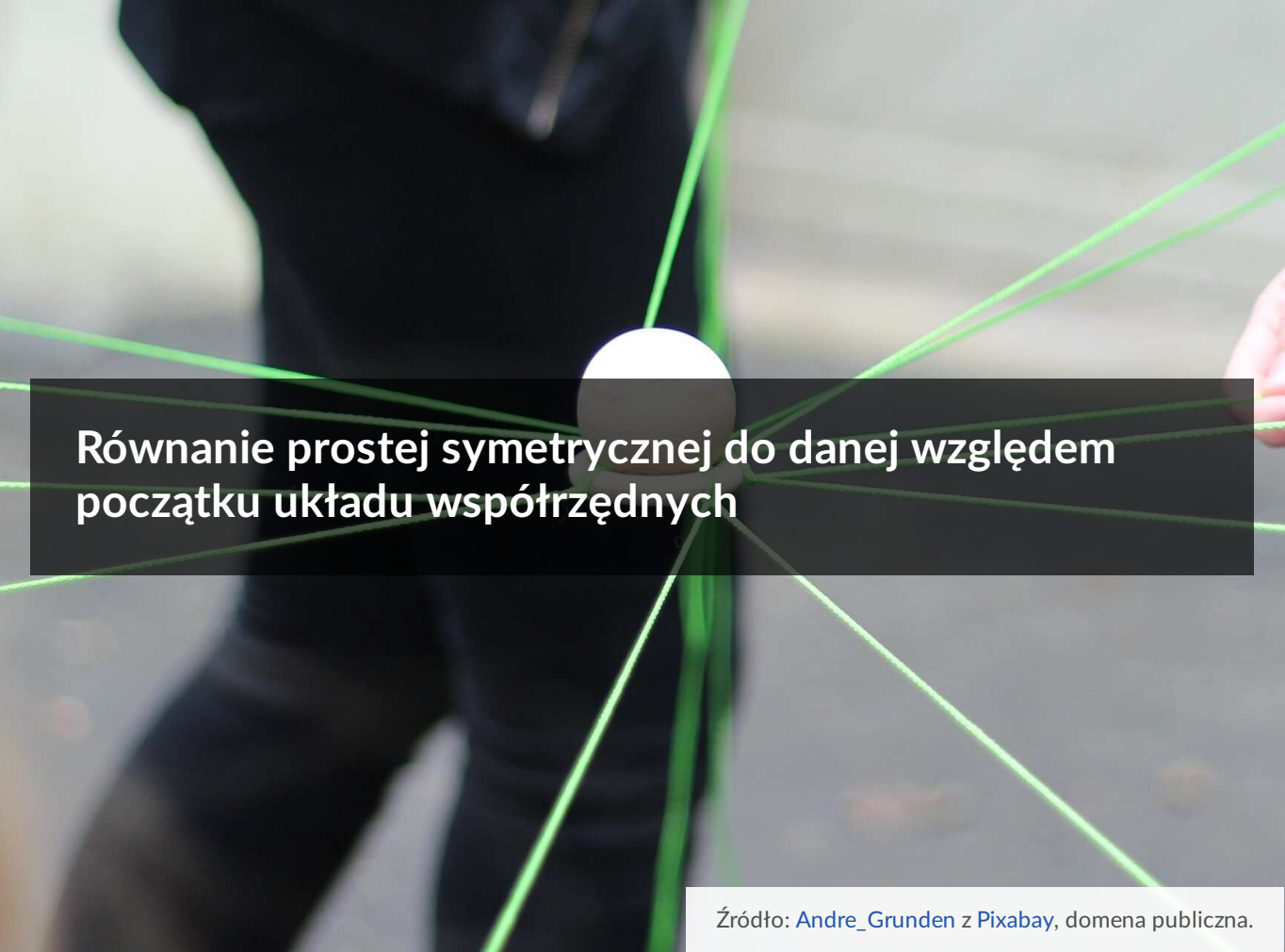




Równanie prostej symetrycznej do danej względem początku układu współrzędnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie prostej symetrycznej do danej względem początku układu współrzędnych

Źródło: [Andre_Grunden](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Istnieje ciekawa zależność pomiędzy równaniami prostych opisanych w postaci ogólnej i kierunkowej wtedy, gdy te proste są symetryczne względem początku układu współrzędnych. W trakcie lekcji odkryjemy tę zależność oraz poznamy metody wyznaczania równań takich prostych. Będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne bazując na zdobytej wiedzy i rozwiązanych przykładach.

Twoje cele

- Wyprowadzisz zależność, kiedy dwie proste zadane równaniami w postaci ogólnej lub kierunkowej są symetryczne względem początku układu współrzędnych.
- Sprawdzisz, czy proste o podanych równaniach są symetryczne względem początku układu współrzędnych.
- Wyznaczysz równania prostych symetrycznych względem początku układu współrzędnych.
- Obliczysz wartości parametrów, dla których proste opisane za pomocą równań są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

Przeczytaj

W trakcie lekcji omówimy sposoby wyznaczania równania prostej symetrycznej do prostej o danym równaniu względem początku układu współrzędnych, czyli punktu o współrzędnych $(0, 0)$.

Do wyznaczania równań prostych w symetrii względem punktu $(0, 0)$ wykorzystamy definicję **punktów symetrycznych względem początku układu współrzędnych**.

Definicja: punkty symetryczne względem początku układu współrzędnych

Punktem symetrycznym do punktu P o współrzędnych $P = (x, y)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt P' o współrzędnych $P' = (-x, -y)$.

Punktami symetrycznymi względem punktu $(0, 0)$ są na przykład punkty o współrzędnych:

- $P = (-3, 2)$ oraz $P' = (3, -2)$,
- $P = (2, 5)$ oraz $P' = (-2, -5)$,
- $P = (0, 4)$ oraz $P' = (0, -4)$.

Ważne!

Obrazem punktu $P = (0, 0)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych jest ten sam punkt.

W celu wyznaczenia równania prostej w symetrii względem początku układu współrzędnych posłużymy się równaniem ogólnym oraz równaniem kierunkowym prostej.

I. Wyznaczenie równania prostej symetrycznej względem początku układu współrzędnych, gdy mamy dane:

- punkt przecięcia prostej z osią X ,
- punkt przecięcia prostej z osią Y ,
- równanie w **postaci ogólnej**.

Określimy prostą w postaci ogólnej za pomocą równania $Ax + By + C = 0$.

Założmy, że współczynniki A, B, C są różne od 0.

Wtedy punkt przecięcia tej prostej z osią X ma współrzędne $K = (-\frac{C}{A}, 0)$, a punkt przecięcia z osią Y ma współrzędne $L = (0, -\frac{C}{B})$.

Opiszmy prostą symetryczną względem początku układu współrzędnych za pomocą równania ogólnego $A'x + B'y + C' = 0$.

Założmy, że współczynniki A' , B' , C' są różne od 0.

Zatem do tej prostej należą punkty o współrzędnych $K' = (\frac{C}{A}, 0)$ oraz $L' = (0, \frac{C}{B})$.

Podstawimy współrzędne tych punktów do równania ogólnego tej prostej. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} A' \cdot \frac{C}{A} + B' \cdot 0 + C' = 0 \\ A' \cdot 0 + B' \cdot \frac{C}{B} + C' = 0 \end{cases}$$

Jeżeli pierwsze równanie pomnożymy przez A , a drugie przez B , to otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} A'C + AC' = 0 \\ B'C + BC' = 0 \end{cases}$$

Zatem $A' = -\frac{AC'}{C}$ oraz $B' = -\frac{BC'}{C}$.

Jeżeli podstawimy obliczone współczynniki do równania prostej symetrycznej, to otrzymujemy równanie:

$$-\frac{AC'}{C}x - \frac{BC'}{C}y + C' = 0.$$

Mnożąc obie strony równania przez ułamek $-\frac{C}{C'}$, otrzymujemy równanie prostej symetrycznej do prostej $Ax + By + C = 0$ względem początku układu współrzędnych:

$$Ax + By - C = 0.$$

Na rysunku przedstawiono wykresy prostych symetrycznych względem początku układu współrzędnych:

II. Wyznaczenie równania prostej symetrycznej względem początku układu współrzędnych, gdy mamy dane:

- punkt przecięcia z osią X ,
- punkt przecięcia z osią Y ,
- równanie w [postaci kierunkowej](#).

Określimy prostą w postaci kierunkowej za pomocą równania $y = ax + b$.

Wtedy punkt przecięcia tej prostej z osią X ma współrzędne $P = (-\frac{b}{a}, 0)$, a punkt przecięcia z osią Y ma współrzędne $Q = (0, b)$.

Obrazem punktu P w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt o współrzędnych $P' = (\frac{b}{a}, 0)$, a obrazem punktu Q jest punkt $Q' = (0, -b)$.

Zapiszmy równanie prostej symetrycznej względem punktu $(0, 0)$ w postaci $y = a'x + b'$.

Podstawimy współrzędne punktów P' oraz Q' do równania tej prostej. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 0 = a' \cdot \frac{b}{a} + b' \\ -b = a' \cdot 0 + b' \end{cases}$$

Z układu równań obliczamy, że $a' = a$ oraz $b' = -b$, zatem równanie prostej symetrycznej do prostej $y = ax + b$ względem początku układu współrzędnych zapisujemy w postaci: $y = ax - b$.

Wnioski:

- proste opisane równaniami $x = a$ oraz $x = -a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ są zawsze symetryczne względem początku układu współrzędnych;
- proste opisane równaniami $y = b$ oraz $y = -b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$ są zawsze symetryczne względem początku układu współrzędnych;
- obrazem prostej opisanej za pomocą równania $y = ax$ w symetrii względem początku układu współrzędnych jest ta sama prosta.

Na rysunkach przedstawiono wykresy prostych symetrycznych względem początku układu współrzędnych:

Do wyznaczenia równania prostej w postaci kierunkowej wystarczy znać współrzędne dwóch dowolnych punktów, które należą do tej prostej.

Do wyznaczenia równania prostej symetrycznej względem początku układu współrzędnych wystarczy znaleźć obrazy w symetrii względem punktu $(0, 0)$ tych dwóch dowolnych punktów, a następnie wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez te punkty.

Przykład 1

Wyznamy równanie prostej w symetrii względem punktu o współrzędnych $(0, 0)$ do prostej o równaniu $y = 4x - 1$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że do podanej prostej należą punkty o współrzędnych $A = (0, -1)$ oraz $B = (1, 3)$.

Obrazem tych punktów w symetrii względem początku układu współrzędnych są punkty o współrzędnych $A' = (0, 1)$ oraz $B' = (-1, -3)$.

Oznaczmy równanie prostej w symetrii względem osi Y w postaci $y = a'x + b'$.

Podstawiamy do tego równania współrzędne punktów A' oraz B' i otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 = 0 \cdot a' + b' \\ -3 = -1 \cdot a' + b' \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $a' = 4$ oraz $b' = 1$.

Zatem prosta symetryczna względem początku układu współrzędnych jest opisana za pomocą równania $y = 4x + 1$.

Przykład 2

Wyznamy równania prostych symetrycznych względem początku układu współrzędnych do prostych określonych równaniami:

a) $-x + 3y + 2 = 0$,

b) $y = 2x + 4$.

Rozwiązanie

a) Równanie ogólne prostej symetrycznej do danej prostej względem początku układu współrzędnych jest postaci $-x + 3y - 2 = 0$.

b) Równanie kierunkowe prostej symetrycznej do danej prostej względem początku układu współrzędnych jest postaci $y = 2x - 4$.

Jeżeli wiemy, jakie warunki muszą spełniać współczynniki w równaniach prostych w symetrii względem początku układu współrzędnych, wówczas możemy znajdować wartości parametrów, dla których te proste są symetryczne względem punktu $(0, 0)$.

Przykład 3

Wyznamy, dla jakich wartości parametrów p i q proste o równaniach $y = (p - q)x + 4$ oraz $y = 3x + (2p + 3q)$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Proste o podanych równaniach są symetryczne względem początku układu współrzędnych, gdy zachodzi układ równań:

$$\begin{cases} p - q = 3 \\ 2p + 3q = -4 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem układu równań są liczby $p = 1$ oraz $q = -2$.

Dla otrzymanych wartości parametrów p i q proste są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

Przykład 4

Wyznamy, dla jakich wartości parametru m proste o równaniach $y = 2x + m^2$ oraz $y = 2x + (m - 2)$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Wiadomo, że proste o równaniach w postaci kierunkowej są symetryczne względem początku układu współrzędnych, gdy ich współczynniki b są liczbami przeciwnymi.

Zatem rozwiązujemy równanie:

$$m^2 = -(m - 2).$$

Równanie przekształcamy do postaci $m^2 + m - 2 = 0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby $m = -2$ lub $m = 1$, zatem proste są symetryczne względem początku układu współrzędnych, gdy wartość m jest równa jednej z otrzymanych liczb.

Słownik

równanie prostej w postaci ogólnej

równanie postaci $Ax + By + C = 0$, gdzie A i B nie są jednocześnie równe 0

równanie prostej w postaci kierunkowej

równanie postaci $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz a nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej

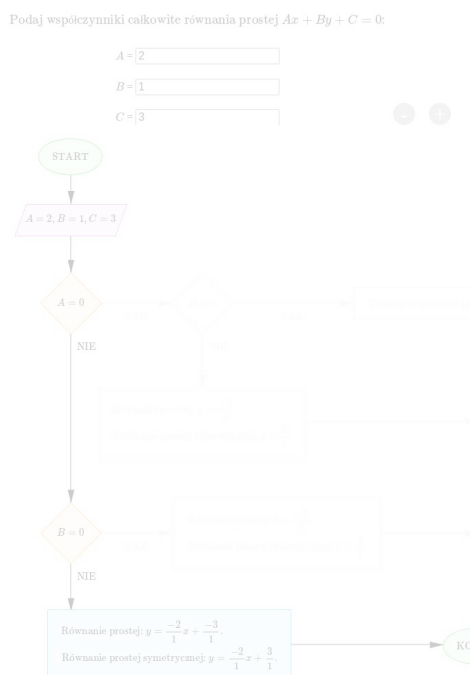
punkty symetryczne względem początku układu współrzędnych

punkty o współrzędnych $P = (x, y)$ i $P' = (-x, -y)$

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Zapoznaj się ze schematem interaktywnym dotyczącym wyznaczania równania prostych symetrycznych względem początku układu współrzędnych do prostych zapisanych za pomocą równań w różnych postaciach.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DXvWSJs1Y>

Polecenie 2

Podaj równania prostych symetrycznych względem początku układu współrzędnych do prostych opisanych równaniami:

a) $2x - y - 5 = 0$

b) $x = 2$

c) $y = 4$

d) $y = 2x - 5$

Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm wyznaczający równania prostych symetrycznych względem początku układu współrzędnych do prostych zapisanych za pomocą równań postaci $Ax + By + C = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary równania prostych, które są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

$$y = x + 3$$

$$3x - y + 1 = 0$$

$$y = 3x + 1$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$y = 3x - 1$$

$$3x - y - 1 = 0$$

$$y = x - 3$$

$$x - y + 3 = 0$$

Ćwiczenie 2



Proste opisane równaniami $y = x + m^2$ oraz $y = x + m$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych, gdy:

☐ $m \in \{-1, 0, 1\}$

☐ $m \in \{-1, 0\}$

☐ $m \in \{0, 1\}$

Ćwiczenie 3



Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐

Proste opisane równaniami $y = 3x + 3$ oraz $3x - y + 3 = 0$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

☐

Proste opisane równaniami $y = 2x - 1$ oraz $2x - y + 1 = 0$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

☐

Proste opisane równaniami $y = x - 5$ oraz $x - y + 5 = 0$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

☐

Proste opisane równaniami $y = x + 3$ oraz $x - y - 3 = 0$ nie są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

Ćwiczenie 4



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Równania prostych, które są symetryczne względem początku układu współrzędnych:

$$y = 2x + 3 \text{ oraz } 2x - y - 3 = 0$$

$$y = 5x - 2 \text{ oraz } 5x + y - 2 = 0$$

Równania prostych, które nie są symetryczne względem początku układu współrzędnych:

$$y = x + 4 \text{ oraz } x - y - 4 = 0$$

$$y = x - 7 \text{ oraz } x + y + 7 = 0$$

Ćwiczenie 5



Wstaw równania odpowiednich prostych.

Prostą symetryczną względem początku układu współrzędnych do prostej o równaniu $y = -2x + 1$ jest prosta o równaniu .

Prostą symetryczną względem początku układu współrzędnych do prostej o równaniu $y = 3x - 2$ jest prosta o równaniu .

Ćwiczenie 6



Proste o równaniach $(3m - 1)x + y + (n - 4) = 0$ oraz $(-m + 3)x + y + (n + 4) = 0$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych, gdy:

☐ $m = -1$ oraz $n = 0$

☐ $m = 1$ oraz $n \in \mathbb{R}$

☐ $m = 1$ oraz $n = 0$



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie prostej symetrycznej do danej względem początku układu współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza zależność, kiedy proste zadane równaniami w postaci kierunkowej lub ogólnej są symetryczne względem początku układu współrzędnych;
- podaje przykłady równań prostych symetrycznych względem początku układu współrzędnych;
- oblicza wartości parametrów, dla których proste są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- liga zadaniowa;
- z użyciem e-podręcznika;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Równanie prostej symetrycznej do danej względem początku układu współrzędnych” oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupa I opracowuje algorytm wyznaczania prostej symetrycznej względem początku układu współrzędnych do danej prostej w postaci ogólnej. Zadaniem grupy II jest opracowanie algorytmu wyznaczania prostej symetrycznej względem początku układu współrzędnych do danej prostej w postaci kierunkowej. Następnie grupy dzielą się swoimi spostrzeżeniami i porównują z odpowiednimi treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. W razie potrzeby uczniowie wspomagają swoją pracę treściami zawartymi w e-podręczniku.
2. W kolejnym kroku uczniowie analizują przykłady z sekcji „Przeczytaj”. Prowadzący zapowiada uczniom, że w będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy. Uczniowie z pozostałych grup mogą przedstawiać alternatywne rozwiązania.

4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Równanie prostej symetrycznej do danej względem początku układu współrzędnych” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łam się jak...”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Symetria względem punktu](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał z sekcji „Schemat interaktywny” można wykorzystać do powtórzenia wiadomości dotyczących zagadnień prostych symetrycznych względem osi układu współrzędnych oraz początku układu współrzędnych.