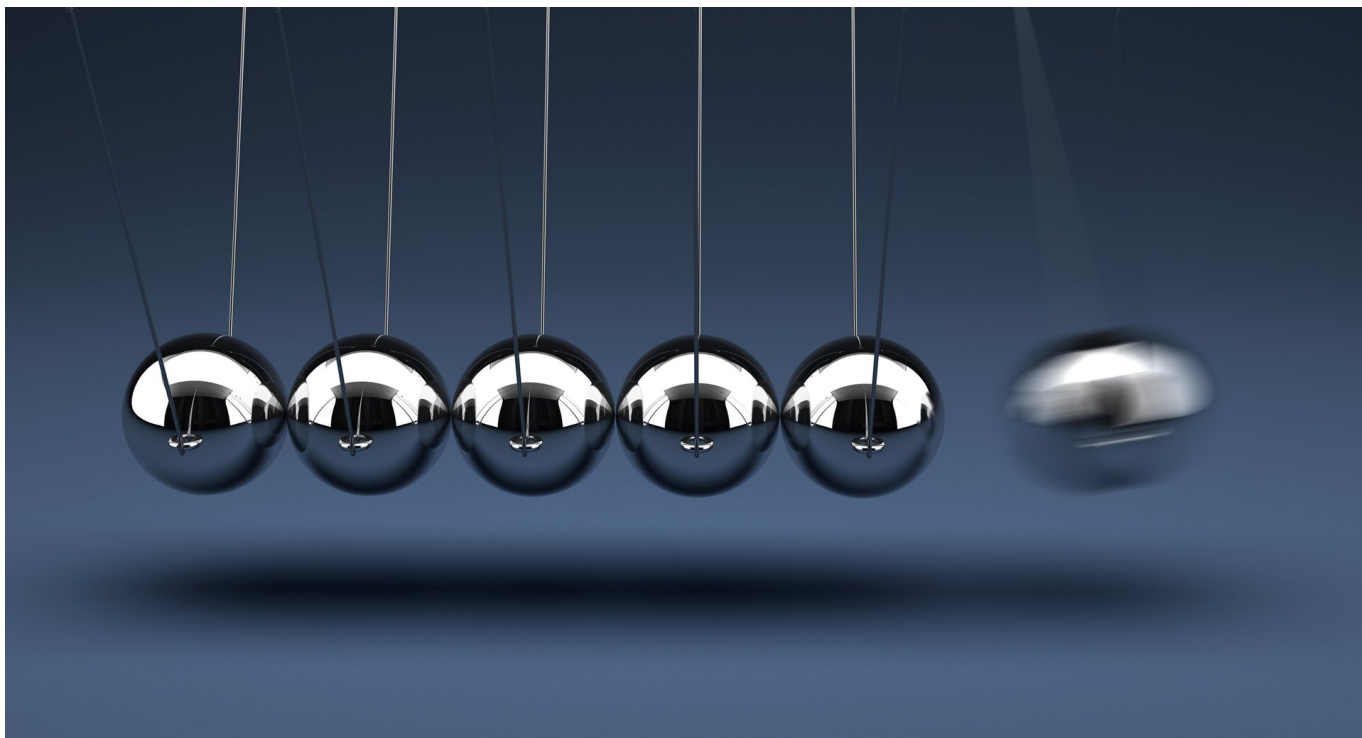
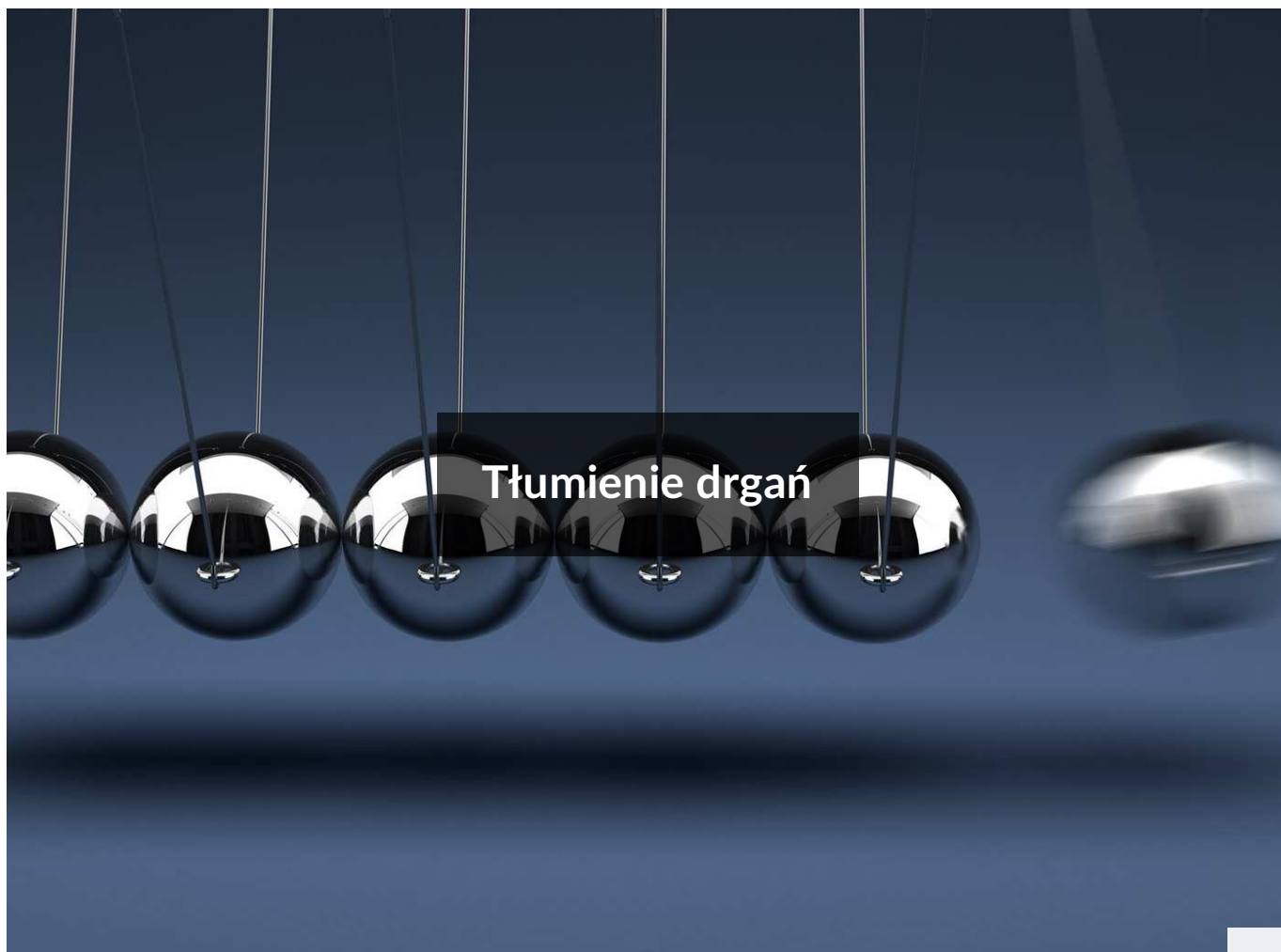




Tłumienie drgań

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Czy to nie ciekawe?

Czy jeśli posadzimy na huśtawce dziecko, a następnie odchylimy huśtawkę o pewien kąt, ruch huśtawki będzie trwał nieprzerwanie? Czy jednak huśtawka po pewnym czasie się zatrzyma? I co się dzieje z energią, jeśli w układzie wykonującym drgania występują siły tłumienia, takie jak tarcie czy lepkość?



Rys. a. Jakie siły oporu wpływają na ruch dziecka na huśtawce?

Twoje cele

- dowiesz się, czym jest tłumienie i jak zmienia równanie ruchu oscylatora harmonicznego,
- poznasz różnego rodzaju tłumienia, które mogą wystąpić w różnych układach rzeczywistych,
- dowiesz się, jak tłumienie wpływa na energię układu,
- przeanalizujesz wykresy zależności wychylenia i prędkości od czasu drgań tłumionych,
- zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Oscylator harmoniczny to jeden z najważniejszych układów w fizyce, ponieważ drgania występują powszechnie i często mogą być przybliżane tym modelem. W zasadzie każdy układ, nie tylko mechaniczny, ale i elektryczny czy biologiczny, może wykonywać drgania wokół swojego punktu równowagi. Przykładem są drgania elektryczne obwodu LC, czyli obwodu złożonego z cewki i kondensatora, który jest źródłem fal radiowych. Zachęcamy do zapoznania się z e-materiałem *W jaki sposób wytwarzane są fale elektromagnetyczne radiowe?*.

Równanie ruchu opisujące układ wykonujący drgania harmoniczne ma postać:

$$F_x = -m\omega^2 x ,$$

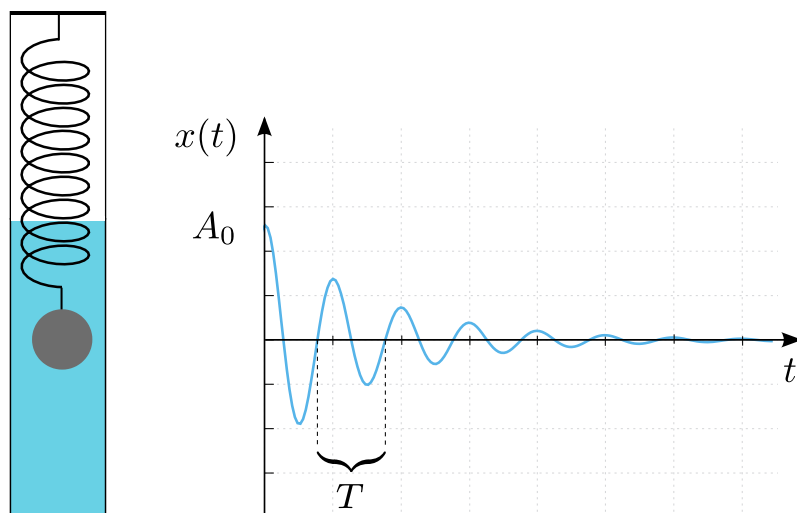
tj. opisuje siłę skierowaną przeciwnie do wychylenia z położenia równowagi. Jego rozwiązaniem okazuje się być wychylenie zależące od czasu wg wzoru

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) .$$

Należy pamiętać, że równania te opisują układ wyidealizowany - model, czyli uproszczoną wersję układu rzeczywistego. Tak opisany model będzie w nieskończoność wykonywać drgania o stałej amplitudzie, a więc i energii. Zastanówmy się zatem, jakich zjawisk nie uwzględnia prosty oscylator harmoniczny opisany powyższymi równaniami.

Jeśli posadzimy dziecko na huśtawce i odchylimy ją od pionu, dziecko zacznie się huśtać - nasz układ zacznie wykonywać drgania wokół punktu równowagi. Szybko jednak zauważymy, że amplituda, czyli maksymalne wychylenie huśtawki, z czasem maleje. Jeśli poczekamy dostatecznie długo, huśtawka całkowicie się zatrzyma. Oznacza to, że oprócz siły elastycznej, proporcjonalnej do wychylenia, działają w układzie również inne siły, w tym siły oporu. Pierwszą z nich jest siła tarcia, która występuje w ruchomej części mechanizmu huśtawki, np. w łożyskach. Kolejną siłą jest opór powietrza (tzw. [opór aerodynamiczny](#)). Prawdopodobnie to nie wszystko, ponieważ część drgań może być przenoszona przez konstrukcję huśtawki do gruntu i tam ulegać rozproszeniu.

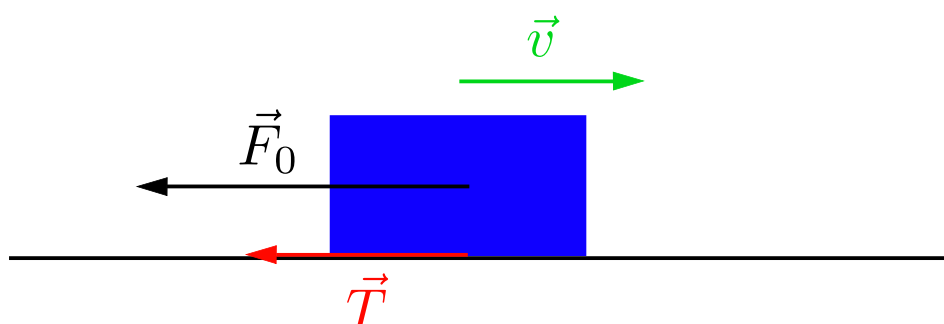
W zależności od układu możemy mówić o różnych siłach oporu. Amplituda drgań ciała zawieszonego na sprężynie zacznie gwałtownie maleć, jeśli całość zanurzymy w oleju (Rys. 1.). Amplituda drgań spławika będzie maleć o wiele szybciej, jeśli zanurzymy go w cieczy o wysokim współczynniku lepkości.



Rys. 1. Amplituda drgań ciała zawieszonego na sprężynie zacznie gwałtownie maleć, jeśli całość zanurzymy w oleju.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Cechą, która łączy wszystkie siły oporu, jest ich kierunek i zwrot. Mianowicie: takie siły mają kierunek zgodny z prędkością ciała i przeciwny zwrot (Rys. 2.). Kolejną wspólną cechą jest zależność tego typu sił od prędkości.



Rys. 2. Siły oporu (tarcie $\vec{T}$ i siła oporu powietrza $\vec{F}_0$), działające na poruszający się klocek mają zwrot przeciwny do wektora prędkości $\vec{v}$.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Zauważ, że spędzając wakacje nad morzem lub jeziorem, łatwiej jest powoli wejść do wody niż do niej wbiec. Woda stawia nam opór ([hydrodynamiczny](#)), utrudnia nam rozpędzenie

się, a im szybciej się poruszamy, tym bardziej czujemy go wpływ. Oznacza to, że zapisując równanie ruchu oscylatora z tłumieniem, np. zanurzonego w cieczy, musimy uwzględnić siłę oporu i jej zależność od prędkości.

Określenie postaci zależności siły tłumienia od prędkości jest zadaniem nietrywialnym, a na ogół najlepszą metodą jej określenia jest metoda empiryczna, czyli oparta o doświadczenie. Rozważmy najprostszą postać takiej zależności – zależność liniową. Wprowadźmy do równania dynamiki oscylatora siłę postaci $\vec{F}_o = -\gamma\vec{v}$ dla $\gamma > 0$. Wartość tej siły jest wprost proporcjonalna do wartości prędkości, a znak minus gwarantuje, że zwroty prędkości i siły oporu są przeciwne. Parametr γ mówi, jak silne jest tłumienie w układzie, np. jak gęsty (a właściwie: lepki) jest olej, w którym zanurzona jest sprężyna z ciężarkiem. Równanie opisujące dynamikę takiego układu przyjmie więc postać

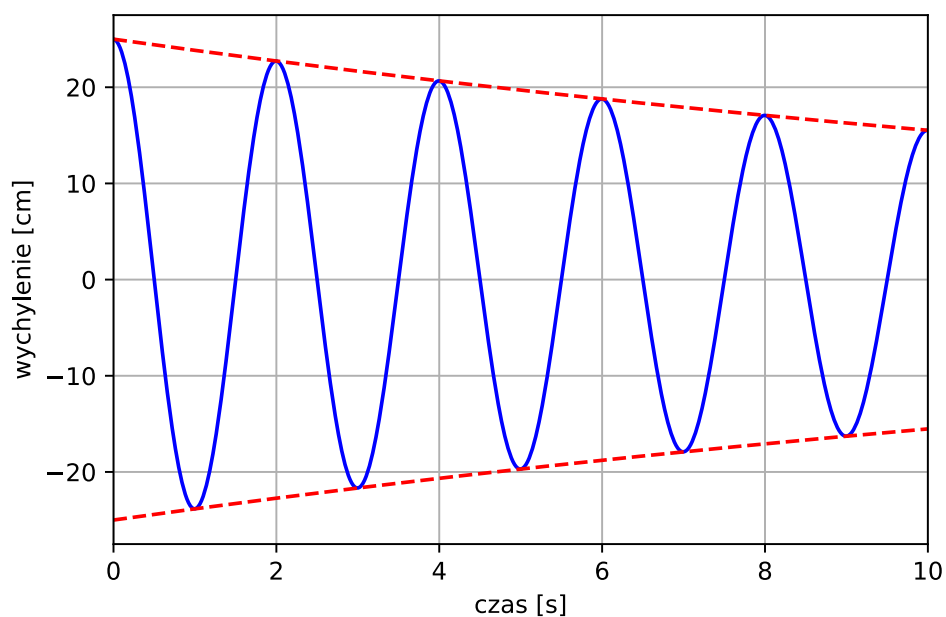
$$ma_x = -m\omega^2 x - \gamma v_x .$$

Jednym z parametrów opisujących tłumienie jest tzw. **dekrement tłumienia**. W obecności siły tłumienia każde kolejne maksimum wychylenia, czyli amplituda, ma mniejszą wartość niż poprzednie. Dekrement tłumienia δ to stosunek dwóch kolejnych maksimów wychylenia:

$$\delta = \frac{A_n}{A_{n+1}} .$$

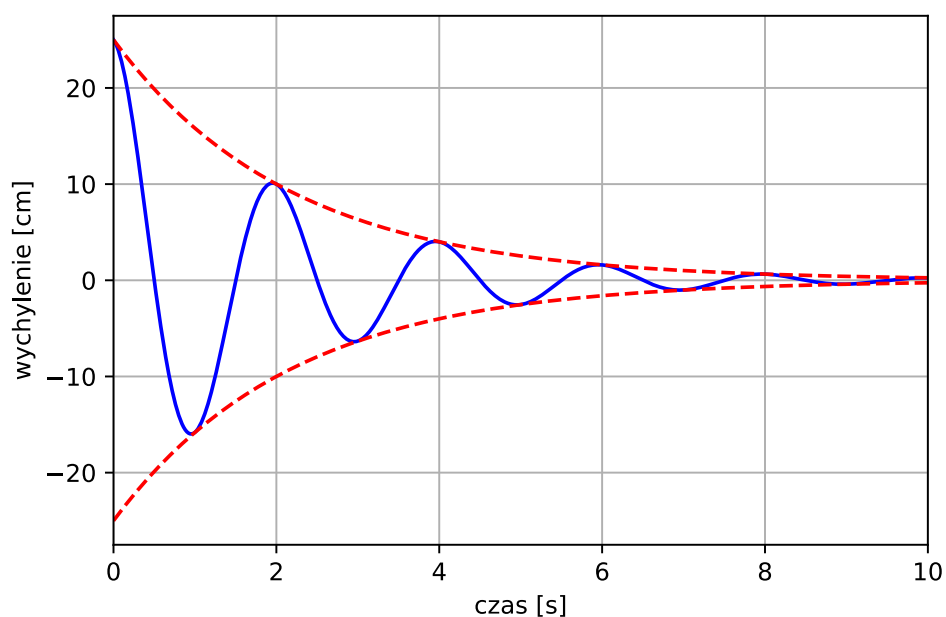
W ogólności zależy on od n , ale w dwóch szczególnych przypadkach – nie. Jeden z tych przypadków, $\delta \equiv 1$, to brak tłumienia. Drugi – właśnie opisywane tłumienie, którego siła jest proporcjonalna do prędkości ciała.

Porównaj poniższe rysunki. Oba przedstawiają położenie w funkcji czasu – rozwiązanie ostatniego równania ruchu oscylatora harmonicznego z tłumieniem. Na Rys. 3. z dekrementem tłumienia $\delta = 1, 1$, na Rys. 4. – z $\delta = 2, 5$. Przerywaną czerwoną linią zaznaczona jest **obwiednia**, dająca pewną orientacyjną informację o zależności amplitudy drgań od czasu (patrz wyjaśnienie i rysunek w haśle słowniczka).



Rys. 3. Drgania tłumione – zależność wychylenia od czasu; dekrement tłumienia 1,1.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



Rys. 4. Drgania tłumione - zależność wychylenia od czasu; dekrement tłumienia 2,5.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Tłumienie ma wpływ nie tylko na amplitudę drgań, lecz również na ich częstotliwość, rozumianą jako odstęp czasu między kolejnymi położeniami równowagi – ściśle rzecz biorąc, nie jest to przecież ruch okresowy. Według tej uproszczonej definicji, układ tłumiony drga z nową częstotliwością

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2},$$

gdzie $\alpha = \gamma/2m$. Widać więc, że istnieje ograniczenie na γ – powyżej pewnej wartości możemy mieć problem z obliczeniem powyższego pierwiastka. Tak jest w istocie –

charakter rozwiązań zmienia się i dla bardzo silnego tłumienia *de facto* ruch nie opisuje drgań, przejście przez punkt równowagi może być co najwyżej jedno. Jednak wpływ tłumienia na częstość nie jest tak spektakularny jak w przypadku amplitudy, co można zaobserwować porównując dwa powyższe wykresy.

Równanie opisujące drgania tłumione będzie więc miało ogólną postać:

$$x(t) = A(t) \sin(\omega' t + \varphi) .$$

gdzie $A(t)$ to funkcja opisująca zmniejszanie się amplitudy drgań w wyniku tłumienia. Wykres tej właśnie funkcji przedstawiony jest na powyższych rysunkach jako górna gałąź obwiedni wykresu $x(t)$.

Pozostaje więc jeszcze odpowiedzieć na ostatnie pytanie: co z energią? Zasada zachowania energii mówi, że całkowita energia nie może się zmienić, co najwyżej może zmieniać formę. Jeśli amplituda drgań tłumionych gaśnie, oznacza to, że z czasem maleje energia oscylatora. Energia ta jednak nie ginie. Tłumienie oscylatora wynika z jego oddziaływania z otoczeniem, zatem część energii oscylatora przekazywana jest do jego otoczenia w innej postaci. Np. sprężyna poruszająca się w oleju sprawia, że temperatura oleju rośnie. Podobnie: łożyska w huśtawce ogrzewają się w wyniku siły tarcia.

Słowniczek

Opór aero- i hydrodynamiczny

(*ang.: drag, air and liquid resistance*) część siły aero- lub hydrodynamicznej proporcjonalna do wartości prędkości ciała.

Opór lepki

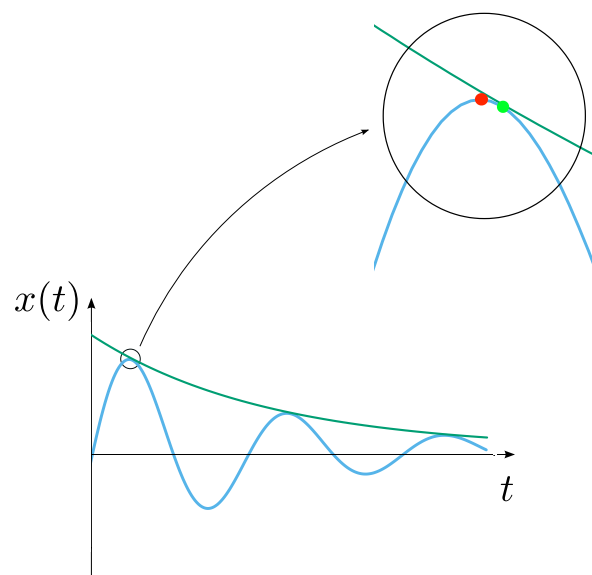
(*ang.: viscous drag*) siła wynikająca z istnienia tarcia wewnętrznego w płynie, proporcjonalna do prędkości poruszającego się w nim ciała.

Dekrement tłumienia

(*ang.: decrement*) stosunek dwóch kolejnych amplitud w układzie drgającym $\delta = \frac{A_n}{A_{n+1}}$.

Obwiednia

(*ang.: envelope*) krzywa, która w każdym swoim punkcie jest styczna do pewnego elementu rodziny krzywych.



Rys. 5. Wykres $x(t)$ drgań tłumionych (niebieska krzywa) wraz z obwiednią (zielona krzywa). Powiększenie wybranego fragmentu rysunku pokazuje, że punkt styczności (zielony) leży w pobliżu punktu odpowiadającego amplitudzie drgań (czerwony).

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Symulacja interaktywna

Tłumienie drgań

Symulacja interaktywna pozwala zbadać zjawisko tłumienia drgań. Umożliwia obserwację zachowania ciężarka zawieszonego na rozciągliwej nici oraz przebiegu wykresów wychyleń i prędkości przy różnych wartościach współczynnika opisującego tłumienie. Miarą tłumienia jest procentowy zanik amplitudy drgań po każdym okresie (p).

Zapoznaj się z symulacją, a następnie wykonaj polecenia.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Polecenie 1

Zacznij od obserwacji zależności położenia i prędkości od czasu dla drgania nietłumionego. Zwróć uwagę na stałość amplitudy drgania.

Włącz tłumienie i reguluj je. Zwróć uwagę na charakter spadku amplitudy drgań w miarę upływu czasu. Czy jest on jednostajny?

Wykorzystaj linie pomocnicze układu współrzędnych i zbadaj, czy stosunki kolejnych maksymalnych wychyleń są zgodne z nastawionym przez Ciebie „procentowym zanikiem amplitudy drgań po każdym okresie”. Oszacuj *czas połowicznego zaniku amplitudy*, czyli czas, po którym amplituda zmaleje mniej więcej do połowy początkowej swojej wartości.

Polecenie 2

W wersji zaawansowanej przeprowadź te same obserwacje, ale zinterpretuj je na wykresie pokazującym związek pomiędzy prędkością i wychYLENIEM. Na której osi widać bezpośrednio zanik amplitudy drgania?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ciężarek na sprężynie wykonuje drgania harmoniczne w ośrodku tłumiącym ruch. Uporządkuj ośrodki w kolejności od najmniej do najbardziej tłumiącego drgania.

powietrze



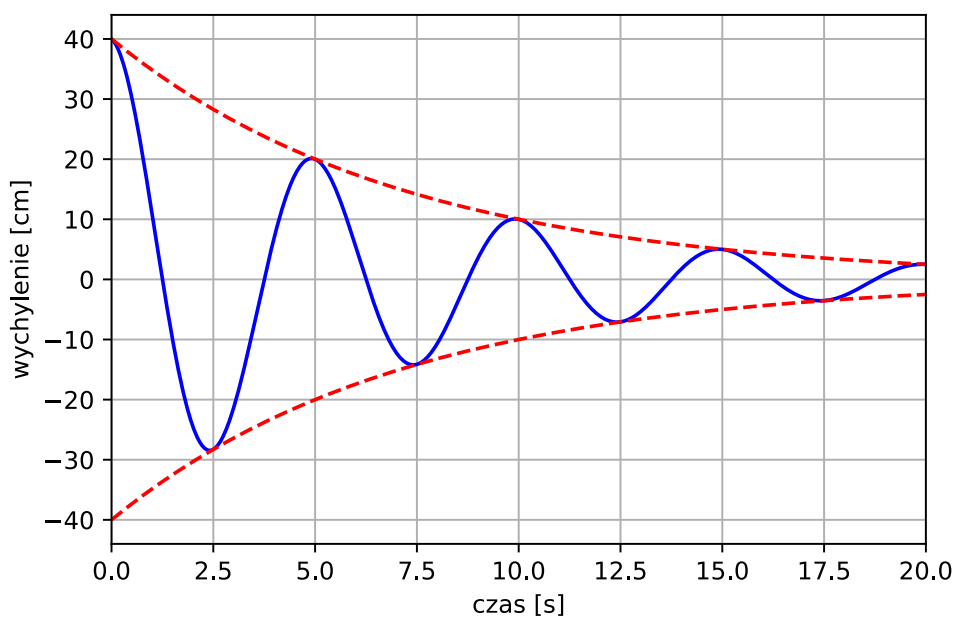
olej silnikowy



woda



Ćwiczenie 2



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Ile wynosi dekrement tłumienia drgań zobrazonych na wykresie?

Odpowiedź:

Ćwiczenie 3



Dekrement tłumienia drgań wynosi 2. Ile razy zmniejszy się amplituda drgań po trzykrotnym przejściu przez maksimum położenia?

Odp.

Ćwiczenie 4



Wraz ze wzrostem tłumienia drgań częstość drgań

☐ zmniejsza się

☐ nie ulega zmianie

☐ wzrasta

Ćwiczenie 5



Amplituda drgań zmniejsza się 9-krotnie w czasie przejścia przez trzy kolejne maksymalne położenia. Wyznacz dekrement tłumienia.

Odp.

Ćwiczenie 6



Zaznacz prawidłowe odpowiedzi.

Tłumienie w układzie wykonującym drgania harmoniczne powodują zmianę:

☐ energii drgań

☐ amplitudy drgań

☐ częstości drgań

Ćwiczenie 7



Wskaż odpowiedni element tekstu, aby otrzymać poprawne zdanie.

Siła tłumienia w oscylatorze harmonicznym jest zawsze skierowana przeciwnie do

wychylenia ☐ / prędkości ☐.

Ćwiczenie 8



Spadek amplitudy w drganiach tłumionych siłą proporcjonalną do prędkości opisuje liniowa funkcja czasu. Prawda czy fałsz?

Odp. ☐ prawda / ☐ fałsz.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Tomasz Gradowski
Przedmiot:	fizyka
Temat zajęć:	Drgania tłumione
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

**Podstawa
programowa:**

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.

II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.

Zakres podstawowy

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:

3) prowadzi obliczenia szacunkowe i poddaje analizie otrzymany wynik;

7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach.

IV. Drgania. Uczeń:

4) opisuje drgania wymuszone i drgania słabo tłumione; ilustruje zjawisko rezonansu mechanicznego na wybranych przykładach.

Zakres rozszerzony

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:

3) prowadzi obliczenia szacunkowe i poddaje analizie otrzymany wynik;

7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach;

11) opisuje przebieg doświadczenia lub pokazu; wyróżnia kluczowe kroki i sposób postępowania oraz wskazuje rolę użytych przyrządów i uwzględnia ich rozdzielczość.

V. Drgania. Uczeń:

7) opisuje drgania wymuszone i drgania słabo tłumione; ilustruje zjawisko rezonansu mechanicznego na wybranych przykładach.

Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: 1. wymieni rodzaje sił tłumiących drgania; 2. poda postać równania ruchu oscylatora harmonicznego z tłumieniem; 3. omówi definicję i sposób wyznaczenia dekrementu tłumienia; 4. przeanalizuje wykresy zależności wychylenia i prędkości od czasu drgań tłumionych; 5. zastosuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań.
Strategie nauczania:	IBSE
Metody nauczania:	pogadanka ilustrowana doświadczeniem wstępnym, symulacja interaktywna
Formy zajęć:	praca w parach, praca indywidualna
Środki dydaktyczne:	tablety dla uczniów, symulacja interaktywna "Tłumienie drgań", zestaw zadań
Materiały pomocnicze:	masa na sprężynie, naczynie z wodą, e-materiały: „Prawo Hooke’a”, „Przykłady ruchu harmonicznego”, „Co to jest ruch harmoniczny?”
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel razem z uczniami przypomina podstawowe pojęcia związane z dynamiką ruchu harmonicznego, takie jak: amplituda drgań, okres drgań, częstość kołowa, zasada zachowania energii.	
Faza realizacyjna:	

Nauczyciel, posługując się ciężarkiem na sprężynie i naczyniem z wodą, demonstruje tłumienie drgań w powietrzu i w wodzie.

Uczniowie opisują przebieg doświadczenia.

Nauczyciel prezentuje wykresy zależności położenia od czasu drgań tłumionych w ośrodkach o różnej gęstości i lepkości.

Uczniowie zapoznają się z symulacją interaktywną dotyczącą drgań tłumionych i wykonują połączone z nią polecenia.

Uczniowie rozwiązują w dwuosobowych zespołach zadania 1-4 z zestawu ćwiczeń. Nauczyciel pełni rolę doradcy, obserwuje i kontroluje pracę uczniów.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel dyskutuje z uczniami rozwiązania zadań. Analizując wypowiedzi uczniów, określa, w jakim stopniu osiągnięte zostały wyznaczone cele.

Praca domowa:

Uczniowie utrwalają wiedzę przez rozwiązanie w domu zadań 5-8 z zestawu ćwiczeń oraz powtórne przeanalizowanie symulacji interaktywnej.

**Wskazówki
metodyczne
opisujące różne
zastosowania danego
multimedium**

Symulacja interaktywna "Drgania tłumione" może być też samodzielnie wykorzystana przez uczniów przed lekcją lub po lekcji do powtórzenia i utrwalenia wiadomości.