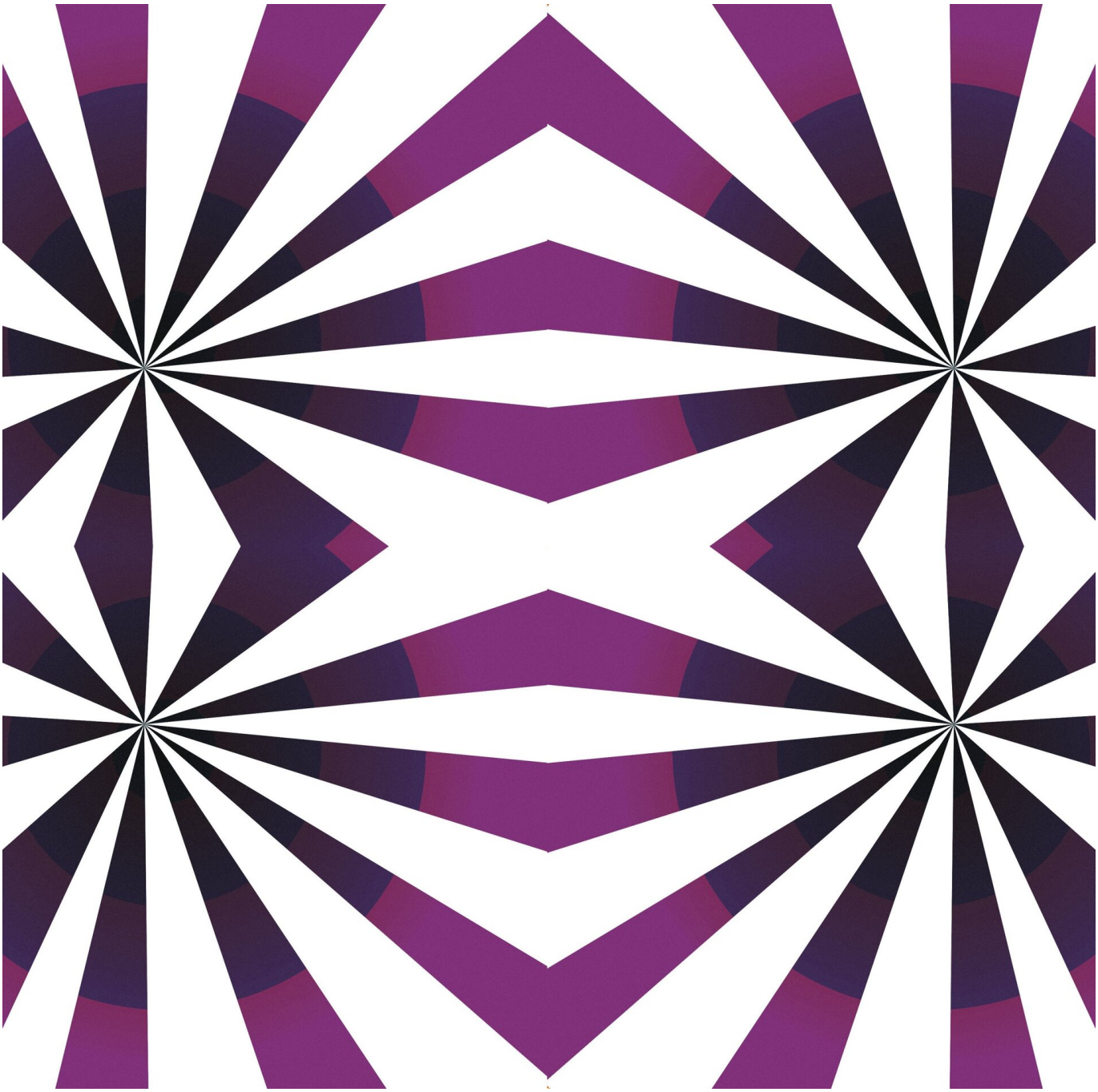


Wzory redukcyjne dla kątów $\pi - \alpha$

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Galeria zdjęć interaktywnych
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Elle Ritter, dostępny w internecie: https://pixabay.com/, domena publiczna.

W tej lekcji zajmiemy się tzw. wzorami redukcyjnymi. Być może zauważyłeś już, że wartościom funkcji trygonometrycznych towarzyszy pewna regularność. Przywołajmy w tym miejscu tylko jeden przykład: $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $\sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

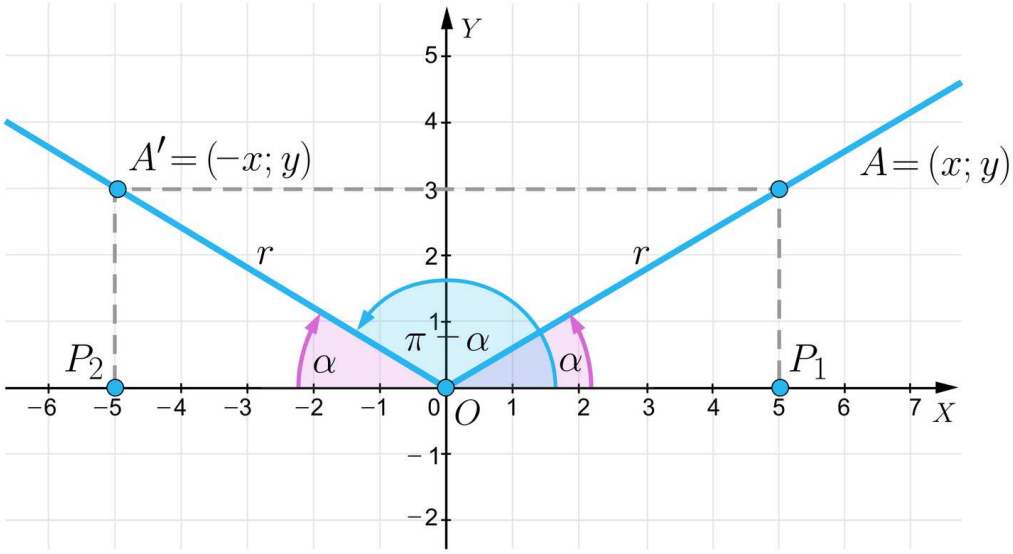
Pomimo tego, że kąty o miarach $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ różnią się rozwartością (zwróć uwagę na położenie drugiego ramienia tych kątów w prostokątnym układzie współrzędnych), to wartości sinusów tych kątów są w pewien sposób powiązane: ich wartości bezwzględne są takie same. Omówimy szczegółowo, z czego te zależności wynikają.

Twoje cele

- Zastosujesz wybrane wzory redukcyjne do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach w przedziału $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.
- Zastosujesz wybrane wzory redukcyjne do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych.
- Zastosujesz wybrane wzory redukcyjne do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych.

Przeczytaj

W prostokątnym układzie współrzędnych umieścimy w położeniu standardowym kąty o miarach α oraz $\pi - \alpha$, gdzie $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Zauważmy, że ponieważ kąt o mierze α jest ostry (drugie ramię leży w I ćwiartce układu), kąt o mierze $\pi - \alpha$ jest rozwarty (drugie ramię leży w II ćwiartce układu).



Na drugim ramieniu kąta α wybieramy punkt A o współrzędnych $(x; y)$ i promieniu wodzącym r. Na drugim ramieniu kąta o mierze $\pi - \alpha$ wybieramy taki punkt A', którego promień wodzący jest również równy r. Wówczas, przy oznaczeniach jak na rysunku powyżej, kąt $A'OP_2$ ma miarę α, zaś trójkąty prostokątne $A'OP_2$ oraz AOP_1 są przystające na mocy cechy kąt-bok-kąt. Wynika stąd, że współrzędne punktu A' są równe $(-x; y)$.

Zauważmy teraz, że wprost z definicji funkcji trygonometrycznych zachodzą poniższe równości.

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$	$\sin(\pi - \alpha) = \frac{y}{r}$
$\cos\alpha = \frac{x}{r}$	$\cos(\pi - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r}$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$	$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$

Otrzymujemy zatem równości:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Chociaż powyższy dowód został przeprowadzony dla kąta ostrego α, to wzory redukcyjne pozostają prawdziwe dla kąta o dowolnej mierze, dla którego określona jest funkcja tangens.

Przykład 1

Obliczymy wartości podanych wyrażeń trygonometrycznych.

a) $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$

Przykład 2

Korzystając z tablic trygonometrycznych, obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta o mierze $\frac{4\pi}{5}$.

$\alpha[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta[^\circ]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
...			
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
...			
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
...			
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
...			
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36

$\alpha[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta[^\circ]$
55	$0,8192$	$1,4281$	35
...			
81	$0,9877$	$6,3138$	9
82	$0,9903$	$7,1154$	8
83	$0,9925$	$8,1443$	7

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$.

Zatem przydadzą się nam wartości funkcji trygonometrycznych kąta o mierze $\frac{\pi}{5}$, które odczytujemy z tablic trygonometrycznych. Kąt o mierze łukowej równej $\frac{\pi}{5}$ ma miarę stopniową równą 36°.

Stąd mamy:

$\sin\frac{\pi}{5}\approx 0,5878,\ \ \cos\frac{\pi}{5}\approx 0,8090,\ \ \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\approx 0,7265.$

Zatem:

$\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}\approx 0,5878,$

$\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{5}\approx -0,8090,$

$\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\approx -0,7265.$

Przykład 3

Wykażemy, że jeśli $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ są miarami kątów wewnętrznych trójkąta, to zachodzi równość $\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$.

Rozwiązanie

Ponieważ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ są miarami kątów wewnętrznych trójkąta, więc

$\alpha+\ \beta+\gamma=\pi.$

Zatem $\beta+\gamma=\pi-\alpha$.

Podstawmy teraz $\pi-\alpha$ zamiast $\beta+\gamma$ do prawej strony tezy:

$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\frac{\pi-\alpha}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right).$

Przypomnijmy, że z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym zachodzą tożsamości:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$,

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, gdzie $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Zauważmy, że α jako miara kąta wewnętrznego trójkąta należy do przedziału $(0;\pi)$, zatem $\frac{\alpha}{2}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Po zastosowaniu drugiej z przytoczonych tożsamości do naszego zadania, otrzymujemy $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}$, co kończy dowód.

Tożsamości użyte w powyższym przykładzie wynikają wprost z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym, ale prawdziwe są również dla kąta α o dowolnej mierze (o ile funkcja tangens jest określona i nie przyjmuje wartości zero). Zauważ, że powyższe wzory mają budowę analogiczną do wzorów redukcyjnych (choć najczęściej niczego nie redukują).

Odnotujmy je poniżej, ponieważ będziemy korzystać z nich równie często jak z pozostałych wzorów omawianych w tej lekcji:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}\ \text{dla}\ x\neq k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Przykład 4

Wiadomo, że $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\frac{3\sin x}{-\cos(\pi-x)}+\frac{\cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=2$. Obliczymy wartość wyrażenia $\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}$.

Rozwiązanie

Przekształcimy równość daną w założeniu, korzystając z tożsamości $\cos(\pi-x)=-\cos x$ oraz $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$.

$\frac{3\sin x}{-\cos(\pi-x)}+\frac{\cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=2$

$\frac{3\sin x}{-(-\cos x)}+\frac{\cos x}{\cos x}=2$

$\frac{3\sin x}{\cos x}+1=2$

$\frac{3\sin x}{\cos x} = 1$

Skorzystamy z tożsamości $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ udowodnionej już dla każdego kąta x o mierze z przedziału $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ale prawdziwej również dla każdego $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

$3 \operatorname{tg} x = 1$

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$

Zatem mamy, że

$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$.

Przykład 5

Wiadomo, że $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\frac{\sin(\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \frac{\operatorname{tg}(\pi - x)}{\operatorname{tg} x} = 3$. Obliczymy $\cos\ x$.

Rozwiązanie

Przekształcimy równość podaną w założeniu, korzystając kolejno ze wzorów:

$\sin(\pi - x) = \sin x$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$,

$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$.

Podstawimy przekształcenia do wzoru.

$\frac{\sin(\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \frac{\operatorname{tg}(\pi - x)}{\operatorname{tg} x} = 3$

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{-\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = 3$

$\frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 3$

$\frac{\sin x}{\cos x} = 4$

$\sin x = 4 \cos x$

Skorzystamy z jedynki trygonometrycznej $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, udowodnionej już dla każdego kąta x o mierze z przedziału $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ale prawdziwej również dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

$\sin x = 4 \cos x$

$(4 \cos x)^2 + \cos^2 x = 1$

$16 \cos^2 x + \cos^2 x = 1$

$17\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{17}$

Ponieważ x jest miarą kąta ostrego, więc jego cosinus jest dodatni: $\cos x = \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

Słownik

wzory redukcyjne

zestaw wzorów pozwalających redukować argumenty funkcji trygonometrycznych do miar z przedziału $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ w celu wyliczenia wartości tych funkcji

jedynka trygonometryczna

tożsamość trygonometryczna, która orzeka, że suma kwadratu sinusa dowolnego argumentu i kwadratu cosinusa dowolnego argumentu jest równa 1; zwana też trygonometryczną wersją twierdzenia Pitagorasa

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj wyprowadzenie wzorów redukcyjnych dla kątów $\pi - \alpha$.

Polecenie 2

Połącz w pary wyrażenia o równych wartościach.

$\sin 140^\circ$	$\sin 50^\circ$
$\cos 120^\circ$	$\sin 40^\circ$
$\cos 140^\circ$	$\sin 60^\circ$
$\cos 130^\circ$	$-\cos 50^\circ$
$\sin 110^\circ$	$-\cos 40^\circ$
$\cos 110^\circ$	$\sin 70^\circ$
$\sin 120^\circ$	$-\cos 60^\circ$
$\sin 130^\circ$	$-\cos 70^\circ$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Połącz w pary wyrażenie trygonometryczne i jego wartość.

$\cos\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$
$\sin\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\frac{3\pi}{4}$	-1
$\sin\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 2

Korzystając z tablic trygonometrycznych, wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów o podanych miarach. Podaj wyniki z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Jako separatora użyj przecinka.

$\sin \frac{9\pi}{10} \approx$ [ ]
$\cos \frac{9\pi}{10} \approx$ [ ]
$\operatorname{tg} \frac{9\pi}{10} \approx$ [ ]
$\sin \frac{7\pi}{10} \approx$ [ ]
$\cos \frac{7\pi}{10} \approx$ [ ]
$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{10} \approx$ [ ]

Ćwiczenie 3

Wykaż, że jeśli $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ są miarami kątów wewnętrznych trójkąta, to zachodzi równość $\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta+\gamma}{2}$.

Ćwiczenie 4

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin(160^\circ+x)-3\cos(70^\circ+x)}{\sin(20^\circ-x)}$ dla $x \neq 20^\circ + k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$.
Uporządkuj poniższe wyrażenia, aby otrzymać rozwiązanie zadania.

$= \frac{\sin(20^\circ-x)-3\cos(70^\circ+x)}{\sin(20^\circ-x)} =$

$= -2$

$= \frac{-2\sin(20^\circ-x)}{\sin(20^\circ-x)} =$

$= \frac{\sin(180^\circ-(20^\circ-x))-3\cos(70^\circ+x)}{\sin(20^\circ-x)} =$

$\frac{\sin(160^\circ+x)-3\cos(70^\circ+x)}{\sin(20^\circ-x)} =$

$= \frac{\sin(20^\circ-x)-3\cos(90^\circ-(20^\circ-x))}{\sin(20^\circ-x)} =$

$= \frac{\sin(20^\circ-x)-3\sin(20^\circ-x)}{\sin(20^\circ-x)} =$

Ćwiczenie 5

Porównaj liczby. Wpisz znak $<, >$ lub $=$.

$\sin\frac{\pi}{8}$ [ ] $\sin\frac{7\pi}{8}$

$\sin\frac{\pi}{8}$ [ ] $\sin\frac{8\pi}{9}$

$\sin\frac{\pi}{8}$ [ ] $\sin\frac{6\pi}{7}$

$\cos\frac{\pi}{10}$ [ ] $\cos\frac{\pi}{9}$

$\cos\frac{8\pi}{9}$ [ ] $\cos\frac{\pi}{9}$

$\cos\frac{\pi}{10}$ [ ] $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{11}$ [ ] $\operatorname{tg}\frac{12\pi}{11}$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{11}$ [ ] $-\operatorname{tg}\frac{9\pi}{10}$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{11}$ [ ] $-\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{11}\right)$

$=$ $>$ $=$ $=$ $<$ $=$ $<$ $<$ $>$

Ćwiczenie 6

Wykaż, że jeśli tylko $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, to wyrażenie

$$\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \frac{-2\cos(\pi - x) + 3\cos(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin(-x) + 2\sin(\pi - x)}$$

przyjmuje stałą wartość niezależnie od wartości x.

Ćwiczenie 7

Aby przekształcić wyrażenie $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, możemy postąpić następująco:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right).$

Na mocy wzoru redukcyjnego $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, gdzie $\alpha=\frac{\pi}{2}-x$, mamy:

$\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$

Na mocy odpowiedniego wzoru redukcyjnego:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x.$

Zatem mamy, że

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x.$

Rozwiąż poniższy test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Ćwiczenie 8

Wyrażenie $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ jest dla każdej liczby x równe:

- ◯ $\sin x\cdot\cos x$
- ◯ $-\sin^2 x$
- ◯ $-\cos^2 x$
- ◯ $-\sin x\cdot\cos x$

Ćwiczenie 9

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzory redukcyjne dla kątów $\pi - \alpha$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

4. stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wybrane wzory redukcyjne do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach w przedziału $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
- stosuje wybrane wzory redukcyjne do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych.
- dowodzi tożsamości trygonometrycznych stosując wybrane wzory redukcyjne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Wzory redukcyjne dla kątów $\pi - \alpha$” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w zespołach dwuosobowych zapoznają się z treścią polecenia nr 1 „Przeanalizuj wyprowadzenie wzorów redukcyjnych dla kątów $\pi - \alpha$” z sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” i zawartym w niej materiałem.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Wzory redukcyjne dla kątów $\pi - \alpha$” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli). Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wzory redukcyjne dla kątów $\pi - \alpha$”).

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Wzory redukcyjne dla kątów $\pi - \alpha$”.