



Odcinek łączący środki ramion trapezu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Odcinek łączący środki ramion trapezu

Źródło: [OpenClipart-Vectors](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Znane są własności linii środkowej w trójkącie, czyli linii która w trójkącie łączy środki dwóch boków. Linia ta jest równoległa do trzeciego boku a jej długość jest równa połowie trzeciego boku.

Zadamy sobie pytanie o własności odcinka, który łączy środki ramion trapezu (nazywanego linią środkową w trapezie). Czy jest równoległy do podstaw trapezu? Czy można wyznaczyć jego długość?

Twoje cele

- Poznasz i sformułujesz pojęcie linii środkowej w trapezie.
- Poznasz własności linii środkowej w trapezie.
- Poznasz stosunek pól trapezów, na jakie linia środkowa w trapezie dzieli ten trapez.
- Zastosujesz własności linii środkowej w trapezie w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Definicja: linii środkowej w trapezie

Linia środkowa w trapezie jest to odcinek łączący środki ramion trapezu.

Zanim przejdziemy do głównego twierdzenia w tym materiale przypomnijmy:

Twierdzenie: o linii środkowej w trójkącie

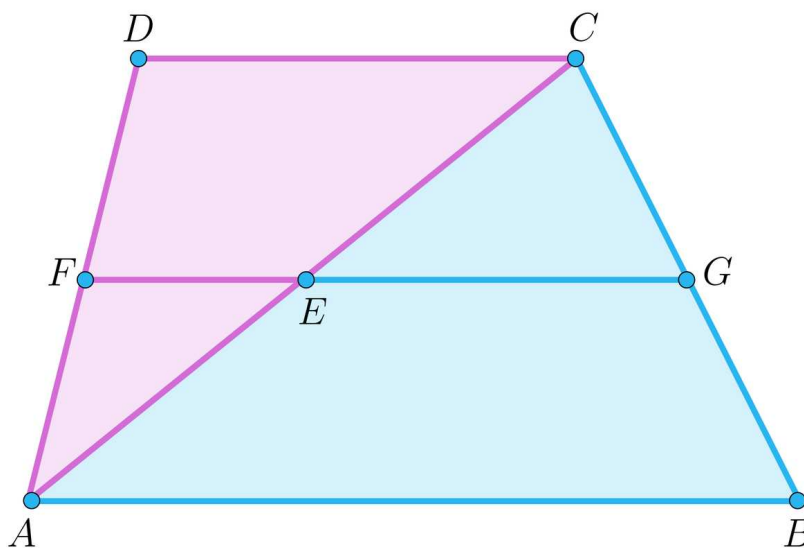
Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie (linia środkowa w trójkącie) jest równoległy do trzeciego boku i długość tego odcinka jest równa połowie długości trzeciego boku.

Twierdzenie: o linii środkowej w trapezie

Linia środkowa w trapezie jest równoległa do podstaw a jej długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

Dowód

Na rysunku prowadzimy przekątną AC trapezu $ABCD$. Niech E będzie jej środkiem, a punkt F środkiem boku AD . Wtedy odcinek FE jest linią środkową w trójkącie ACD , więc jest równoległy do podstawy DC i równy połowie jej długości.



Podobnie, niech punkt G będzie środkiem boku BC . Wtedy EG jest **linią środkową w trójkącie** ABC , więc jest równoległy do podstawy AB i równy połowie jej długości.

Teraz zauważmy, że odcinki FE i EG są równoległe i mają wspólny koniec E . To oznacza, że leżą na jednej prostej i stąd odcinek FG jest równoległy do podstaw trapezu i jego długość jest równa sumie długości odcinków FE i EG , czyli

$$\frac{|DC|}{2} + \frac{|AB|}{2} = \frac{|DC|+|AB|}{2}.$$

Przykład 1

Obliczymy długość linii środkowej w trapezie o podstawach długości 20, 16.

Rozwiązanie

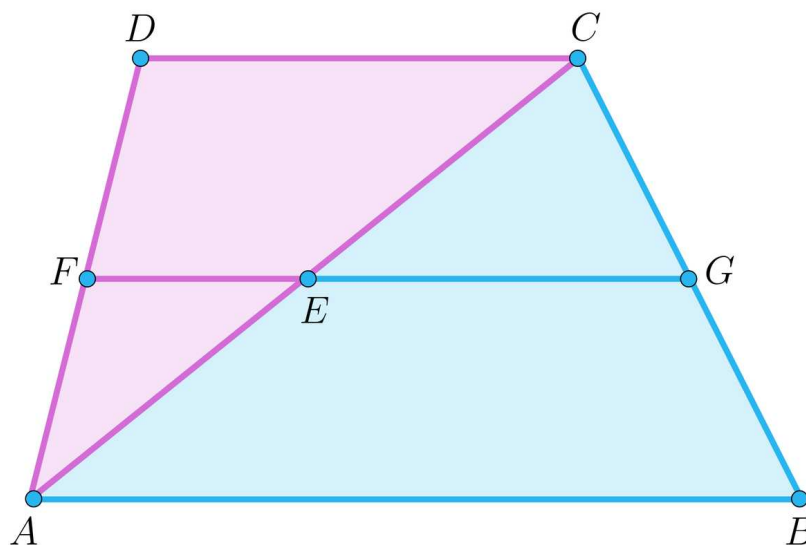
Bezpośrednio z powyższego twierdzenia długość tej linii jest równa $\frac{20+16}{2} = 18$.

Przykład 2

Pokażemy, że linia środkowa w trapezie dzieli wysokość trapezu na połowy.

Rozwiązanie

Wystarczy zastosować twierdzenie Talesa do trójkąta ABC .



Ponieważ linia środkowa w tym trójkącie dzieli boki na połowy, to też dzieli na połowy każdy odcinek łączący wierzchołek C z podstawą AB , w szczególności wysokość trójkąta ABC , która jest jednocześnie wysokością trapezu.

Przykład 3

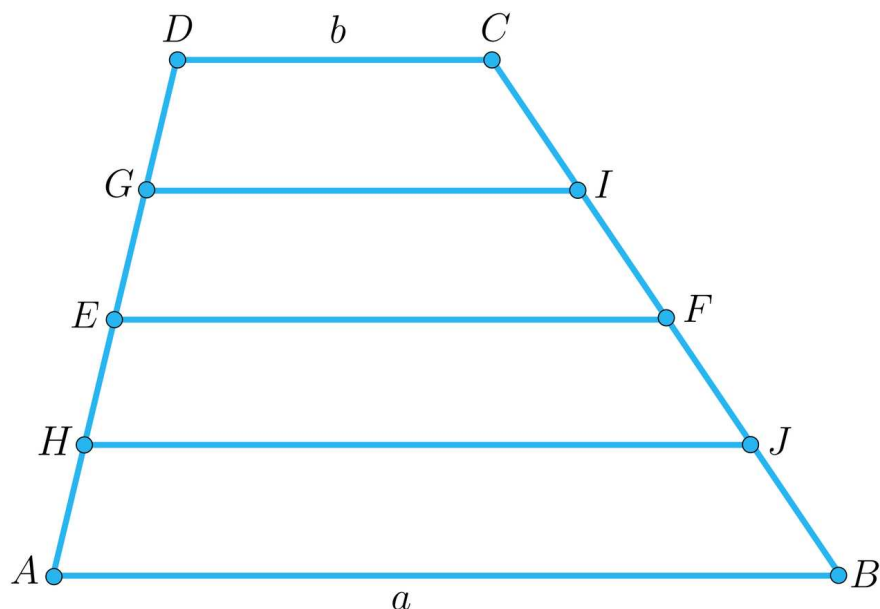
W trapezie długość linii środkowej jest równa c , a długość wysokości jest równa h . Wyznamy pole trapezu.

Rozwiązanie

Ponieważ $c = \frac{a+b}{2}$ i $P = \frac{a+b}{2}h$, to $P = ch$.

Przykład 4

Przeanalizujemy sytuację, w której ramiona trapezu zostały podzielone na cztery równe odcinki, a następnie końce odpowiednich odcinków na ramionach trapezu zostały połączone odcinkami jak na rysunku. Pokażemy, że powstałe w ten sposób odcinki są równoległe oraz wyznaczmy ich długości w zależności od długości podstaw trapezu a i b .



Rozwiązanie

Ponieważ punkty E i F są środkami ramion trapezu, to EF jest linią środkową w trapezie, więc EF jest równoległy do podstaw i ma długość $\frac{a+b}{2}$.

Punkty G i I są środkami ramion DE i CF trapezu $CDEF$, więc GI jest linią środkową w trapezie, i stąd GI jest równoległy do podstaw i ma długość $\frac{b+\frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3b+a}{4}$.

Podobnie, HJ jest równoległy do podstaw i ma długość $\frac{\frac{a+b}{2}+a}{2} = \frac{3a+b}{4}$.

Zanim przejdziemy do kolejnego przykładu przypomnimy pojęcie [ciągu arytmetycznego](#).

Ciąg arytmetyczny to taki ciąg liczb, w którym każda kolejna liczba różni się od poprzedniej o ustaloną wartość r . Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego. Zachodzi własność, że każdy (oprócz pierwszego) wyraz ciągu arytmetycznego jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.

Przykład 5

Pokażemy, że długości odcinków równoległych z poprzedniego przykładu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = \frac{a-b}{4}$.

Rozwiązanie

Po pierwsze z własności linii środkowej w trapezie wynika, że długość każdego odcinka poniżej podstawy b jest [średnią arytmetyczną](#) odcinków sąsiednich. Stąd długości tych odcinków, począwszy od b tworzą ciąg arytmetyczny.

Różnica tego ciągu jest równa $r = |GI| - |DC| = \frac{3a+b}{4} - b = \frac{a-b}{4}$.

Twierdzenie: o stosunku pól trapezów wyznaczonych przez linię środkową w trapezie

Niech AB i CD będą podstawami trapezu i $|AB| = a$, $|CD| = b$ i niech punkty F , G będą środkami ramion trapezu.

Wtedy stosunek pola trapezu $FGBA$ do pola trapezu $CDFG$ wynosi $\frac{b+3a}{a+3b}$.

Dowód

Zastosujemy oznaczenia z rysunku przedstawionego w dowodzie twierdzenia o linii środkowej w trapezie. Niech h oznacza wysokość w trapezie $ABCD$.

Znów skorzystamy z własności linii środkowej w trójkącie.

Z twierdzenia Talesa w trójkącie ADC wynika, że trójkąt AFE jest podobny do trójkąta ADC w skali 1 : 2. Stąd pole trójkąta AFE jest równe $P_{AFE} = \frac{1}{4}P_{ACD} = \frac{hb}{8}$. Pole trapezu $CDFE$ jest równe $P_{CDFE} = \frac{3hb}{8}$.

Podobne rozumowanie przeprowadzone dla trójkąta ABC daje $P_{CEG} = \frac{ha}{8}$ i $P_{ABGE} = \frac{3ha}{8}$.

Stąd $P_{FGBA} = P_{AFE} + P_{ABGE} = \frac{hb}{8} + \frac{3ha}{8} = \frac{h}{8}(b + 3a)$.

Analogicznie $P_{CDFG} = P_{CEG} + P_{CDFE} = \frac{ha}{8} + \frac{3hb}{8} = \frac{h}{8}(a + 3b)$.

Ostatecznie $\frac{P_{FGBA}}{P_{CDFG}} = \frac{b+3a}{a+3b}$.

Przykład 6

Przy oznaczeniach z powyższego twierdzenia wyznaczmy stosunki pól trapezów wyznaczonych przez linię środkową w trapezie do pola tego trapezu.

Rozwiązanie

Ponieważ $\frac{P_{FGBA}}{P_{CDFG}} = \frac{b+3a}{a+3b}$ i $P_{ABCD} = P_{FGBA} + P_{CDFG}$, to

$$P_{FGBA} = \frac{\frac{h}{8}(b+3a)}{\frac{h}{8}(a+3b) + \frac{h}{8}(b+3a)} = \frac{b+3a}{a+3b+b+3a} P_{ABCD} = \frac{b+3a}{4a+4b} P_{ABCD}.$$

Stąd $\frac{P_{FGBA}}{P_{ABCD}} = \frac{b+3a}{4a+4b}$ i analogicznie $\frac{P_{CDFG}}{P_{ABCD}} = \frac{a+3b}{4a+4b}$.

Przykład 7

Trapez $ABCD$ ma podstawy długości 8 i 10 oraz wysokość równą 4. Obliczymy pola trapezów wyznaczonych przez linię środkową w tym trapezie.

Rozwiązanie

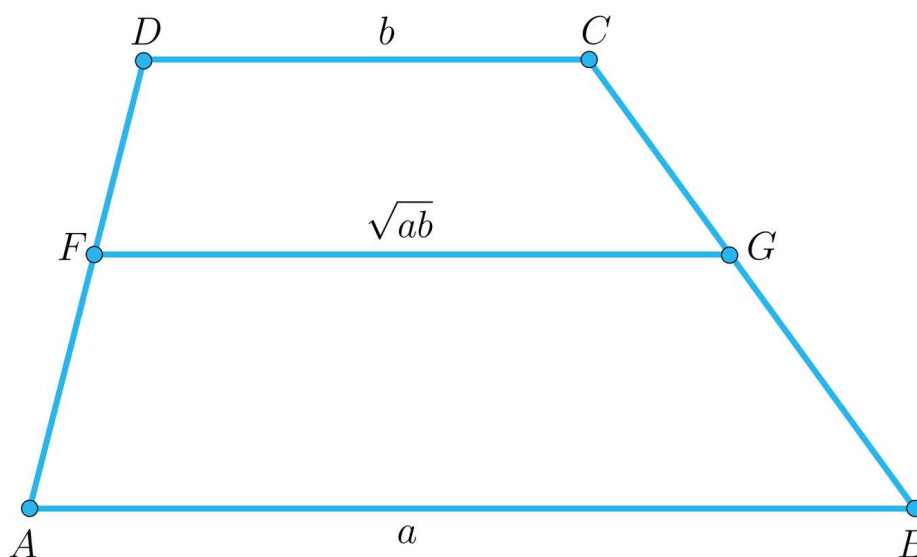
Stosunek pól tych trapezów jest równy $\frac{8+30}{24+10} = \frac{38}{34} = \frac{19}{17}$. Niech P oznacza pole trapezu $ABCD$. Wtedy $P = \frac{4(8+10)}{2} = 36$.

Wtedy większy z trapezów ma pole równe $\frac{19}{19+17}P = \frac{19}{36} \cdot 36 = 19$ a mniejszy ma pole $36 - 19 = 17$.

Zaraz sformułujemy własność linii środkowej w trapezie związaną z podobieństwem trapezów, ale wpieryw zobaczymy jak powiązane są ze sobą podobne trapezy wyznaczone przez odcinek łączący ramiona trapezu i równoległy do jego podstaw.

Własność: trapezów podobnych

Jeżeli trapez $ABCD$ podzielimy odcinkiem równoległym do podstaw na trapezy podobne, to długość tego odcinka jest równa **średniej geometrycznej** \sqrt{ab} , gdzie a i b są długościami podstaw AB i CD .



Dowód

Jeżeli trapezy $FGCD$ i $ABGF$ są podobne, to $|DC| : |FG| = |FG| : |AB|$.

Stąd $|FG|^2 = ab$ i stąd $|FG| = \sqrt{ab}$.

Twierdzenie: o związku linii środkowej w trapezie z podobieństwem trapezów wyznaczonych przez linię środkową

Niech FG będzie linią środkową w trapezie $ABCD$, w którym dłuższa podstawa AB ma długość a i krótsza podstawa CD ma długość b . Trapezy $ABGF$ i $FGCD$ są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy trapez $ABCD$ jest równoległobokiem.

Dowód

Załóżmy, że trapez $ABCD$ jest **równoległobokiem**. Wtedy $a = b$ i $|FG| = a$.

Wtedy $ABGF$ i $FGCD$ są przystającymi równoległobokami, więc też są podobne.

Aby pokazać twierdzenie w drugą stronę, załóżmy, że trapezy $ABGF$ i $FGCD$ są podobne. Wtedy $|FG| = \sqrt{ab}$. Z własności linii środkowej w trapezie wynika, że

$$|FG| = \frac{a+b}{2}.$$

Stąd $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ i po przekształceniu $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2)$ i dalej

$$4ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a - b)^2 = 0$$

$$a = b.$$

Stąd wynika, że postawy trapezu są równe, więc trapez jest równoległobokiem.

Przykład 8

W trapezie $ABCD$, który nie jest równoległobokiem, poprowadzono odcinek FG równoległy do podstaw trapezu tak, że trapezy $ABGF$ i $FGCD$ są podobne. Pokażemy, że FG nie jest linią środkową w trapezie $ABCD$.

Rozwiązanie

Wynika to wprost z powyższego twierdzenia, bo gdyby FG był linią środkową w trapezie $ABCD$, to ten trapez byłby równoległobokiem, a to jest sprzeczne z założeniem.

Słownik

linia środkowa w trójkącie

odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta

trapez

czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych

równoległobok

czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych

ciąg arytmetyczny

ciąg liczbowy, w którym każda kolejna liczba różni się od poprzedniej o ustaloną wartość

r

średnia arytmetyczna liczb a, b

wartość wyznaczona ze wzoru $\frac{a+b}{2}$

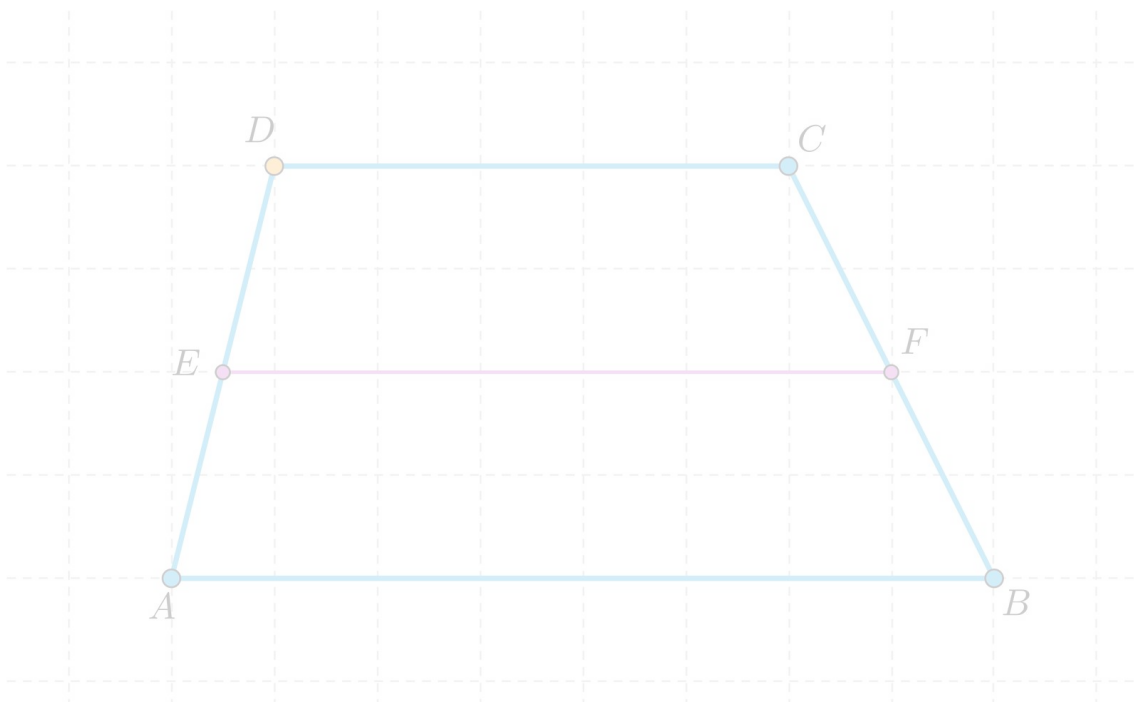
średnia geometryczna liczb dodatnich a, b

wartość wyznaczona ze wzoru \sqrt{ab}

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

1. Na ekranie przedstawiony jest trapez $ABCD$ oraz linia środkowa EF w tym trapezie.
2. Poruszaj punktami A, B, C, D aby uzyskać różne trapezy.
3. Poruszając punktami A i D zmieniasz trapez, ale długości podstaw się nie zmieniają.
4. Poruszając punktem A zmieniasz tylko długość podstawy AB . Natomiast poruszając punktem C zmieniasz tylko długość podstawy CD .
5. Obserwuj położenie podstaw i linii środkowej.
6. Obserwuj długości podstaw i długość linii środkowej.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DEdB4slwe>




Polecenie 2

Polecenie 3

W trapezie $ABCD$ podstawa AB ma długość a , podstawa CD ma długość b , a linia środkowa ma długość c . Wyznacz wskazane w poleceniach poniżej wartości. Jeżeli nie jesteś pewien odpowiedzi skorzystaj z symulacji interaktywnej.

1. Wyznacz c jeśli $a = 5, b = 8$.
2. Wyznacz a jeśli $b = 20, c = 27$.
3. Wyznacz b jeśli $a = 23, c = 15$.
4. Wyznacz c jeśli $a + b = 2\sqrt{3}$.
5. Wyznacz a jeśli $b + c = \sqrt{5}$ i $a + b = 4$.

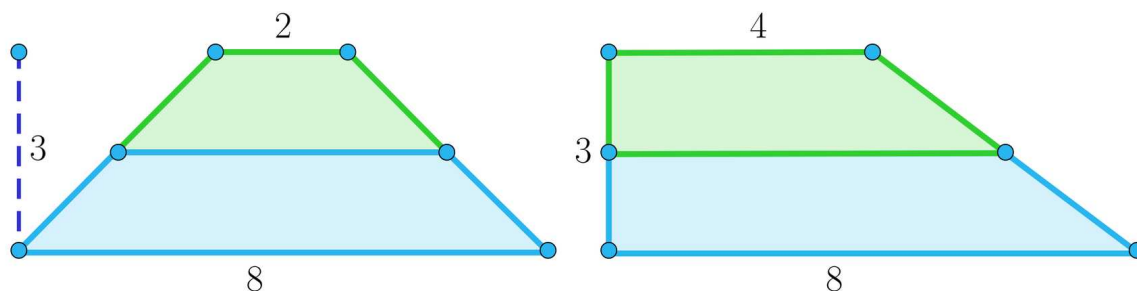
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dane są dwa trapezy przedstawione na rysunku.



Ustalmy oznaczenia obowiązujące dla obu trapezów:

P – pole trapezu,

P_1 – pole trapezu zielonego,

P_2 – pole trapezu niebieskiego,

c – długość linii środkowej,

d – odległość linii środkowej od dłuższej podstawy.

Podane odpowiedzi przyporządkuj do czterech kategorii.

$\frac{P_1}{P} = \frac{5}{12}$, $P = 16$, $c = 7$, $\frac{P_1}{P} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{P_1}{P_1 + P_2} > \frac{1}{2}$

$\frac{P}{15}$, $\frac{P}{1}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{21}{4}$, $\frac{39}{4}$, $\frac{P}{1}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{P}{1}$, $\frac{30}{4}$, $\frac{P}{2}$, $\frac{52}{4}$, $\frac{P}{2}$, $\frac{42}{4}$, $\frac{P}{1}$, $\frac{P}{1}$, $\frac{9}{20}$, c , $\frac{6}{1}$

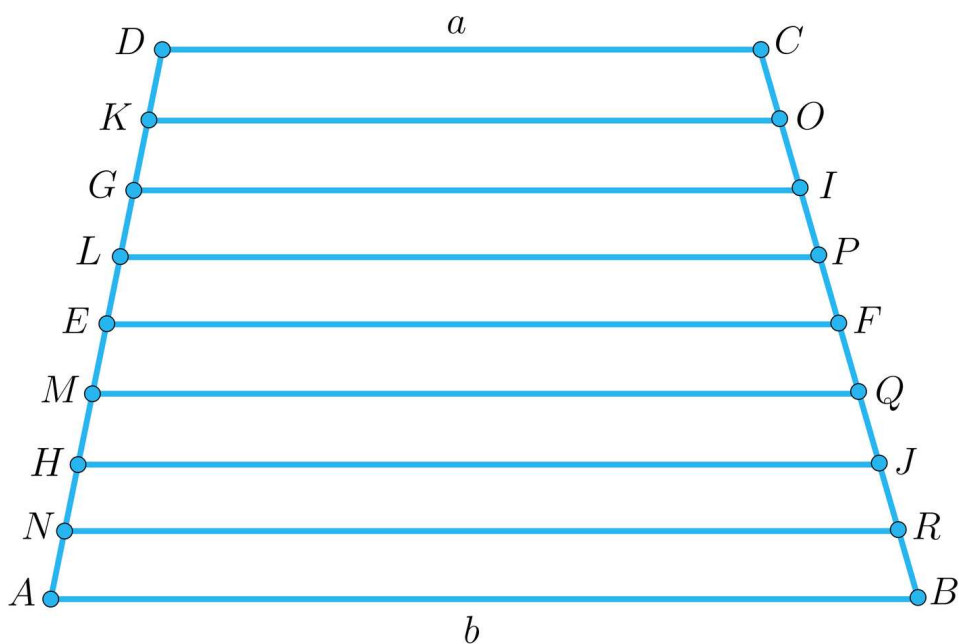
$P=18$, $c=5$

prawdziwe tylko dla trapezu po lewej stronie	
prawdziwe tylko dla trapezu po prawej stronie	
prawdziwe dla obu trapezów	
nie zachodzi dla żadnego z trapezów	

Ćwiczenie 2



Na rysunku ramiona trapezu podzielono na 8 równych odcinków i połączono końce odpowiednich odcinków tak, że powstałe odcinki są równoległe do podstaw.



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4

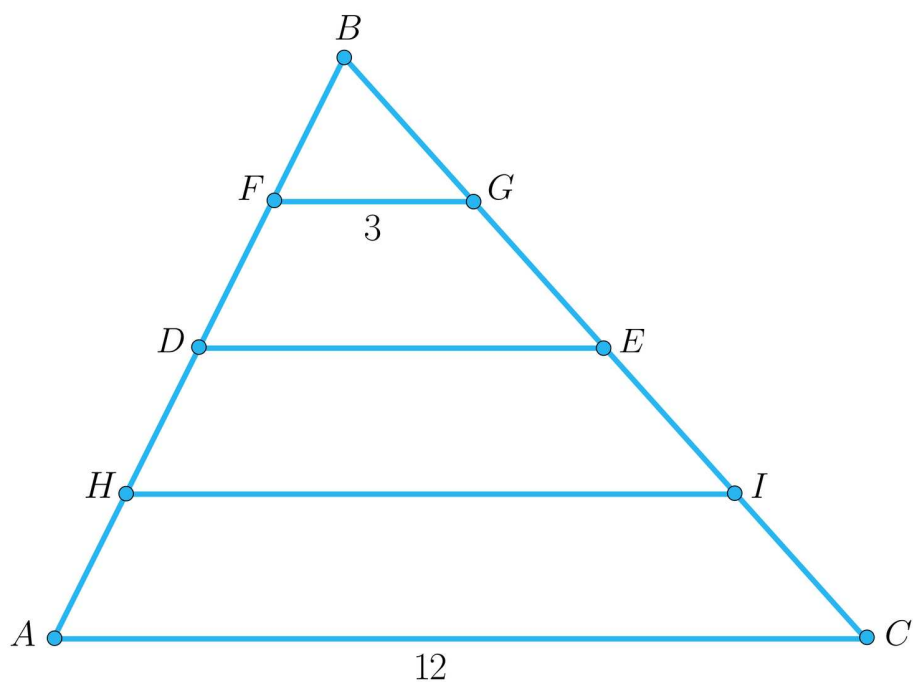


Ramiona trapezu prostokątnego mają długości 6 i 10. Odcinek łączący środki ramion ma długość 10. Oblicz długości podstaw trapezu.

Ćwiczenie 5



Boki AB i BC trójkąta ABC podzielono na cztery równe części i połączono odcinkami.



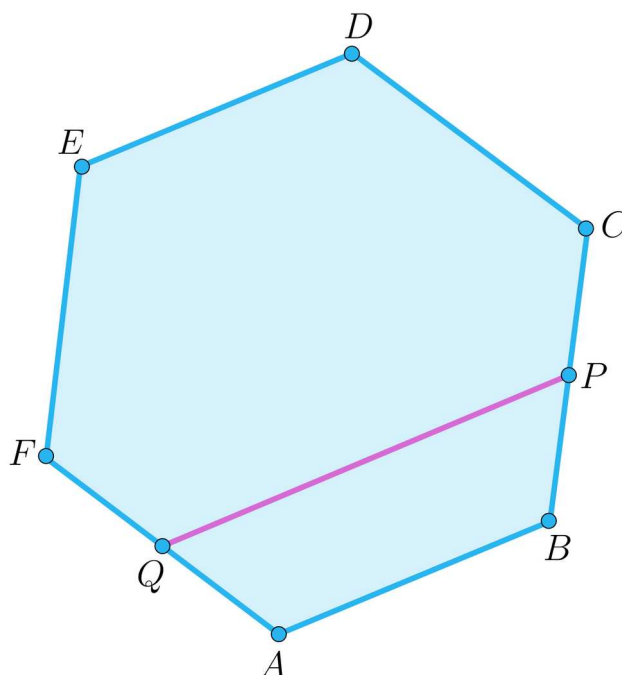
Wiadomo, że $|FG| = 3$, $|AC| = 12$.

Wyznacz długości odcinków DE i HI .

Ćwiczenie 6



Punkty P , Q są środkami boków BC i AF sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Oblicz stosunek pól czworokąta $ABPQ$ i sześciokąta $ABCDEF$.



Ćwiczenie 7

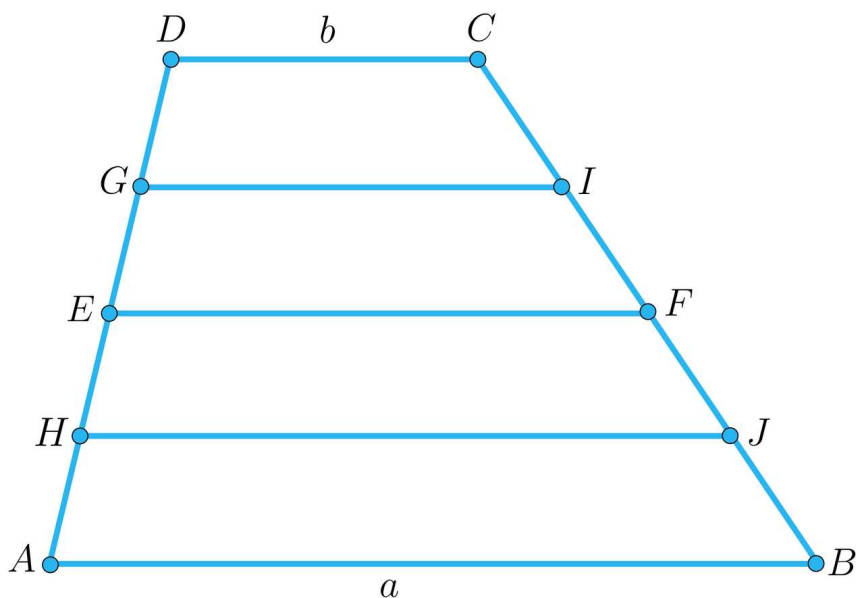


W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, ramię ma długość 7, a przekątna 8. Oblicz długość podstaw trapezu wiedząc, że odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 4.

Ćwiczenie 8



Ramiona trapezu $ABCD$ podzielono na cztery równe odcinki, a następnie końce odpowiednich odcinków na ramionach trapezu zostały połączone odcinkami jak na rysunku. Wyznacz długości odcinków GI , EF , HJ oraz różnicę ciągu arytmetycznego utworzonego przez długości tych odcinków, jeśli $a = 16$, $b = 4$.



Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Odcinek łączący środki ramion trapezu

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
- 4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
- 7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
- 12) przeprowadza dowody geometryczne.

VI. Ciągi

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje i rozpoznaje odcinek łączący środki ramion trapezu, czyli linię środkową w trapezie,
- formułuje i potrafi udowodnić twierdzenie o linii środkowej w trapezie,
- poznaje i stosuje związek między długościami linii środkowych a ciągiem arytmetycznym w ciągu trapezów,
- wyznacza stosunek pól trapezów powstałych z podziału danego trapezu linią środkową,
- pokazuje, że jeśli linia środkowa dzieli trapez na trapezy podobne, to dany trapez jest równoległobokiem,
- wykorzystuje własności linii środkowej w trapezie czworokątów w rozwiązywaniu zadań, w tym w zadaniach związanych z wielokątami foremnymi.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- interaktywna aplikacja,
- analiza pomysłów.

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer,
- lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji:

Faza wprowadzająca:

1. Przedstawienie tematu lekcji, uzgodnienie z uczniami kryteriów sukcesu.
2. Przypomnienie twierdzenia o linii środkowej w trójkącie.

Faza realizacyjna:

1. Definicja linii środkowej w trapezie.

2. Sformułowanie i dowód twierdzenia o linii środkowej w trapezie z wykorzystaniem twierdzenia o linii środkowej w trójkącie.
3. Wyznaczenie stosunku pól trapezów powstałych z podzielenia danego trapezu linią środkową.
4. Analiza sytuacji, w której linia środkowa dzieli trapez na trapezy podobne. Związek średniej arytmetycznej ze średnią geometryczną.
5. Wykorzystanie ciągu trapezów powstałych w wyniku podziału ramion trapezu na równe odcinki do pokazania związku tego ciągu z ciągiem arytmetycznym.
6. Wykorzystanie symulacji interaktywnej, w utrwaleniu wiedzy o własnościach linii środkowej w trapezie.

Faza podsumowująca:

1. Uczeń sprawdza nabyte umiejętności i wiedzę w ramach ćwiczeń sprawdzających.
2. Uczeń rozwiązuje zadania trudniejsze wykorzystujące wiedzę przedstawioną na lekcji w szerszym kontekście, również w zastosowaniach praktycznych.

Praca domowa:

Uczeń ma za zadanie na kartonie narysować trapez. Ramiona trapezu podzielić na 8 równych części. Połączyć punkty na ramionach tak, by powstały odcinki równoległe do podstaw trapezu. Ponumerować powstałe trapezy w kolejności od najmniejszego do największego kolejnymi liczbami. Kładąc trapez o numerze n na trapez o numerze $n + 1$, zaznaczyć na większym trapezie, trapez jaki zostaje po odcięciu trapezu mniejszego. Na koniec odpowiedzieć na pytania. Co można powiedzieć o trapezach jakie w ten sposób dostajemy? Dlaczego tak się dzieje?

Materiały pomocnicze:

- [Trapez i jego rodzaje](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczeń może wykorzystać symulację interaktywną

- podczas przygotowywania się do zajęć,
- do utrwalania wiedzy,
- jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.