



## Bryły platońskie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



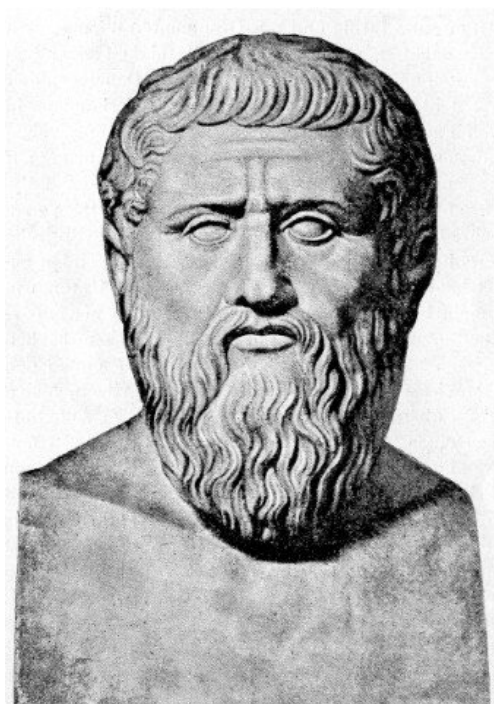
## Bryły platońskie

Źródło: Christian Fregnan, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com).

Niewiele osób wie, że Platon znany głównie jako grecki filozof, był też znakomitym matematykiem. Prawdopodobnie urodził się w 427 r. p.n.e. w Atenach, a zmarł w 347 r. p.n.e. Był uczniem Sokratesa przez 8 lat. Później opuścił Ateny, by po 12 latach podróży z innymi uczniami Sokratesa powrócić i założyć Akademię Ateńską w gaju Akademososa. Na bramie szkoły widniał napis: „**Kto nie zna geometrii, niech tu nie wchodzi**”.

Platon uważał, że materię tworzą idealne całości, które są figurami geometrycznymi. Najprostsza figurą jest trójkąt i to on tworzy materię. Trójkąty są także elementami ścian brył wielościanów. Z trójkątów równobocznych można utworzyć trzy bryły idealne – czworościan, ośmiościan,

dwudziestościan, zaś dwa trójkąty złożone w kwadrat utworzą ścianę sześcianu. Platon



Platon

Źródło: dostępny w internecie: [commons.wikimedia.org](http://commons.wikimedia.org), domena publiczna.

uważał, że bryły te odpowiadają czterem żywiołom: ogniewi, powietrzu, wodzie, ziemi. Piątym wielościanem foremnym jest dwunastościan, którego ścianami są pięciokąty foremne, symbolizujący według matematyka zespolenie wszystkich elementów.

W tym materiale dowiesz się, co to są bryły platońskie.

### Twoje cele

- Poznasz własności brył platońskich.
- Poznasz ich cechy i charakterystykę.
- Rozwiążesz zadania dotyczące brył platońskich.

# Przeczytaj

---

## Bryły platońskie

Bryły platońskie ([wielościany](#) foremne) to bryły, których wszystkie ściany są [przystającymi wielokątami](#) foremnymi i w których z każdego wierzchołka wychodzi tyle samo krawędzi.

Z trójkątów równobocznych złożyć można trzy bryły idealne:

- **tetraedr** (czworościan foremny),
- **oktaedr** (ośmiościan foremny),
- **ikosaedr** (dwudziestościan foremny).

Czwartą bryłę reprezentuje **heksaedr** (sześcián), którego każda ściana da się podzielić na dwa trójkąty, jest więc też zbudowany z trójkątów.

Istnieje wreszcie piąta bryła foremna - **dodekaedr**, zbudowana z 12 pięciokątów regularnych, którą Platon uznał za zespolenie całości, bryłę łączącą wszystkie elementy.

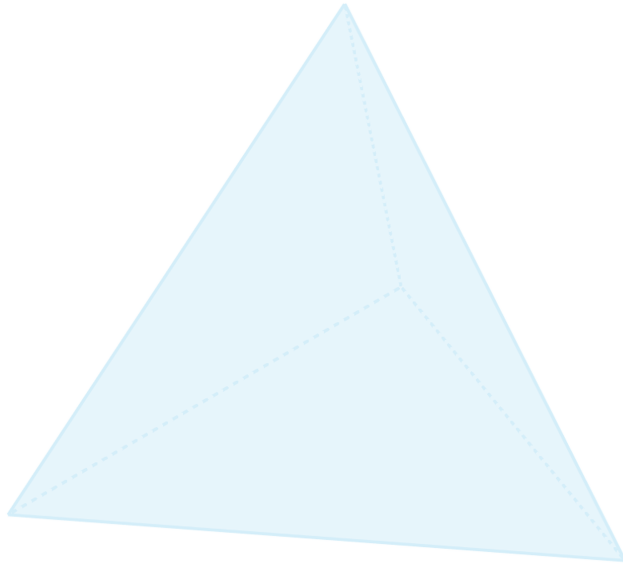
## Dlaczego tylko pięć brył?

Pitagoras udowodnił, że płaszczyzna dookoła punktu może być wypełniona jednolicie tylko trzema rodzajami wielokątów foremných: trójkątami, kwadratami albo pięciokątami. Żeby powstało naroże, potrzebne są co najmniej trzy ściany a suma kątów płaskich w wierzchołku musi być mniejsza od kąta pełnego. Wszystkie ściany w przypadku brył platońskich są jednakowe. Zatem jeśli wielokąty foremne tego samego rodzaju mają utworzyć naroże, to takich kombinacji jest właśnie pięć.

Omówmy po kolei wszystkie bryły.

## Czworościan foremny

Czworościan foremny to taki ostrosłup, który ma w podstawie oraz ścianach bocznych trójkąty równoboczne.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfKmqFDm0>

### Wzory:

- Wzór na pole powierzchni czworobocianu foremnego

$$P_c = a^2\sqrt{3}$$

- Wzór na objętość czworobocianu foremnego

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

- Wzór na wysokość czworobocianu foremnego:

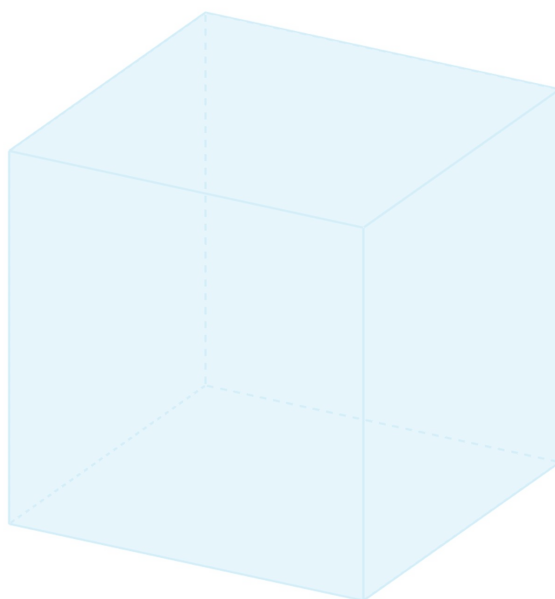
$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

- Wzór na wysokość ściany bocznej czworobocianu foremnego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

### Sześcian

Sześcian to graniastosłup, który ma sześć ścian będących przystającymi kwadratami.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfKmqFDm0>

### Wzory:

- Wzór na pole powierzchni całkowitej sześcianu

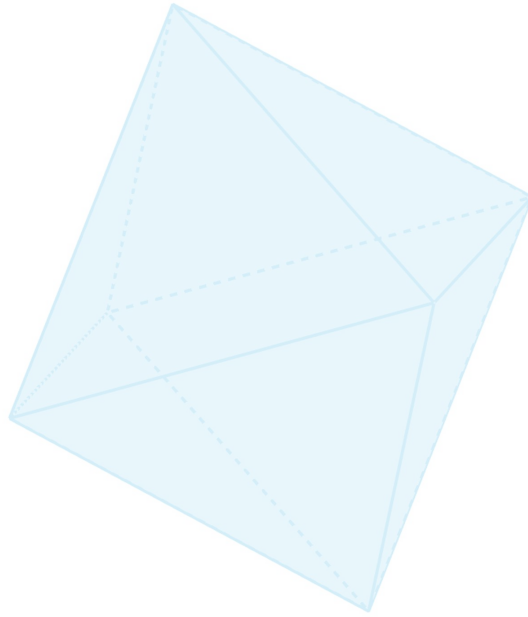
$$P_c = 6a^2$$

- Wzór na objętość sześcianu

$$V = a^3$$

### Ośmiościan foremny

Ośmiościan foremny ma osiem ścian będących trójkątami równobocznymi.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfKmqFDm0>

### Wzory:

- Wzór na pole powierzchni całkowitej

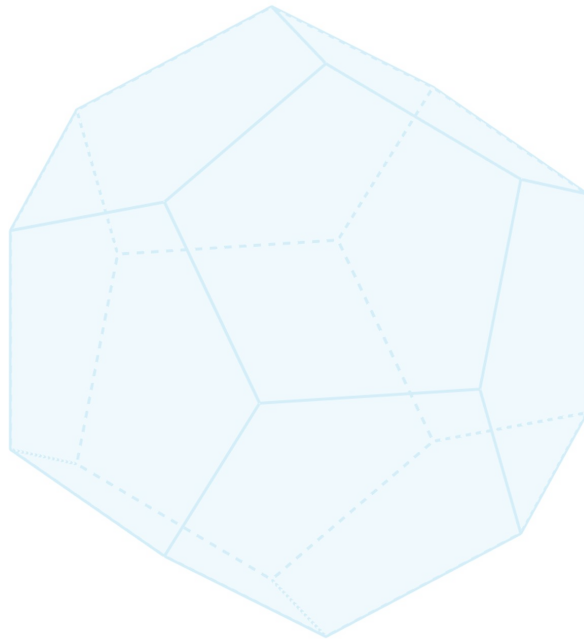
$$P_C = 2a^2\sqrt{3}$$

- Wzór na objętość

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

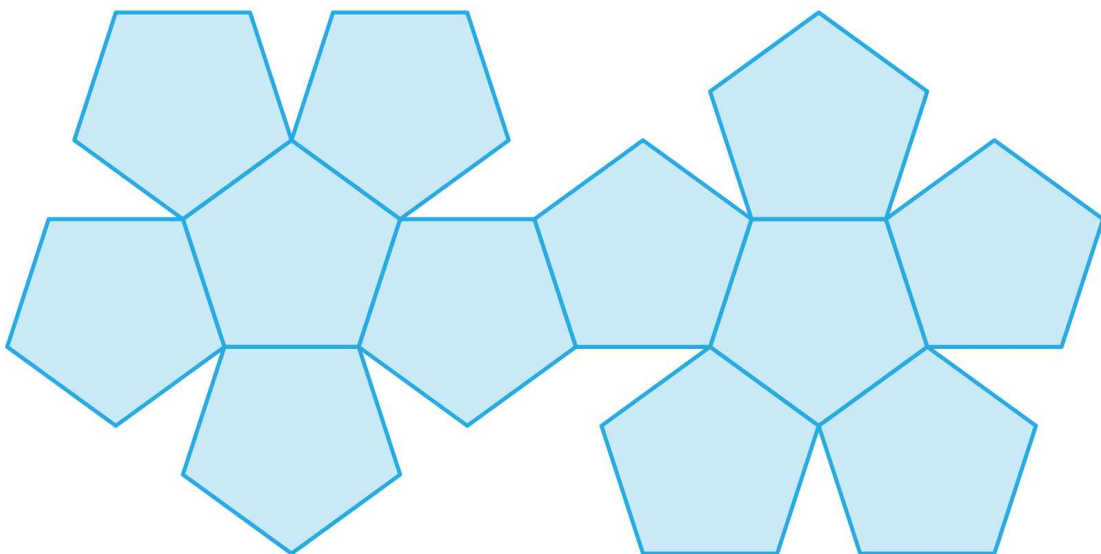
### Dwunastościan foremny

Dwunastościan foremny ma dwanaście ścian będących pięciokątami foremnymi.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfKmqFDm0>

### Siatka dwunastościanu foremnego



### Wzory:

- Wzór na pole powierzchni całkowitej

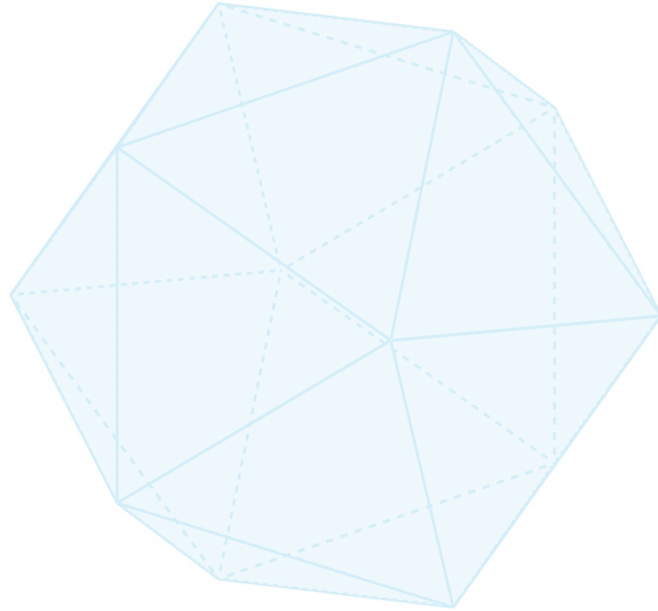
$$P_c = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

- Wzór na objętość

$$V = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5})$$

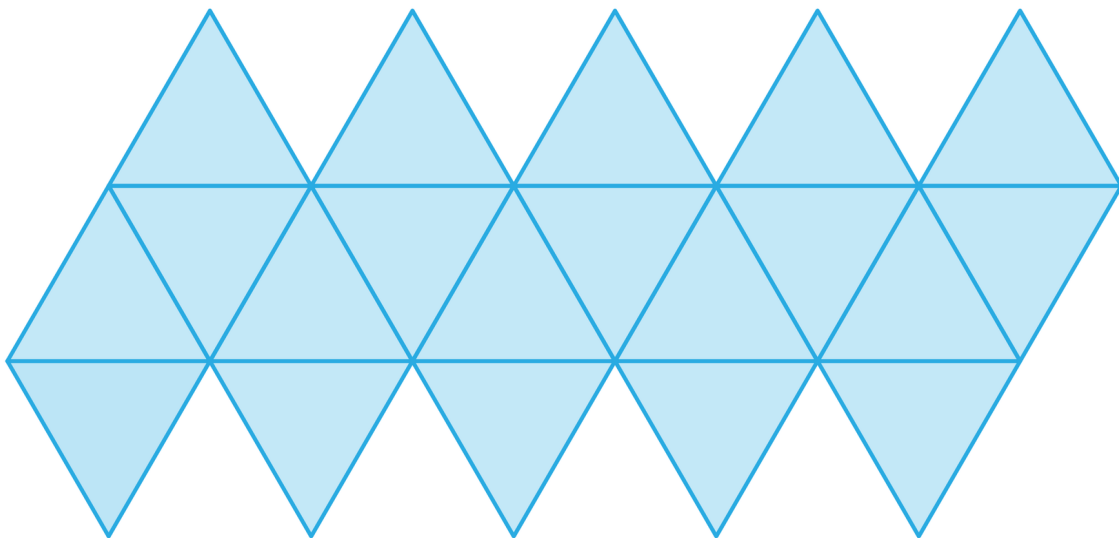
## Dwudziestościan foremny

Dwudziestościan foremny ma dwadzieścia ścian będących trójkątami równobocznymi.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfKmqFDm0>

## Siatka dwudziestościanu foremnego



## Wzory:

- Wzór na pole powierzchni całkowitej

$$P_C = 5a^2\sqrt{3}$$

- Wzór na objętość

$$V = \frac{5}{12}a^3(3 + \sqrt{5})$$

### Przykład 1

Uzupełnijmy w tabeli dane dotyczące wielościanów foremnych. Sprawdźmy, czy dla każdego z tych wielościanów spełniony jest wzór Eulera:  $s - k + w = 2$ , gdzie  $s$  oznacza liczbę ścian,  $k$  - liczbę krawędzi,  $w$  - liczbę wierzchołków.

Wielościan foremny	Liczba ścian	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków
Czworościan			
Sześcian			
Ośmiościan			
Dwunastościan			
Dwudziestościan			

### [Zobacz rozwiązanie](#)

Sprawdźmy wzór Eulera dla każdej bryły z osobna.

Czworościan:  $4 - 6 + 4 = 2$ .

Sześcian:  $6 - 12 + 8 = 2$ .

Ośmiościan:  $8 - 12 + 6 = 2$ .

Dwunastościan:  $12 - 30 + 20 = 2$ .

Dwudziestokąt:  $20 - 30 + 12 = 2$ .

Zatem wzór Eulera zachodzi dla każdej bryły platońskiej.

### Przykład 2

Pole powierzchni dwunastościanu foremnego jest równe  $15 + 6\sqrt{5}$ . Obliczmy sumę długości wszystkich krawędzi tego wielościanu.

### Rozwiązanie

$$3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 15 + 6\sqrt{5}$$

$$a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$a^2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}$$

$$a^2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{25+10\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}$$

$$a^2 = \frac{(5+2\sqrt{5})\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{25+10\sqrt{5}} = \frac{(5+2\sqrt{5})\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{5(5+2\sqrt{5})}$$

$$a^2 = \frac{\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{5} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

Suma długości krawędzi wynosi więc:

$$30 \cdot \sqrt[4]{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$

### Przykład 3

Stosunek długości krawędzi dwudziestościanu foremnego do długości krawędzi dwunastościanu foremnego jest równy  $2\sqrt[3]{3}$ . Obliczmy, który z wielościanów ma większą objętość?

### Rozwiązanie

Niech  $x$  – długość krawędzi dwudziestościanu foremnego,  $y$  – długość krawędzi dwunastościanu foremnego.

Wówczas  $\frac{x}{y} = 2\sqrt[3]{3}$ , czyli  $x = 2y\sqrt[3]{3}$ .

Zatem objętość dwudziestościanu foremnego wynosi:

$$\frac{5}{12} \left(2y\sqrt[3]{3}\right)^3 \left(3 + \sqrt{5}\right) = \frac{5}{12} \cdot 24y^3 \left(3 + \sqrt{5}\right) = 10y^3 \left(3 + \sqrt{5}\right).$$

Dwunastościan foremny ma objętość równą:

$$\frac{y^3}{4} \left(15 + 7\sqrt{5}\right).$$

Porównajmy te dwie objętości:

$$10y^3 \left(3 + \sqrt{5}\right) = y^3 \left(30 + 10\sqrt{5}\right)$$

$$\frac{y^3}{4} \left(15 + 7\sqrt{5}\right) = y^3 \left(\frac{15}{4} + \frac{7\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$30 + 10\sqrt{5} > \frac{15}{4} + \frac{7\sqrt{5}}{4}.$$

Objętość dwudziestościanu foremnego jest większa od objętości dwunastościanu foremnego.

### Przykład 4

Przekątna sześcianu jest o  $\sqrt{6}$  dłuższa od przekątnej ściany tego sześcianu. Obliczmy długość krawędzi i objętość sześcianu.

### Rozwiązanie

Oznaczmy  $a$  jako długość krawędzi sześcianu. Wówczas przekątna ściany ma długość  $a\sqrt{2}$ , a przekątna sześcianu -  $a\sqrt{3}$ . Powstaje więc równanie:

$$a\sqrt{3} = a\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

$$a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = \sqrt{6}$$

$$a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{6}$$

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$

Usuńmy niewymierność z mianownika:

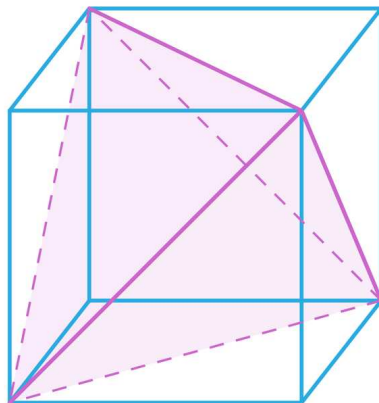
$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18} + \sqrt{12}}{3 - 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$$

Obliczmy objętość naszego sześcianu:

$$V = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^3 = 162\sqrt{2} + 132\sqrt{3}.$$

### Przykład 5

Obliczmy stosunek objętości przedstawionego na rysunku czworościanu foremego do opisanego na nim sześcianu.



## Rozwiązanie

Oznaczmy jako  $a$  długość krawędzi sześcianu. Wówczas długość krawędzi czworościanu ma długość  $a\sqrt{2}$  (przekątna ściany sześcianu).

Objętość czworościanu wynosi więc:

$$V = \frac{(a\sqrt{2})^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{a^3}{3}.$$

Objętość sześcianu wynosi  $a^3$ . Zatem stosunek objętości czworościanu foremnego do opisanego na nim sześcianu wynosi  $\frac{1}{3}$ .

## Słownik

### wielościan

bryła geometryczna ograniczona przez tak zwaną powierzchnię wielościenną, czyli powierzchnię utworzoną z wielokątów o rozłącznych wnętrzach i każdym boku wspólnym dla dwóch wielokątów. Każdy wielościan utworzony jest ze ścian – wielokątów, które razem tworzą powierzchnię wielościanu

### figury przystające

wszystkie figury, które mają taką samą liczbą boków o takiej samej długości oraz kąty między tymi bokami mające takie same wartości; figury przystające mają więc takie samo pole powierzchni i idealnie się na siebie nakładają

# Infografika

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą infografiką, która przedstawia wzory na promienie kul wpisanych i opisanych na wielościanach foremnych. Następnie wykonaj poniższe ćwiczenia.

## Polecenie 2

Oblicz długość promienia kuli opisanej na dwudziestościanie foremnym, którego suma krawędzi wynosi 360. Oblicz pole powierzchni tej kuli.

## Polecenie 3

Oblicz, ile razy pole powierzchni kuli opisanej na dwunastościanie foremnym o krawędzi długości 8 jest większe od pola kuli wpisanej w tę bryłę.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Pole powierzchni czworościanu foremnego jest cztery razy większe od pola powierzchni ośmiościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości tych wielościanów.

Ćwiczenie 8



Dwa czworościany foremne tej samej wielkości połączone podstawami i w ten sposób otrzymano wielościan o sześciu ścianach. Oblicz objętość bryły, jeśli pole jednego czworościanu wynosi  $S\sqrt{6}$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Grażyna Kielczykowska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Bryły platońskie

**Grupa docelowa:** III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X. Stereometria. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- opisuje własności brył platońskich,
- definiuje ich cechy i charakterystykę,
- rozwiązuje zadania dotyczące brył platońskich.

**Strategie i metody nauczania:**

- konstruktywizm,
- dyskusja,
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych.

**Formy zajęć:**

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer, najlepiej w pracowni komputerowej. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wprowadzająca:**

1. Nauczyciel pokazuje uczniom modele brył platońskich.
2. Nauczyciel prosi o scharakteryzowanie tych brył, podanie cech wspólnych.
3. Nauczyciel prosi o zastanowienie się, jak policzyć pola tych brył.
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby z przygotowanych wcześniej siatek stworzyli bryły platońskie i zastanowili się, jak będą wyglądały kule wpisane i opisane na tych bryłach.
2. Nauczyciel prosi, aby uczniowie otworzyli medium, w którym przedstawione są wzory na promienie tych kul. Prosi uczniów o rozwiązanie zadań pod medium. Uczniowie pracują w parach. Następnie wspólnie z nauczycielem omawiają wynik.
3. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne nr 3-8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie napotkane problemy omawiane są na forum klasy.

### **Faza podsumowująca:**

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

### **Praca domowa:**

Nauczyciel poleca uczniom wykonać ćwiczenia interaktywne nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”.

### **Materiały pomocnicze:**

[Bryły platońskie](#)

### **Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:**

Infografika może posłużyć jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.