Odległość punktów w układzie współrzędnych

Odległość punktów w układzie współrzędnych

Źródło: TP Heinz, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Potrafisz już obliczać odległość między punktami położonymi na osi liczbowej. W tej lekcji omówimy szczegółowo zagadnienie odległości punktów na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych.

> **Twoje cele**
>
> - Zastosujesz wzór na odległość między dwoma punktami w prostokątnym układzie współrzędnych.
> - Wyznaczysz długość łamanej o danych wierzchołkach.
> - Wyznaczysz punkt na prostej położony najbliżej danego punktu.

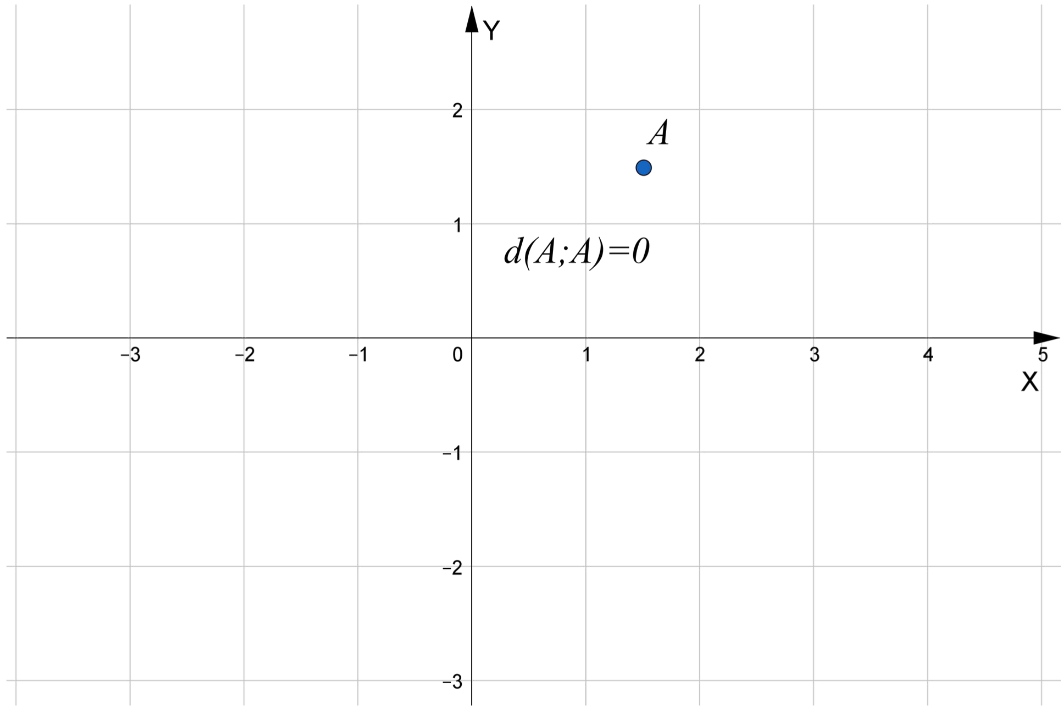
Przeczytaj

Przypomnijmy, czym jest odległość.

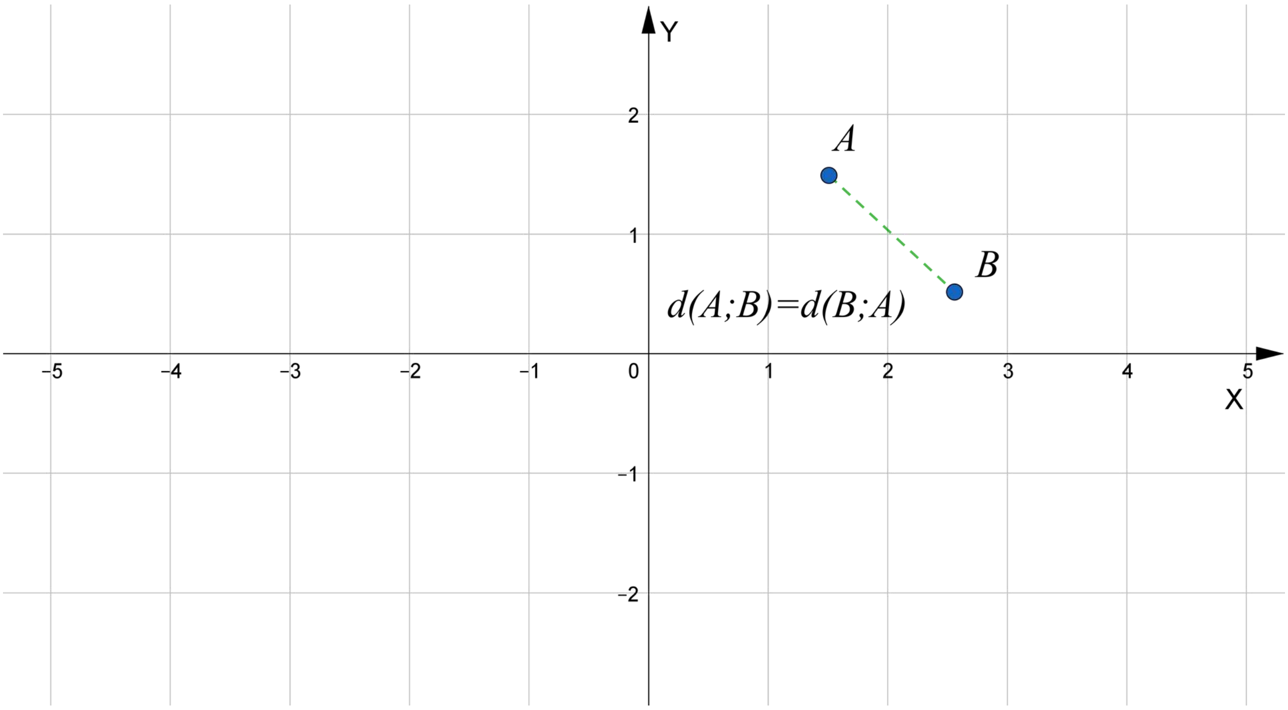
Definicja: Odległość

to taka funkcja d, która parom punktów przyporządkowuje pewną liczbę. Funkcja d spełnia następujące warunki:

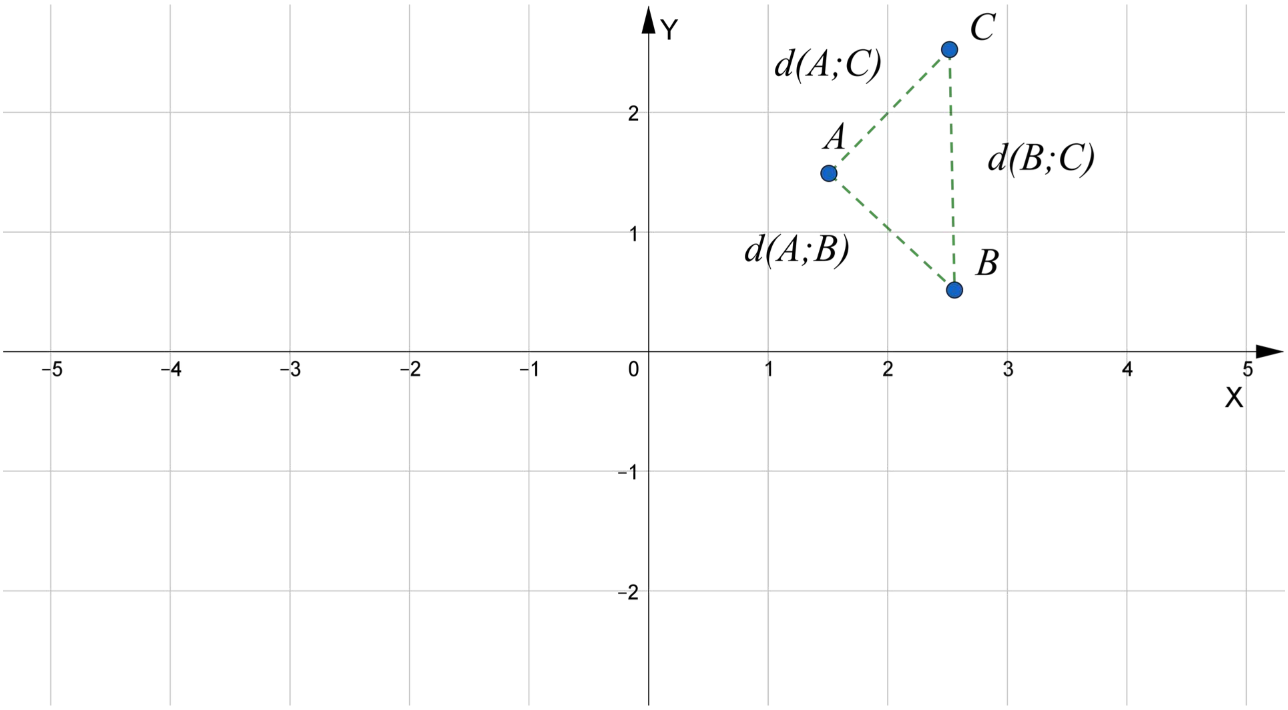
1. odległość dowolnego punktu A od siebie samego jest równa zeru, czyli $d(A; A) = 0$,



2. odległość dowolnego punktu A od dowolnego punktu B jest równa odległości punktu B od punktu A, czyli $d(A; B) = d(B; A)$,



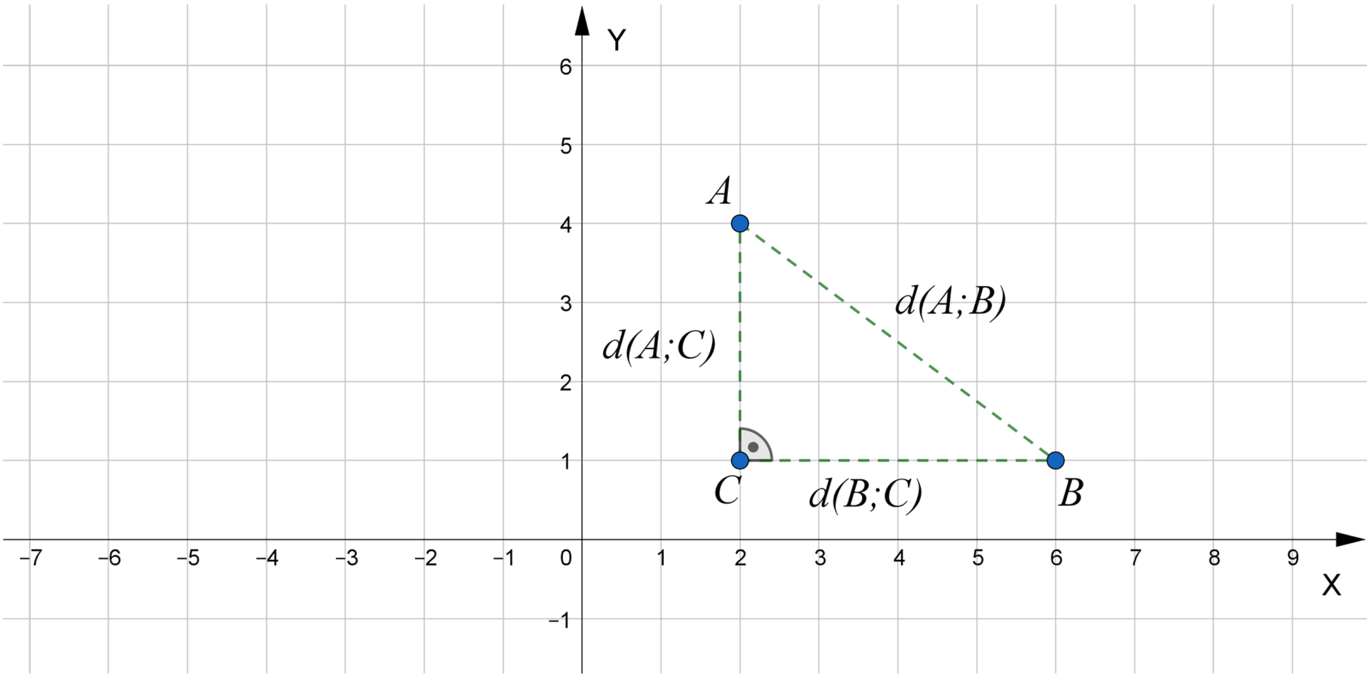
3. suma odległości dowolnego punktu A od dowolnego punktu B oraz odległości punktu B od dowolnego punktu C jest większa lub równa odległości punktu A od punktu C, czyli $d(A;B) + d(B;C) \geq d(A;C)$.



Przypomnijmy ponadto, że odległość między punktami A i B to długość najkrótszej drogi od A do B. W przypadku płaszczyzny euklidesowej najkrótszą drogą między punktami jest odcinek.

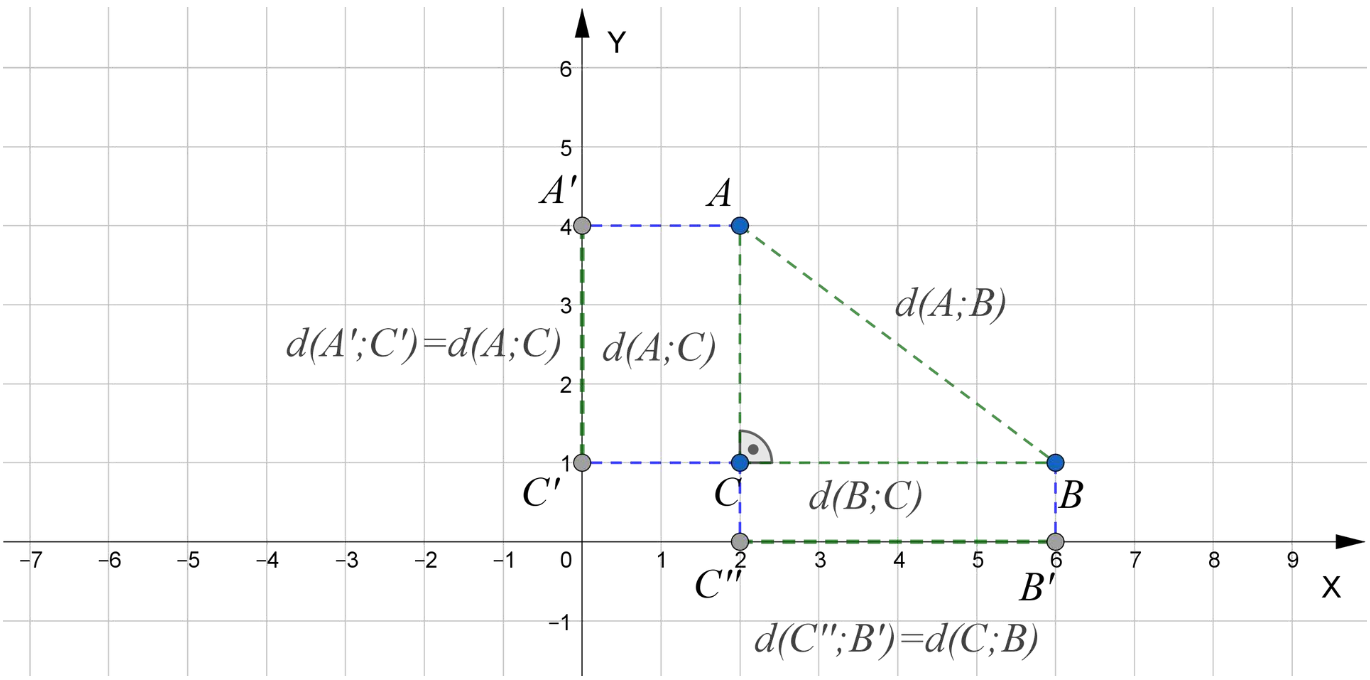
Odległość punktów A i B w układzie współrzędnych możemy zatem obliczyć jako długość odcinka AB korzystając z twierdzenia Pitagorasa. Zauważmy, że jeśli $A = (x_A, y_A)$,

$B = (x_B, y_B)$ nie leżą na prostej równoległej do żadnej z osi układu, to dla punktu $C = (x_A, y_B)$ trójkąt ABC jest prostokątny.



$$[d(A;C)]^2 + [d(B;C)]^2 = [d(A;B)]^2$$

$$d(A;B) = \sqrt{[d(A;C)]^2 + [d(B;C)]^2}$$



Jeśli zrzutujemy prostopadle punkty A i C na oś Y, zaś punkty B i C na oś X, to otrzymamy odpowiednio punkty $A^{'} = (0, y_A)$, $C^{'} = (0, y_B)$ na osi Y oraz punkty $B^{'} = (x_B, 0)$, $C^{''} = (x_A, 0)$ na osi X. Ponadto odległość między punktami A i C jest równa odległości między punktami A' i C', zaś odległość między punktami B i C jest równa odległości między punktami B' i C'.

Z określenia odległości punktów na osi wynika, że $d(A;C) = d\left(A^{'};C^{'}\right) = |y_A - y_B|$ oraz $d(B;C) = d\left(B^{'};C^{''}\right) = |x_B - x_A|$.

Podsumowując powyższe rozważania możemy zapisać wzór na odległość punktów $A = (x_A; y_A)$, $B = (x_B; y_B)$ w układzie współrzędnych $d(A;B) = \sqrt{|x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, który jest prawdziwy dla dowolnie wybranych punktów A i B.

Oczywiście jest to ten sam wzór, który uzyskaliśmy wyznaczając długość odcinka o podanych końcach, jedynie jego interpretacja jest nieco inna.

Przykład 1

Dane są punkty $A = (-1;7)$, $B = (-1;-2)$, $C = (4;-2)$. Wyznaczymy kolejno odległości między nimi:

$$d(A;B) = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (7-(-2))^2} = \sqrt{0^2 + 9^2} = 9$$

$$d(B;C) = \sqrt{(-1-4)^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

$$d(A;C) = \sqrt{(-1-4)^2 + (7-(-2))^2} = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

Zanim podamy kolejny przykład, wprowadzimy nowe pojęcie.

Linia łamana - linia utworzona z ciągu odcinków w taki sposób, że:

- żadne dwa sąsiednie odcinki nie leżą na jednej prostej;
- punkt będący końcem pierwszego odcinka jest jednocześnie początkiem drugiego, punkt będący końcem drugiego odcinka jest początkiem trzeciego, itd.

Przykład 2

Dane są punkty $A = (-8;4)$, $B = (-5;1)$, $C = (1;1)$, $D = (3;-3)$. Aby obliczyć długość krzywej $ABCD$ wystarczy dodać odległości między kolejnymi końcami odcinków tworzących tę łamaną:

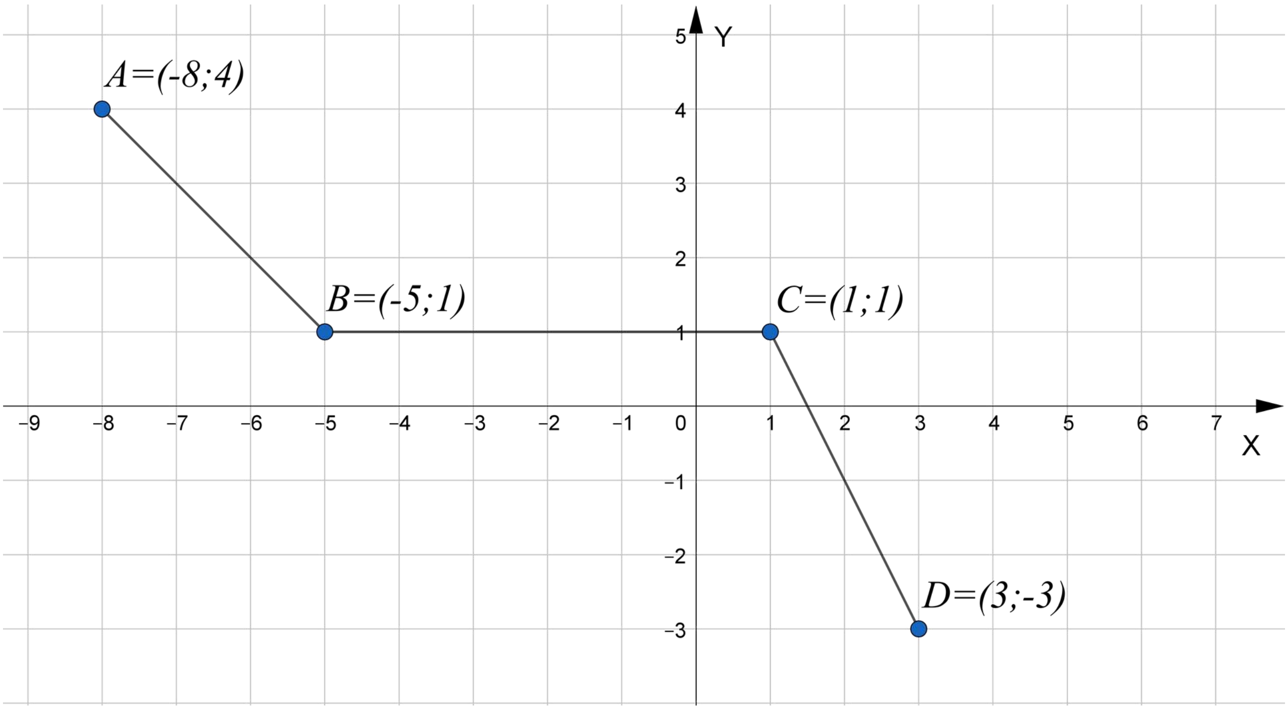
$$d(A;B) + d(B;C) + d(C;D) =$$

$$= \sqrt{(-8-(-5))^2 + (4-1)^2} + \sqrt{(-5-1)^2 + (1-1)^2} +$$

$$+ \sqrt{(1-3)^2 + (1-(-3))^2} =$$

$= \sqrt{9+9} + \sqrt{36+0} + \sqrt{4+16} = \sqrt{18} + \sqrt{36} + \sqrt{20} =$

$= 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{5}$



Słownik

łamana

krzywa zbudowana z odcinków w taki sposób, że żadne dwa kolejne odcinki nie leżą na jednej prostej oraz koniec jednego odcinka jest jednocześnie początkiem następnego

odległość punktów w układzie współrzędnych

odległość punktów $A = (x_A; y_A), B = (x_B; y_B)$ wyraża się wzorem
$d(A; B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj zawartość poniższej animacji i na jej podstawie rozwiąż zadanie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D11tjWWiH

Film nawiązujący do treści lekcji o odległości punktów w układzie współrzędnych.

Polecenie 2

Rozwiąż test. Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi.

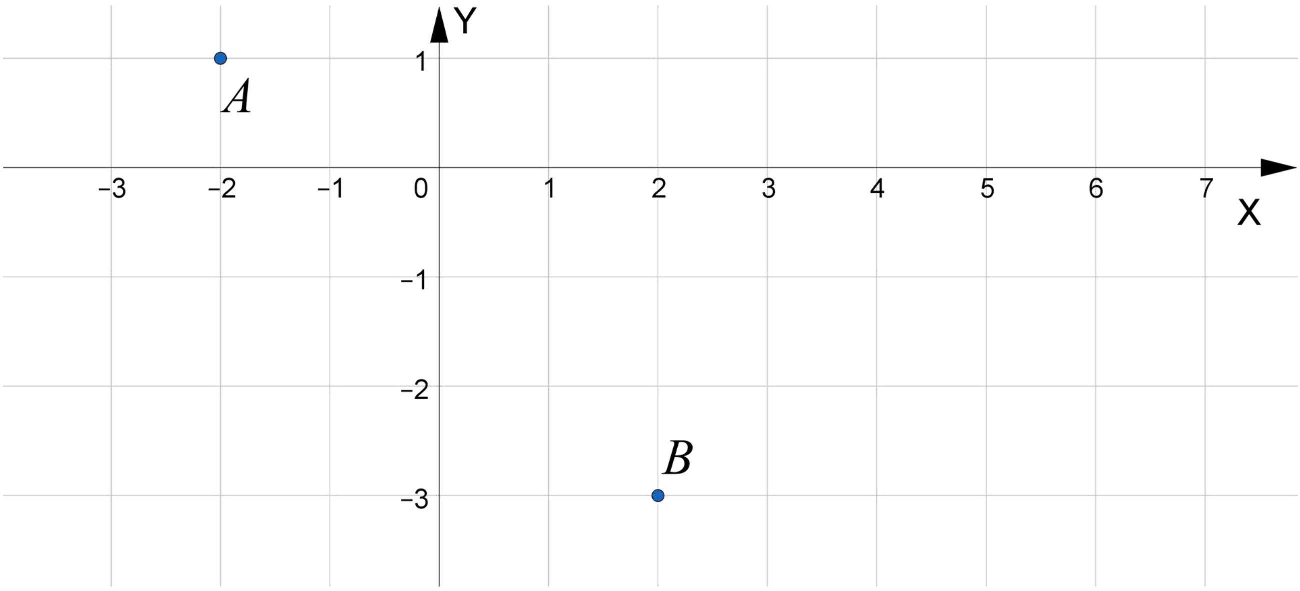
Odległość między punktami $A=(2;3)$, $B=(-1;-1)$ jest równa:	Odległość między punktami $A=(-5;3)$, $B=(4;3)$ jest równa:	Długość łamanej $ABCD$, dla punktów $A=(-2;-1)$, $B=(1;2)$ jest równa:	Odległość punktu X leżącego na prostej o równaniu $y=-x$, jest najmniejsza dla X o współrzędnych:	Punkt X leży na prostej o równaniu $y=2x-2$ jest najmniejsza z możliwych. Odległość między punktami A i X jest równa:
$\sqrt{5}$ ☐	9 ☐	$\sqrt{18}+\sqrt{20}+2$ ☐	$(-2;2)$ ☐	3 ☐
5 ☐	1 ☐	$2\sqrt{3}+5\sqrt{2}+2$ ☐	$(-1;1)$ ☐	$2,5$ ☐
25 ☐	$\sqrt{9}$ ☐	$3\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2$ ☐	$(-3;3)$ ☐	$\sqrt{5}$ ☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wiadomo, że punkty A i B mają współrzędne całkowite. Jaka jest odległość między punktami przedstawionymi na poniższym rysunku?



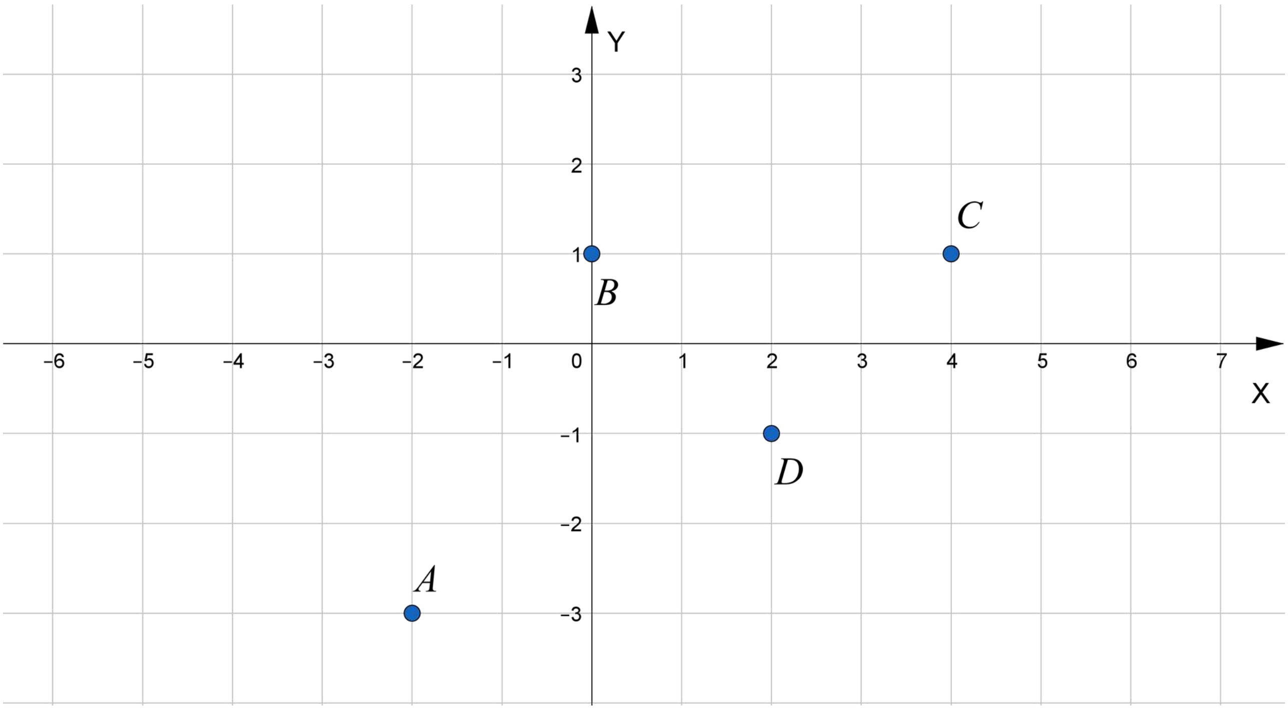
Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Na rysunku zaznaczone są punkty A, B, C, D. Połącz w pary nazwy łamanych i ich długości.



Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Uporządkuj poniższe wypowiedzi tak, aby otrzymać rozwiązanie następującego zadania.

Na prostej o równaniu $y = \frac{3}{2}x + 1$ wyznacz punkt, który leży najbliżej punktu $A = (2; 1)$.

Ćwiczenie 8

Wyznacz współrzędne punktu X, który leży na prostej o równaniu $y = \frac{2}{1}x - 1$ i jego odległość od punktu $A = (2; 1)$ jest najmniejsza z możliwych.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Odległość punktów w układzie współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Zastosujesz wzór na odległość między dwoma punktami w prostokątnym układzie współrzędnych.
- Wyznaczysz długość łamanej o danych wierzchołkach.
- Wyznaczysz punkt na prostej położony najbliżej danego punktu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Odległość punktów w układzie współrzędnych” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
3. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

Materiały pomocnicze:

- Odległość punktów na osi liczbowej

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Odległość punktów w układzie współrzędnych”.