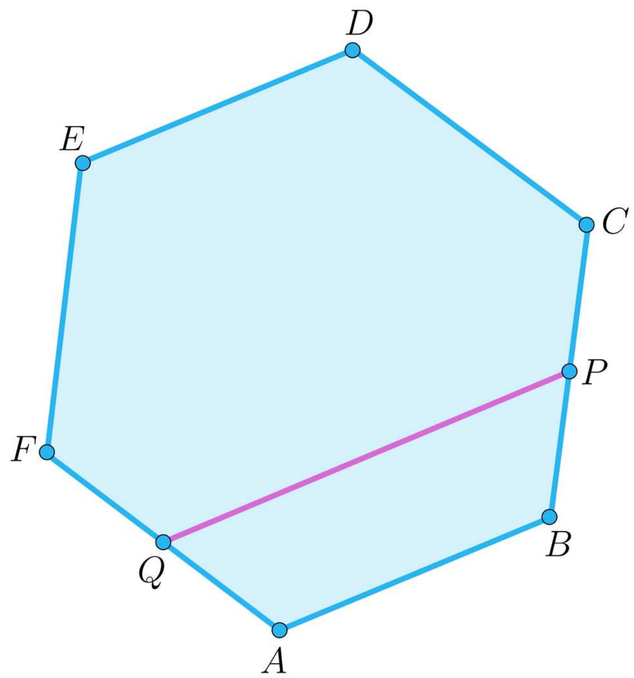


Wiadomo, że $|FG| = 3$, $|AC| = 12$.

Wyznacz długości odcinków DE i HI.

Ćwiczenie 6

Punkty P, Q są środkami boków BC i AF sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Oblicz stosunek pól czworokąta $ABPQ$ i sześciokąta $ABCDEF$.

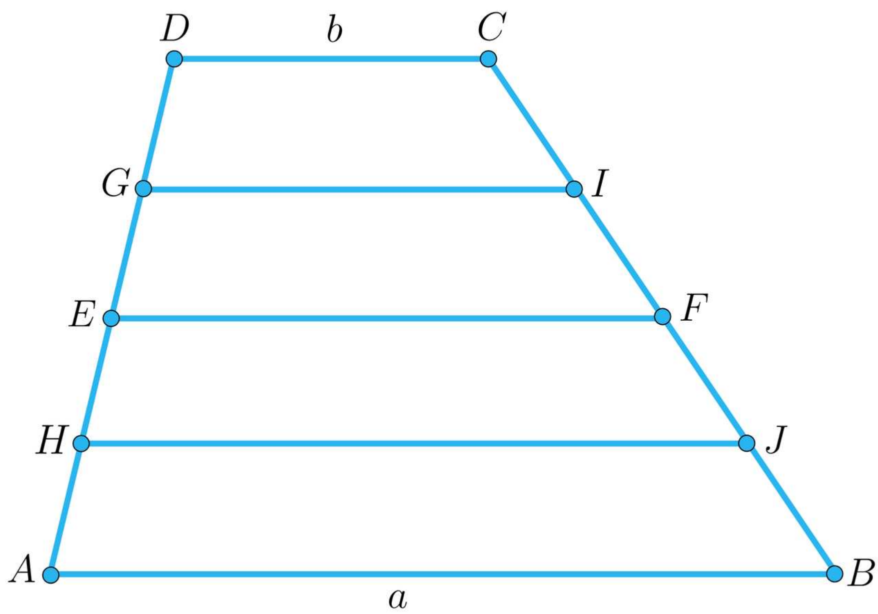


Ćwiczenie 7

W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, ramię ma długość 7, a przekątna 8. Oblicz długość podstaw trapezu wiedząc, że odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 4.

Ćwiczenie 8

Ramiona trapezu $ABCD$ podzielono na cztery równe odcinki, a następnie końce odpowiednich odcinków na ramionach trapezu zostały połączone odcinkami jak na rysunku. Wyznacz długości odcinków GI, EF, HJ oraz różnicę ciągu arytmetycznego utworzonego przez długości tych odcinków, jeśli $a = 16$, $b = 4$.



Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Odcinek łączący środki ramion trapezu

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

VI. Ciągi

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje i rozpoznaje odcinek łączący środki ramion trapezu, czyli linię środkową w trapezie,
- formułuje i potrafi udowodnić twierdzenie o linii środkowej w trapezie,
- poznaje i stosuje związek między długościami linii środkowych a ciągiem arytmetycznym w ciągu trapezów,
- wyznacza stosunek pól trapezów powstałych z podziału danego trapezu linią środkową,
- pokazuje, że jeśli linia środkowa dzieli trapez na trapezy podobne, to dany trapez jest równoległobokiem,
- wykorzystuje własności linii środkowej w trapezie czworokątów w rozwiązywaniu zadań, w tym w zadaniach związanych z wielokątami foremnymi.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- interaktywna aplikacja,
- analiza pomysłów.

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer,
- lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji:

Faza wprowadzająca:

1. Przedstawienie tematu lekcji, uzgodnienie z uczniami kryteriów sukcesu.
2. Przypomnienie twierdzenia o linii środkowej w trójkącie.

Faza realizacyjna:

1. Definicja linii środkowej w trapezie.

2. Sformułowanie i dowód twierdzenia o linii środkowej w trapezie z wykorzystaniem twierdzenia o linii środkowej w trójkącie.
3. Wyznaczenie stosunku pól trapezów powstałych z podzielenia danego trapezu linią środkową.
4. Analiza sytuacji, w której linia środkowa dzieli trapez na trapezy podobne. Związek średniej arytmetycznej ze średnią geometryczną.
5. Wykorzystanie ciągu trapezów powstałych w wyniku podziału ramion trapezu na równe odcinki do pokazania związku tego ciągu z ciągiem arytmetycznym.
6. Wykorzystanie symulacji interaktywnej, w utrwaleniu wiedzy o własnościach linii środkowej w trapezie.

Faza podsumowująca:

1. Uczeń sprawdza nabyte umiejętności i wiedzę w ramach ćwiczeń sprawdzających.
2. Uczeń rozwiązuje zadania trudniejsze wykorzystujące wiedzę przedstawioną na lekcji w szerszym kontekście, również w zastosowaniach praktycznych.

Praca domowa:

Uczeń ma za zadnie na kartonie narysować trapez. Ramiona trapezu podzielić na 8 równych części. Połączyć punkty na ramionach tak, by powstały odcinki równolegle do podstaw trapezu. Ponumerować powstałe trapezy w kolejności od najmniejszego do największego kolejnymi liczbami. Kładąc trapez o numerze n na trapez o numerze $n+1$, zaznaczyć na większym trapezie, trapez jaki zostaje po odcięciu trapezu mniejszego. Na koniec odpowiedzieć na pytania. Co można powiedzieć o trapezach jakie w ten sposób dostajemy? Dlaczego tak się dzieje?

Materiały pomocnicze:

- Trapez i jego rodzaje

Wskazówki metodyczne:

Uczeń może wykorzystać symulacje interaktywną

- podczas przygotowywania się do zajęć,
- do utrwalania wiedzy,
- jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.