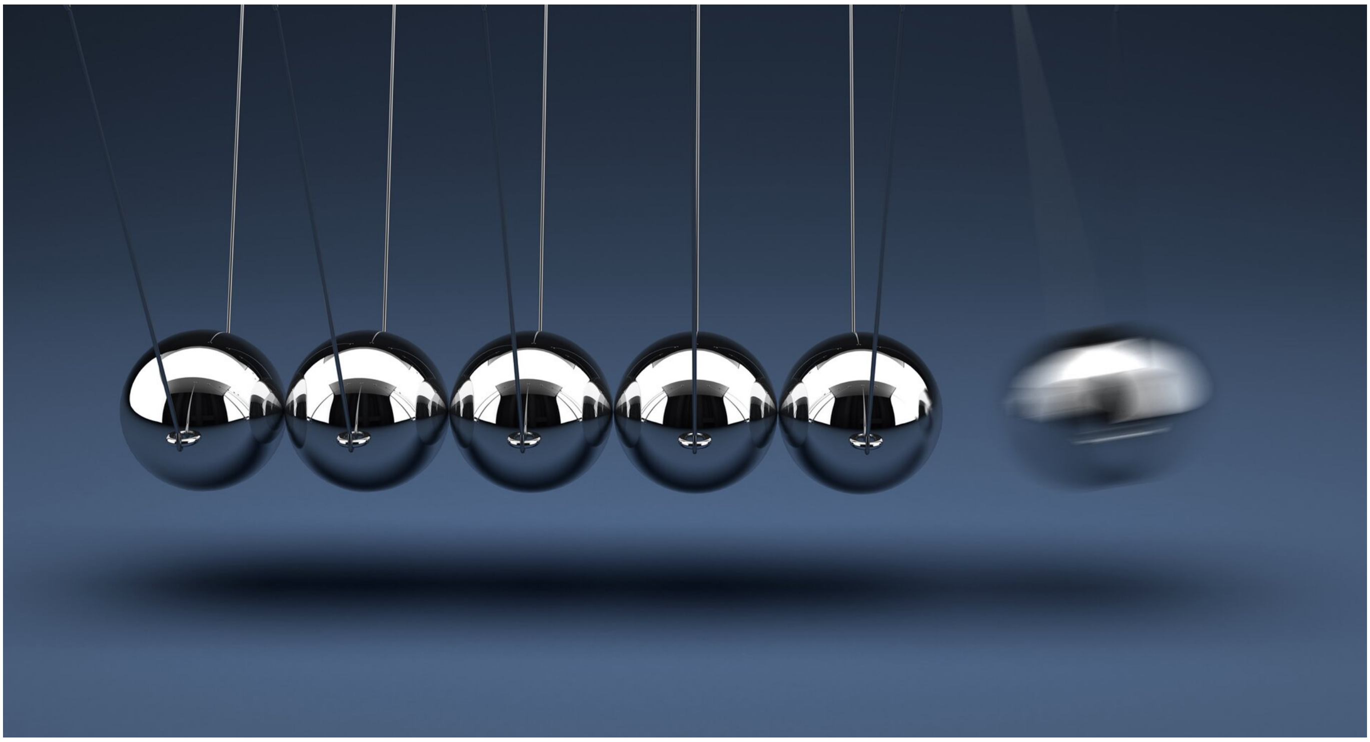
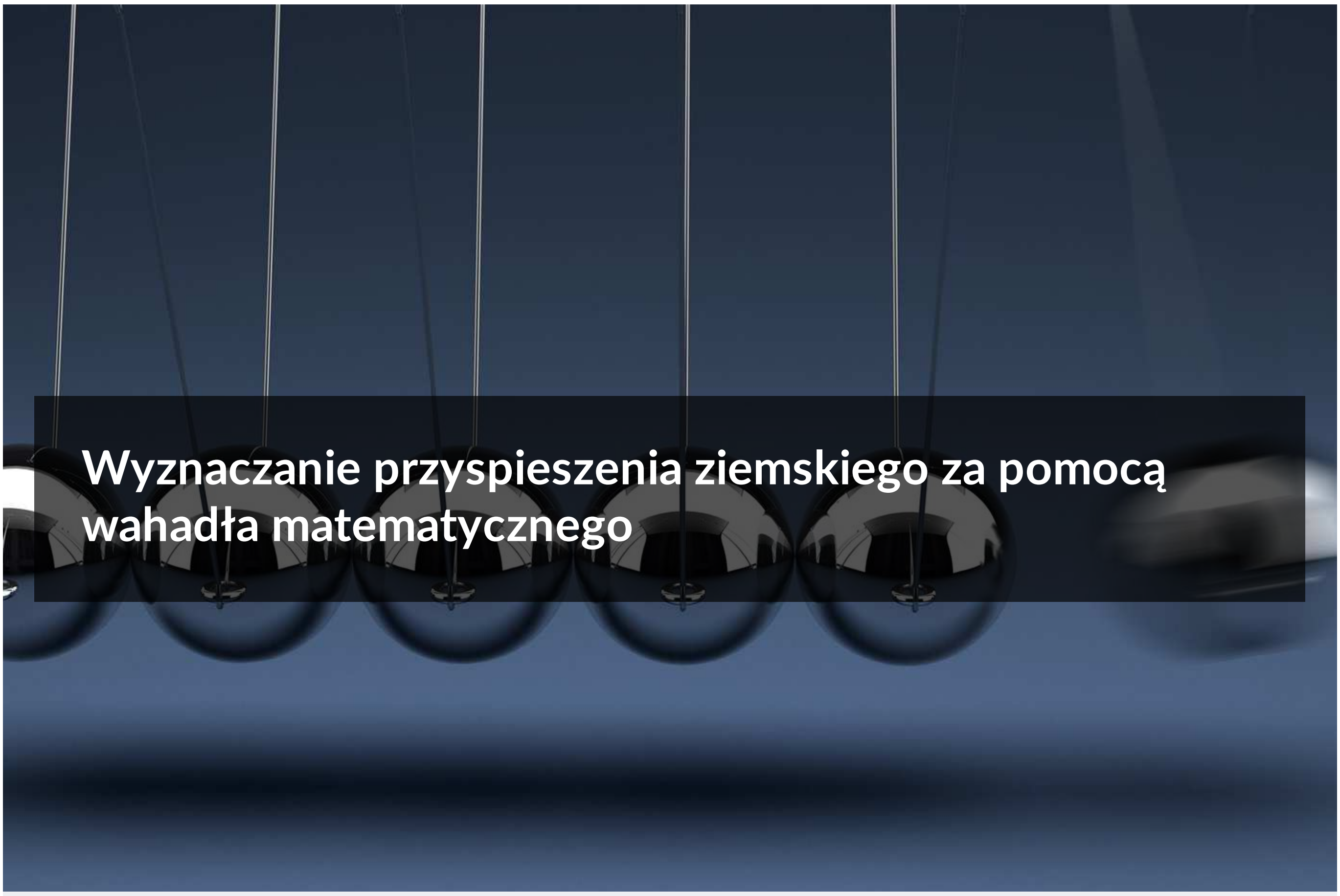


Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego

Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego



Źródło: dostępny w internecie: https://www.istockphoto.com/pl/zdj%C4%99cie/ko%C5%82yska-newtona-gm465044128-59504348 [dostęp 11.03.2022].

Czy to nie ciekawe ?

Grawimetr to urządzenie służące do pomiaru przyspieszenia grawitacyjnego. Dokładny pomiar przyspieszenia grawitacyjnego potrzebny jest np. w geodezji, sejsmologii, a także przy badaniach gruntu i poszukiwaniu złóż mineralnych. Jak zmierzyć przyspieszenie ziemskie? Metod jest wiele, ale od XVI wieku do lat czterdziestych XX wieku podstawowym przyrządem używanym do tego celu było wahadło.

W tym e-materiale poznasz jedną z metod pomiaru przyspieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła matematycznego.

Rys. a. Grawimetr.

Źródło: Sandeep vats, dostępny w internecie: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Autograv_CG5_P1150838.JPG [dostęp 16.04.2023], licencja: CC BY-SA 3.0.

Twoje cele

- wykonasz wykresy obrazujące zależność okresu wahadła matematycznego od jego długości i przyspieszenia grawitacyjnego,
- wykonasz doświadczenie w wirtualnym laboratorium, w którym zmierzysz przyspieszenie ziemskie za pomocą wahadła,
- rozwiążesz zadania dotyczące wahadła matematycznego.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Zależność między długością wahadła i okresem jego drgań

Wahadło matematyczne jest to ciężarek o małych rozmiarach zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici w jednorodnym polu grawitacyjnym, który może się poruszać w pionowej płaszczyźnie, bez oporów ruchu. Teoretycznie w wahadle matematycznym ciężarek powinien być masą punktową, czyli powinien być nieskończenie mały. W praktyce wystarczy, żeby jego rozmiar był dużo mniejszy niż długość linki.

Okres drgań wahadła matematycznego można obliczyć ze wzoru:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ , \tag{1}$$

gdzie l jest długością wahadła, zaś g jest wartością przyspieszenia grawitacyjnego. Należy pamiętać, że powyższy wzór daje wyniki tym bardziej precyzyjne, im amplituda drgań wahadła jest mniejsza wobec długości wahadła. W praktyce warunek ten oznacza, że wychylenie wahadła od pionu powinno być możliwie niewielkie.

Ze wzoru tego wynika, że wydłużanie wahadła powoduje zwiększanie się okresu jego drgań. Z kolei, im większe przyspieszenie grawitacyjne, tym mniejszy jest okres. Czterokrotny wzrost długości wahadła powoduje podwojenie okresu, zaś jeśli przyspieszenie grawitacyjne stanie się cztery razy większe, okres powinien zmaleć dwukrotnie.

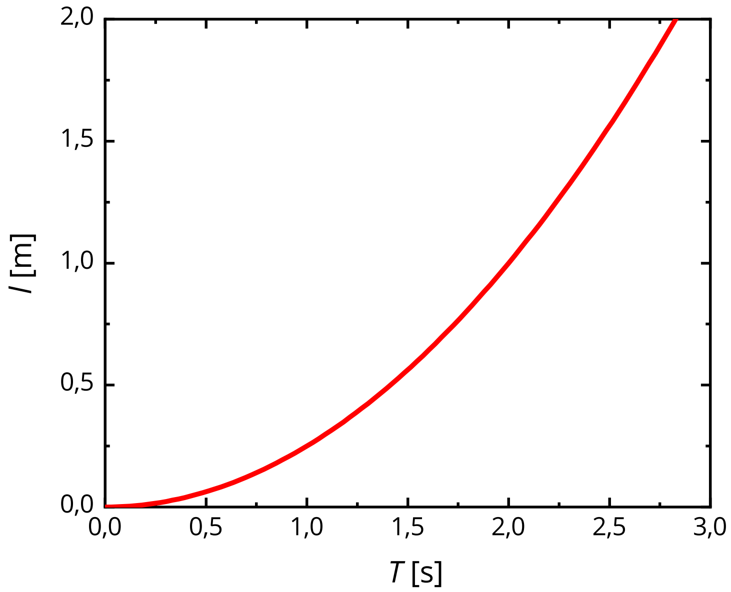
Doświadczalne badanie tego związku jest opisane w e-materiale „*Czy okres drgań wahadła matematycznego jest zależny od długości wahadła?*”.

Wyznaczanie wartości przyspieszenia ziemskiego

Spróbujmy teraz zobrazować tę zależność na wykresach oraz zrozumieć, jak z tych wykresów można odczytać wartość przyspieszenia ziemskiego. Przekształćmy wyrażenie (1) tak, by otrzymać funkcję długości wahadła l od okresu T, czyli $l(T)$.

$$T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g} \implies l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}\ .$$

Gdybyśmy więc wykonali wykres długości wahadła od okresu, $l(T)$, otrzymalibyśmy ramię paraboli mającej wierzchołek w początku układu współrzędnych. Jest tak, ponieważ powyższy wzór ma taką samą postać jak funkcja $y = ax^2$. Rolę wartości y pełni długość wahadła l, a rolę argumentu x pełni okres T. Z kolei czynnik przy T^2 jest stałą, tzn. nie zależy od okresu. Fizyczny sens mają tylko dodatnie okresy, stąd wykres zawiera tylko jedno ramię paraboli. Jest to przedstawione na Rys. 1.



Rys. 1. Związek pomiędzy długością wahadła matematycznego a okresem jego drgań.
Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl.

Im większa jest wartość stałej g, tym większa będzie wartość współczynnika przy T^2. To spowoduje podobny efekt, jak zwiększenie współczynnika a w funkcji $y = ax^2$. Funkcja będzie przyjmować większe wartości dla dowolnego, ustalonego argumentu i dlatego ramię paraboli będzie bardziej strome.

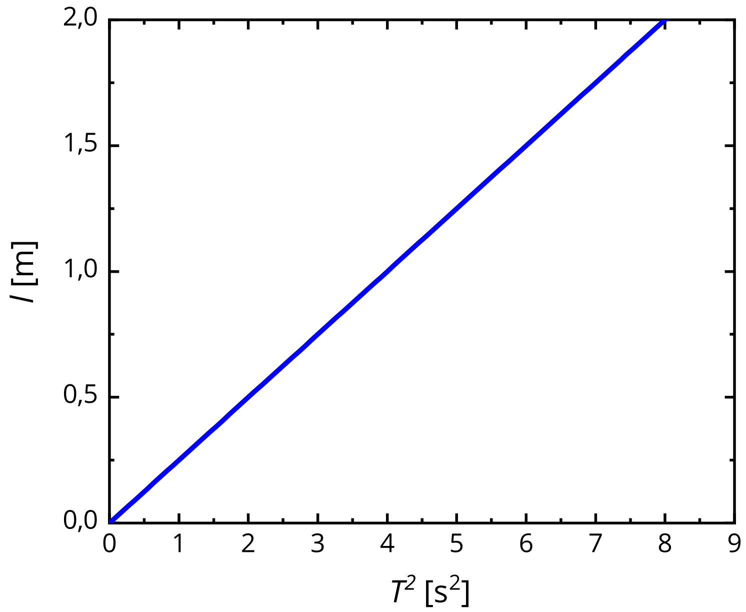
Zmienna zależna i zmienna niezależna

Możesz teraz czuć dyskomfort z tego powodu, że robimy wykres $l(T)$, nie zaś $T(l)$. Przecież to długość wahadła l możemy bezpośrednio modyfikować, jest ona więc *zmienną niezależną*. Na okres T nie mamy bezpośredniego wypływu, bo zależy on od długości wahadła. Jest on więc *zmienną zależną*. To jest oczywiście prawda i pierwsza myśl powinna pójść ku użyciu wykresu $T(l)$. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, żeby do analizy wyników pomiarów wykorzystać wykres $l(T)$. Zauważysz zapewne, że usprawni to nieco interpretację oraz obliczenia.

Przekształcenie związku do funkcji liniowej

Podczas analizy danych pomiarowych najwygodniej jest pracować z funkcją liniową, a tutaj mamy do czynienia z funkcją kwadratową. Czy zależność $l(T)$ można w jakiś sposób zamienić na liniową? Będziemy wtedy mogli używać metod, które znamy z analizy zależności liniowych. Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, a ogólne zasady postępowania opisane są w e-materiale „*Na ile dokładnie można dopasować prostą do wyników pomiarów?*".

Wystarczy wykonać wykres $l(T^2)$. Chociaż zmienna l zależy od zmiennej T kwadratowo, to jej zależność od zmiennej T^2 jest liniowa. Inaczej mówiąc, gdybyśmy wprowadzili nową zmienną $x = T^2$, wówczas dostalibyśmy $l(x) = \dfrac{g}{4\pi^2}x$. Zatem nowa funkcja $l(x)$ jest funkcją liniową przechodzącą przez początek układu współrzędnych, a jej współczynnik kierunkowy wynosi $a = \frac{g}{4\pi^2}$. Wykres długości wahadła od kwadratu okresu jest przedstawiony na Rys. 2.



Rys.2. Wykres zależności długości wahadła od kwadratu okresu jego drgań.

Zwróć uwagę, że w warunkach ziemskich współczynnik kierunkowy a tej prostej ma wartość

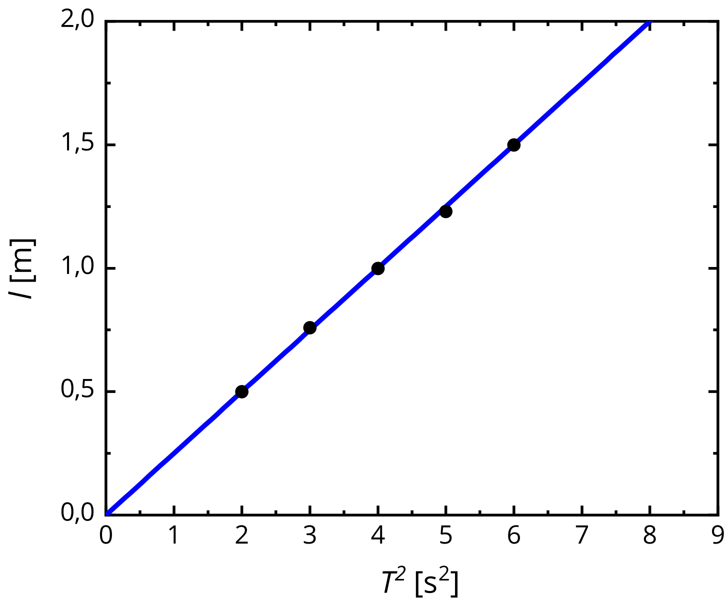
$$a = \frac{g}{4\pi^2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{4 \cdot (3{,}14)^2} \approx 0{,}25\ \ \mathrm{m/s^2}\ ..$$

Wynika stąd, że gdybyśmy chcieli podobny wykres wykonać dla innej planety, na której wartość przyspieszenia grawitacyjnego byłaby mniejsza od wartości na Ziemi (np. na Marsie wynosi ono $3,70\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, czyli stanowi około 0,38 przyspieszenia ziemskiego), wtedy prosta przedstawiona na Rys. 2. miałaby odpowiednio mniejsze nachylenie.

W jaki sposób doświadczalnie wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego?

Korzystając z powyższych informacji, możemy wykonać następujące doświadczenie:

1. Przywiązujemy do ciężarka linkę i zawieszamy stworzone w ten sposób wahadło na statywie.
2. Linijką mierzymy długość wahadła l i wprawiamy wahadło w drgania.
3. Stoperem mierzymy czas dziesięciu drgań i dzieląc ten czas przez 10, otrzymujemy okres T.
4. Następnie zmieniamy długość linki i powtarzamy pomiar.
5. Tym sposobem mierzymy okres dla kilku długości linki i wyniki notujemy w tabeli. Dla każdej wartości okresu T obliczamy wartość T^2.
6. Po zakończeniu obliczeń nanosimy punkty pomiarowe na wykres $l(T^2)$. Powinny się one ułożyć wzdłuż prostej.
7. Rysujemy prostą w taki sposób, by przechodziła przez punkt (0.0) i przebiegała możliwie blisko wszystkich punktów pomiarowych. Następnie odczytujemy jej współczynnik kierunkowy a (Rys. 3.). By uzyskać wartość przyspieszenia ziemskiego g wystarczy tylko pomnożyć ten współczynnik przez $4\pi^2$.



Rys.3. Zależność długości wahadła od kwadratu jego okresu z zaznaczonymi punktami pomiarowymi. Niebieska linia reprezentuje prostą będącą "najlepszym dopasowaniem" do punktów pomiarowych. Z nachylenia tej prostej można wyznaczyć wartość przyspieszenia grawitacyjnego.

Jak opisać maksymalne dopuszczalne odchylenie wyniku?

Opisane powyżej postępowanie jest poprawne, ale zauważ, że wyznaczona wartość g_d może się różnić od jej wartości rzeczywistej g (w dalszej części tego tekstu, dla odróżnienia rzeczywistej wartości przyspieszenia ziemskiego i wartości tego parametru uzyskanej w wyniku pomiarów, tę drugą wartość będziemy oznaczać dolnym indeksem d - jak „doświadczenie”). Podczas pomiarów różnych wielkości fizycznych takie różnice są nieuniknione i zrozumiałe. Co w takiej sytuacji można zrobić? Oprócz podania wyniku pomiaru:

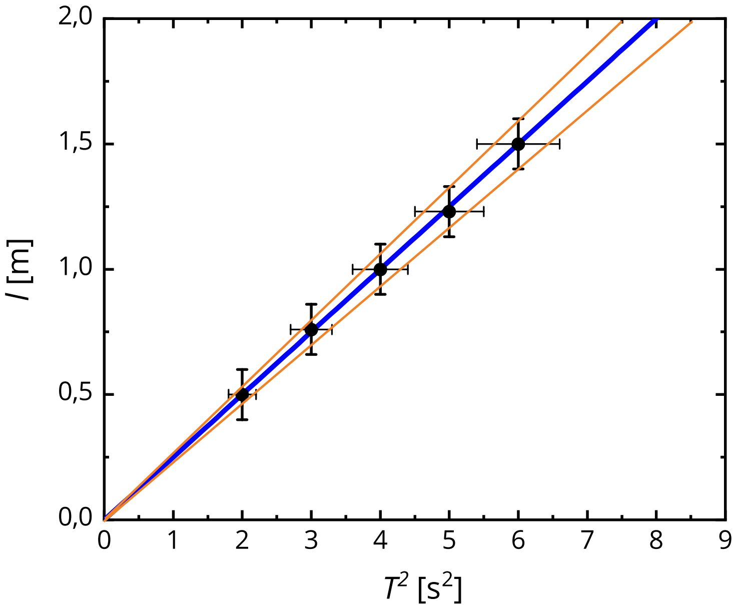
$$g \approx g_d$$

można jeszcze oszacować przedział, w którym rzeczywista wartość znajduje się „na pewno”:

$$g \in (g_{\min}, g_{\max}),$$

nawet przy uwzględnieniu najmniej korzystnego zbiegu okoliczności.

W analizowanym przypadku postępowanie takie sprowadza się do tego, że podczas wyznaczania wartości g powinniśmy uwzględnić niepewności pomiarowe tych wielkości, które zostały przez nas zmierzone bezpośrednio. Z tego powodu, przy każdym z punktów pomiarowych, należy na wykresie dorysować odpowiednie odcinki niepewności, w taki sposób, jak zrobiono to na Rys. 4.



Rys.3. Zależność długości wahadła od kwadratu jego okresu z zaznaczonymi punktami pomiarowymi i ich odcinkami niepewności. Znaczenie linii przedstawionych na wykresie opisano w tekście.

Gdy teraz porównamy Rys. 3. i Rys. 4., zauważymy, że dodanie odcinków niepewności zmieniło nieco sytuację: istnieje wiele prostych, o różnych nachyleniach, które można narysować w taki sposób, by przebiegały w pobliżu punktów pomiarowych, przecinając ich wszystkie (!) odcinki niepewności, i równocześnie przechodziły przez początek (!) układu współrzędnych. Na Rys. 4. zaznaczono kilka takich prostych. Kolorem niebieskim zaznaczono tę samą prostą, która widnieje na Rys. 3. Ta prosta zdaje się być tzw. „najlepszym dopasowaniem” do punktów pomiarowych. Kolorem czerwonym zaznaczono natomiast proste „graniczne”, które pomagają oszacować wspomniany przedział $(g_{\min}, g_{\max})$. Zauważ, że prostych o nachyleniu wykraczającym poza zakres wyznaczony przez czerwone linie nie należy uwzględniać podczas określania granic tego przedziału, ponieważ są one zbyt odległe od punktów pomiarowych (nie przecinają wszystkich odcinków niepewności).

Spróbujemy teraz opisać powyższe rozważania w sposób ilościowy. Jeśli nachylenia przedstawionych na wykresie (Rys. 4.) prostych będą odpowiednio równe:

- niebieskiej prostej: a_d,
- dolnej, czewrwonej prostej: $a_{\min}$,
- górnej, zielonej prostej: $a_{\max}$,

to podstawiając ich wartości do wzoru $g = 4\pi^2 a$, będziemy mogli wyznaczyć odpowiadające im wartości przyspieszeń: g_d, $g_{\min}$ i $g_{\max}$. Z analizy dopuszczalnych nachyleń wynika, że rzeczywista wartość g jest bliska wartości, która została wyznaczona doświadczalnie

$$g \approx g_d,$$

i z dużym prawdopdobieństwem należy ona do przedziału $(g_{\min}, g_{\max})$

Słowniczek

grawimetr

(ang. *gravimeter*) – urządzenie służące do pomiaru przyspieszenia grawitacyjnego.

okres drgań

(ang. *period of oscillation*) – czas trwania jednego pełnego drgania.

wahadło matematyczne

(ang. *simple pendulum*) – wahadło, które składa się z nieważkiej i nierozciągliwej linki, na której wisi ciężarek będący masą punktową.

Wirtualne laboratorium WL-I

Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego

W dołączonym do tego e-materiału wirtualnym laboratorium możesz wykonać pomiary, dzięki którym samodzielnie wyznaczysz wartość ziemskiego przyspieszenia grawitacyjnego g. Wykorzystasz przy tym odpowiednio przekształcone wyrażenie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ . \tag{1}$$

W tym celu, dla kilku różnych długości wahadła l, zmierzysz czas trwania jednego okresu drgań T. Uzyskane wyniki przedstawisz w postaci wykresu, na którego osi odciętych odłożysz kwadrat zmierzonego okres, zaś na osi rzędnych długość wahadła. Pomiary powinny ułożyć się w pobliżu linii prostej będącej wykresem funkcji:

$$l(T^2) = \frac{g}{4\pi^2}T^2.$$

Analiza wyników rzeczywistego doświadczenia

Zanim rozpoczniesz pracę w Wirtualnym laboratorium, obejrzyj film nagrany podczas pomiarów w pracowni fizycznej. Podczas tego filmu nauczyciel fizyki wykonuje pomiary czasu trwania jednego okresu drgań dla różnych długości wahadła.

Pomiary są wykonywane przy pomocy specjalnie przygotowanego zestawu pomiarowego. Pozwala on regulować długość wahadła. Zawiera także odpowiednik fotokomórki, która reaguje na kolejne przejścia nici przez położenie równowagi. Pomiar T jest automatyczne uruchamiany, a następnie zatrzymywany. Dzięki temu niepewność pomiaru okresu, $u(T)$, jest rzędu milisekundy i może być pominięta przy graficznej analizie wyników. Jak się przekonasz, w Wirtualnym laboratorium jest inaczej.

Polecenie 1

- Podczas oglądania filmu wpisuj we właściwą kolumnę tabeli pomiarów zmierzone okresy drgań T, odpowiadające nastawianym długościom nici wahadła l_n. Wartości T zaokrąglij do czterech cyfr znaczących.
- Uzupełnij pozostałe dwie kolumny tabeli. Uzasadnij przy tym, że dla uzyskania długości wahadła l należy do l_n dodać $2,5 \text{ cm}$, a nie $2,503 \text{ cm}$, czyli dokładnie połowę zmierzonej na filmie średnicy kulki.

Trwa wczytywanie danych. .

Film dostępny pod adresem /preview/resource/Rem6UyaZZyfjB

Zapoznaj się z audiodeskrypcją filmu.

- Wykorzystaj wykonane podczas nagrania pomiary i przygotuj wykres zależności długości wahadła od kwadratu jego okresu.
- Do punktów pomiarowych umieszczonych na tym wykresie dopasuj prostą, a następnie oblicz jej współczynnik nachylenia. Czy wiesz, że analizując nachylenie tej prostej można nie tylko wyznaczyć doświadczalnie wartość przyspieszenia grawitacyjnego g_d? Można też oszacować przedział $(g_{\min}, g_{\max})$, w którym rzeczywista wartość g znajduje się „na pewno”, nawet przy uwzględnieniu najmniej korzystnego zbiegu okoliczności. Wykonaj odpowiednie analizy. W razie potrzeby przypomnij sobie procedurę zaproponowaną w części „Przeczytaj”. Na koniec zajrzyj do „Wyjaśnienia”.

Doświadczenie 1
Graficzna analiza wyników

Problem badawczy

Celem eksperymentu jest zebranie danych i, na podstawie graficznej analizy związku pomiędzy kwadratem okresu drgań T^2 wahadła matematycznego i jego długością l, wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego g.

Hipoteza

Zależność $T^2(l)$ ma postać funkcji liniowej, której współczynnik kierunkowy a jest proporcjonalny do wartości przyspieszenia ziemskiego g.

Co będzie potrzebne

Wykorzystaj wyposażenie Wirtualnego laboratorium.

Ćwiczenie 1
Porównaj wyposażenie laboratorium wirtualnego z wyposażeniem stanowiska pomiarowego laboratorium pokazanego w filmie.

Omów pokrótce wpływ stwierdzonych różnic w wyposażeniu na rozstrzygnięcie hipotezy. Zapisz swoją wypowiedź w Dzienniku pomiarów.

Instrukcja

Postępuj zgodnie z instrukcją zaproponowaną w Laboratorium.

Polecenie 2

- Wybierz wartość n - liczby pełnych okresów drgań wahadła, po których zatrzymasz stoper i odczytasz czas t.
- Przeprowadź pomiar okresu drgań T dla co najmniej dziesięciu różnych długości wahadła l, w miarę równomiernie rozłożonych w przedziale dostępnym w Wirtualnym laboratorium.
- Wyniki wpisz do Tabeli pomiarów. Zawiera ona dodatkowe kolumny, które wykorzystasz podczas opracowywania uzyskanych wyników.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DuCYb1DLn

Opracowanie wyników

Podsumowanie

Polecenie 3

1. **Niepewność** $u(l)$

Zastosuj podane w instrukcji Wirtualnego laboratorium postępowanie prowadzące do wyznaczenia niepewności pomiaru długości wahadła $u(l)$. Wyniki wpisz w odpowiednią kolumnę Tabeli.

2. **Niepewność** $u(T)$

Przeanalizuj zaproponowaną w instrukcji propozycję określenia niepewności standardowej $u(t)$ pomiaru czasu trwania n okresów drgań wahadła. Jeśli zgadzasz się z przedstawioną tam oceną, uzupełnij kolumny $u(t)$ oraz $u(T)$ w Tabeli zgodnie z tą propozycją.

W przeciwnym razie oszacuj tę niepewność zgodnie z własną wiedzą i doświadczeniem, a odpowiednie kolumny uzupełnij zgodnie z dokonaną oceną. Swoje rozumowanie przedstaw w Dzienniku pomiarów.

3. **Kwadrat okresu drgań i jego niepewność** $u(T^2)$

Kwadrat okresu T^2 jest wielkością mierzoną pośrednio. Jest on wyrażony jako kwadrat wielkości mierzonej bezpośrednio - okresu drgań T. Niepewności pomiaru wszystkich okresów $u(T)$ są jednakowe.
Wyznacz niepewność pomiaru $u(T^2)$ dla każdego okresu, zgodnie z zasadami opisanymi w e-materiale „*Niepewność wielkości mierzonej pośrednio*”. Zwróć uwagę na sekcję „Dla zainteresowanych” na końcu części „Przeczytaj”. W punkcie drugim podano gotowe wyrażenie, które możesz bezpośrednio zastosować.

$$u(T^2) = 2T \cdot u(T)\ .$$

Wpisz do Tabeli wartości T^2 oraz $u(T^2)$.

4. **Punkty pomiarowe na wykresie** $l(T^2)$

Przygotuj odpowiednio wyskalowane osie dla wykresu zależności $l(T^2)$ i nanieś na nim punkty pomiarowe.

Rozważ celowość naniesienia, dla każdego punktu, odcinków niepewności pomiaru długości wahadła oraz, niezależnie, odcinków niepewności pomiaru kwadratu okresu. Zapisz swoją decyzję wraz z krótkim uzasadnieniem w Dzienniku pomiarów.

5. **Prosta najlepiej dopasowana**

Na przygotowany rysunek nanieś linię prostą, którą uznajesz za najlepiej pasującą do punktów pomiarowych. Zastosuj procedurę opisaną w części „Przeczytaj”. Zwróć uwagę, że prosta najlepiej dopasowana powinna przechodzić przez punkt (0; 0) wykresu.

W razie potrzeby przypomnij sobie tę problematykę, przedstawioną w e-materiałach „*Jak dopasować prostą do wyników pomiarów?*” i „*W jakim celu dopasowuje się prostą do wyników pomiarów i jakie informacje można w ten sposób uzyskać?*”.

6. **Nachylenie dopasowanej prostej i wartość przyspieszenia ziemskiego**

Wyznacz nachylenie dopasowanej przez siebie prostej - oblicz wartość jej współczynnika kierunkowego a.

Na tej podstawie oblicz wartość przyspieszenia ziemskiego g_d wyznaczoną w doświadczeniu.

7. **Skrajne dopuszczalne wartości przyspieszenia ziemskiego**

Oceń, czy niepewności punktów pomiarowych pozwalają na poprowadzenie dwóch prostych „skrajnych” i na zastosowanie procedury zaproponowanej w części „Przeczytaj”. Jeśli jest to możliwe, określ granice $g_{\min}$ i $g_{\max}$ przedziału, w którym rzeczywista (tablicowa) wartość g zawiera się niemal „na pewno”.

W przeciwnym razie określ względne odchylenie δ uzyskanej wartości g_d od wartości rzeczywistej g,

$$\delta = \frac{|g - g_d|}{g} \ .$$

Analiza wyników i wnioski

Skomentuj uzyskany wynik. Rozstrzygnij hipotezę badawczą. Swoją argumentację zapisz w Dzienniku pomiarów.

Doświadczenie 2
Dla zainteresowanych

Numeryczna analiza wyników

Problem badawczy

Celem eksperymentu jest pomiar okresu drgań wahadła matematycznego T dla różnych jego długości l i poddanie numerycznej analizie wartości ilorazów $\frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

Hipoteza

a) Wartości ilorazów $\frac{4\pi^2 l}{T^2}$ są na tyle zbliżone, że można je uznać za jednakowe.
b) Średnia ważona tych wartości jest równa wartości przyspieszenia ziemskiego.

Co będzie potrzebne

Wykorzystaj wyposażenie Wirtualnego laboratorium.

Instrukcja

Możesz wykorzystać wyniki pomiarów przeprowadzonych w doświadczeniu 1. Przydatne byłoby jednak uzyskanie większej liczby wyników - rzędu 20-30. Możesz przeprowadzić dodatkowe pomiary we własnym zakresie. Lepszym pomysłem będzie zmotywowanie grupy koleżanek lub kolegów do wspólnego opracowania pomiarów, wykonanych oddzielnie przez każdego członka grupy. W tym ostatnim przypadku:
- Niech każdy uczestnik zmierzy kilkakrotnie okres drgań wahadła w całym zakresie dostępnych długości; zestawy długości przydzielonych poszczególnym uczestnikom powinny się nieco różnić.
- Wybierzcie jednakową dla wszystkich wartość n - liczby pełnych okresów drgań wahadła, po których mierzący zatrzymuje stoper i odczytuje czas t. Wymóg ten nie jest jednak bezwzględny.
- Zastosujcie wszyscy podane w instrukcji Wirtualnego laboratorium postępowanie prowadzące do wyznaczenia niepewności pomiaru długości wahadła $u(l)$ podane w instrukcji Wirtualnego laboratorium.
- Przedyskutujcie problem ustalania niepewności pomiaru okresu $u(T)$ i przyjmijcie jednakowe zasady postępowania.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DuCYb1DLn

Polecenie 4

1. Każdy oblicza, dla każdego swojego pomiaru, wartość przyspieszenia ziemskiego g zgodnie z przekształconym wyrażeniem (1):

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\ .$$

2. Dla każdej wartości należy obliczyć niepewność $u(g)$; pamiętać przy tym należy, że g jest wielkością mierzoną pośrednio. Pomocne może być przypomnienie sobie e-materiału „Niepewność wielkości mierzonej pośrednio”. Podczas obliczeń zwróćcie uwagę, czy udziały obu zmiennych, l i T, w niepewności $u(g)$ są porównywalne, czy też któraś z nich ma udział dominujący. Tę informację wykorzystacie w Podsumowaniu.
3. Każdy uczestnik przygotowuje i wpisuje własny zbiór danych do wspólnej Tabeli wyników.

Podsumowanie

Polecenie 5

1. Obliczcie $g_{śr}$ - średnią *ważoną* uzyskanych wartości g.

Ważne!

- **Co to jest średnia ważona?** Jest to procedura uśredniania, która pozwala uwzględnić, że zmierzone wartości g wpływają na wartość średnią w różnym stopniu. W przypadku, z którym macie do czynienia, nie należy obliczać średniej arytmetycznej wyników, lecz właśnie ich średnią ważoną.
- **Jaki jest tego powód?** Poszczególne wartości g nie są jednakowo wiarygodne ze względu na różne niepewności ich pomiaru. Te wartości, których niepewność jest mniejsza są bardziej wiarygodne od tych o niepewności większej.
- **Jak uzyskać takie zróżnicowanie wpływu na średnią?** Przyjrzyjmy się znanemu wyrażeniu na średnią arytmetyczną i rozbudujmy nieco jego zapis.

$$g_{śr} = \frac{g_1 + g_2 + \ldots + g_N}{N} = \frac{1 \cdot g_1 + 1 \cdot g_2 + \ldots + 1 \cdot g_N}{1 + 1 + \ldots + 1} \; .$$

Symbolem N oznaczamy łączną liczbę pomiarów wykonanych przez uczestników; jest to także liczba jedynek sumowanych w mianowniku ostatniego ilorazu. To wyrażenie oznacza, że każdemu wynikowi przypisujemy jednakowy wpływ na wartość średnią, czyli jednakowe *wagi* $w_1 = w_2 = \ldots = w_N = 1$. Jeżeli chcemy, by wagi były różne, to wystarczy użyć do obliczeń takiego wyrażenia:

$$g_{śr} = \frac{w_1 \cdot g_1 + w_2 \cdot g_2 + \ldots + w_N \cdot g_N}{w_1 + w_2 + \ldots + w_N} \; .$$

- **Jak wyrazić wagi dla poszczególnych pomiarów?** Typowe postępowanie polega na przypisaniu poszczególnym uśrednianym wartościom $g_1, g_2, \ldots, g_N$ wag $w_i = \frac{1}{u(g_i)}$, odwrotnie proporcjonalnych do niepewności pomiaru danej wartości.
- **Jaka jest ostateczna postać wyrażenia?** Średnia ważona $g_{śr}$ jest dana wyrażeniem:

$$g_{śr} = \frac{\frac{1}{u(g_1)} \cdot g_1 + \frac{1}{u(g_2)} \cdot g_2 + \ldots + \frac{1}{u(g_N)} \cdot g_N}{\frac{1}{u(g_1)} + \frac{1}{u(g_2)} + \ldots + \frac{1}{u(g_N)}} \ .$$

Tak obliczoną wartość wpiszcie do Tabeli wyników.

2. Dla każdej wartości g_i obliczcie jej odchylenie $|g_i - g_{śr}|$ od wartości $g_{śr}$ i wpiszcie do ostatniej kolumny Tabeli.
3. Porównajcie to odchylenie z niepewnością pomiaru tej wartości. Podzielcie wyniki na trzy kategorie o roboczych nazwach:

- wyniki „bliskie” średniej, gdy $|g_i - g_{śr}| \leqslant u(g_i)$;
- wyniki „niezbyt odległe” od średniej, gdy $u(g_i)$;
- wyniki „dalekie” od średniej, gdy $|g_i - g_{śr}| > 2u(g_i)$.

4. Na podstawie liczebności tych kategorii oceńcie, w sposób jakościowy, na ile wiarygodny jest punkt a) postawionej hipotezy. Zapiszcie swoje rozumowanie i wnioski w Dzienniku pomiarów, w przygotowanym polu. Zapiszcie tam także ewentualne zdania odrębne, wraz z ich krótkim uzasadnieniem.
5. Obliczcie niepewność $u(g_{śr})$, stosując wyrażenie

$$u(g_{śr}) = \sqrt{\frac{(g_{śr} - g_1)^2 + (g_{śr} - g_2)^2 + \ldots + (g_{śr} - g_N)^2}{N(N-1)}} \ . \tag{2}$$

Rozstrzygnijcie jakościowo punkt b) hipotezy badawczej.

Ważne!

Obliczona zgodnie z wyrażeniem (2) niepewność nie jest - ściśle rzecz biorąc - niepewnością **standardową**. Wykorzystane wyrażenie pozwala bowiem obliczyć niepewność standardową serii niezależnych pomiarów wielkości mierzonej **bezpośrednio**. W Waszym eksperymencie uśredniane wielkości zostały zmierzone wprawdzie niezależnie, ale **pośrednio**.

Niezależnie jednak od tego, niepewność ta pozwala wyrobić sobie pogląd o możliwym typowym odchyleniu wyniku od wartości prawdziwej (tablicowej) mierzonej wielkości. Może więc służyć do formułowania wniosków jakościowych.

Ćwiczenie 2

Nie ulega wątpliwości, że potwierdzenie punktu a) hipotezy jest tym bardziej wiarygodne, im mniejsza niepewność pomiaru $u(g_i)$ każdej z wartości przyspieszenia ziemskiego. Porównajcie udziały w tej niepewności, $u_l(g_i)$ oraz $u_T(g_i)$, pochodzące od każdej z bezpośrednio mierzonych wielkości.

Zaproponujcie i opiszcie, w przygotowanym do tego polu Dziennika pomiarów, alternatywne wyposażenie Wirtualnego laboratorium, które pozwoliłoby zmniejszyć przyczynek do niepewności od tej zmiennej, dla której jest on dominujący.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

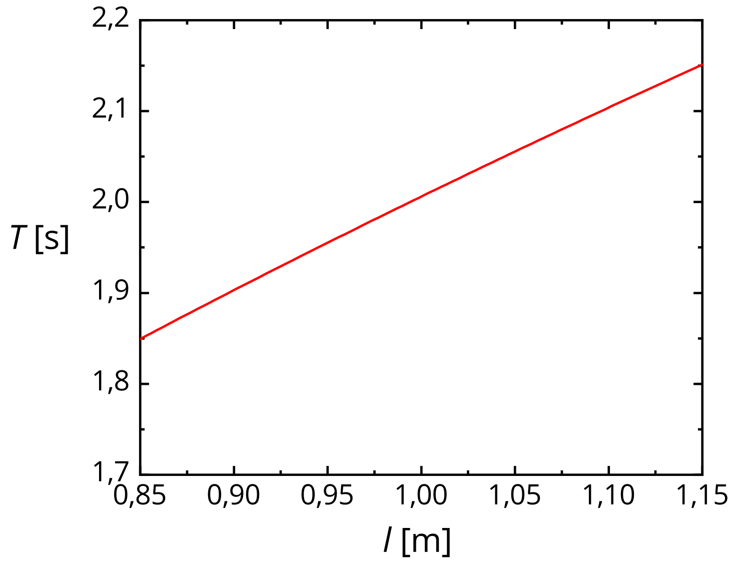
Uczniowie mierzyli przyspieszenie ziemskie za pomocą wahadła matematycznego. Dla trzech długości wahadła zmierzyli oni okres drgań. Poniższa tabela przestawia wyniki pomiarów.

Nr pomiaru	Długość wahadła, l [cm]	Niepewność długości wahadła, $u\left(l\right)$ [cm]	Okres, T [s]	Niepewność okresu, $u\left(T\right)$ [s]	Kwadrat okresu, T^2 [s^2]	Niepe kwad okre $u\left(T^2\right.$
1	50	1	1,42	0,05		
2	100	1	2,00	0,05		
3	150	1	2,46	0,05		

Uzupełnij dwie ostatnie kolumny tabeli. Wykonując odpowiedni wykres, oblicz maksymalną i minimalną wartość przyspieszenia ziemskiego zgodną z pomiarami uczniów.

Ćwiczenie 9

Poniższy rysunek przedstawia fragment wykresu zależności $T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (okresu T drgań wahadła matematycznego od jego długości l).



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl.

Przy pomocy stopera uczniowie zmierzyli okres drgań ciężarka zawieszonego na linkach o trzech różnych długościach. W tym celu zmierzyli czas trwania 10 drgań, a wynik podzielili przez 10. Czas reakcji człowieka wynosi ok. 0,2 s. Oznacza to, że uczeń mógł zarówno włączyć, jak i wyłączyć stoper o 0,2 s za wcześnie lub za późno. Graniczna niepewność pomiarowa długości wahadła została przez uczniów oszacowana na 2 cm.

Poniższa tabela przedstawia wyniki pomiarów. Nanieś je na powyższy wykres (możesz go wydrukować). Nie zapomnij o odcinkach niepewności.

nr pomiaru	długość wahadła, l [cm]	okres wahadła, T [s]
1	90	1,90
2	100	2,02
3	110	2,08

Rozstrzygnij, dla każdego pomiaru oddzielnie, czy jest on zgodny z zależnością, która posłużyła do narysowania wykresu. Uzasadnij każde rozstrzygnięcie.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Krzysztof Lorek
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	**Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	**Cele kształcenia – wymagania ogólne** III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji lub doświadczeń oraz wnioskowanie na podstawie ich wyników. **Zakres rozszerzony** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 9) dopasowuje prostą do danych przedstawionych w postaci wykresu; interpretuje nachylenie tej prostej i punkty przecięcia z osiami; 10) przeprowadza wybrane obserwacje, pomiary i doświadczenia korzystając z ich opisów; planuje i modyfikuje ich przebieg; formułuje hipotezę i prezentuje kroki niezbędne do jej weryfikacji; 15) posługuje się pojęciem niepewności pomiaru wielkości prostych i złożonych; zapisuje wynik pomiaru wraz z jego jednostką oraz z uwzględnieniem informacji o niepewności; uwzględnia niepewności przy sporządzaniu wykresów. V. Drgania. Uczeń: 8) doświadczalnie: e) wyznacza wartość przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego.

Kształtowane kompetencje kluczowe:	**Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:** • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: 1. wykona wykresy obrazujące zależność okresu wahadła matematycznego od jego długości i przyspieszenia grawitacyjnego. 2. wykona doświadczenie w wirtualnym laboratorium, w którym zmierzy przyspieszenie ziemskie za pomocą wahadła. 3. rozwiąże zadania dotyczące wahadła matematycznego.
Strategie i metody nauczania:	strategia eksperymentalno-obserwacyjna
Formy zajęć:	wykład, pogadanka, doświadczenie w wirtualnym laboratorium, doświadczenie
Środki dydaktyczne:	WL_I, ciężarek szkolny (np. 50g), sznurek, statyw, stoper lub telefon komórkowy ze stoperem, miarka
Materiały pomocnicze:	„Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki” T.Dryński
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Przed lekcją należy przywiązać sznurek do ciężarka i zawiesić to wahadło na statywie. Nauczyciel motywuje potrzebę pomiaru przyspieszenia grawitacyjnego jak w części „Wprowadzenie” tego e-materiału oraz przypomina sposób obliczania okresu wahadła matematycznego.	
Faza realizacyjna:	

• Nauczyciel poprzez wykład wyprowadza i wyjaśnia kształt wykresów $l(T)$ i $l(T^2)$ dla wahadła matematycznego. • Nauczyciel wyjaśnia przebieg doświadczenia opisanego w części „Przeczytaj” tego e-materiału oraz rysuje na tablicy tabelkę taką, jak w części „Wirtualne laboratorium WL-I” tego e-materiału. • Najpierw nauczyciel, a potem uczniowie – ochotnicy wykonują pomiary z rzeczywistym wahadłem dla dwóch jego długości. Nauczyciel zapisuje wyniki w tabeli. • Z pomocą klasy nauczyciel wypełnia ostatnie kolumny tabeli oraz oblicza otrzymaną wartość przyspieszenia ziemskiego wraz z niepewnością i błędem względnym. Procedura powinna wyglądać podobnie do tej w zad. 7 z tego e-materiału.	
Faza podsumowująca:	
Nauczyciel przypomina wykonane kroki, by zmierzyć wartość przyspieszenia ziemskiego i komentuje fakt, że wynik zgadza się z podręcznikową wartością.	
Praca domowa:	
Nauczyciel zadaje uczniom do domu eksperyment w wirtualnym laboratorium i prosi, aby wykonali oni swoją pracę na kartkach. Kartki te zostaną zebrane i ocenione.	
Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:	Doświadczenie w wirtualnym laboratorium uczniowie powinni wykonać samodzielnie. Doświadczenie w wirtualnym laboratorium może również zostać wykonane na lekcji.