



Warunek równoległości prostych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Warunek równoległości prostych

Tory kolejowe
Źródło: domena publiczna.

Potrafisz już za pomocą równania kierunkowego opisać prostą, która nie jest równoległa do osi Y oraz narysować zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają równanie $y = ax + b$. W tej lekcji poznasz pewną ważną zależność, która ma wiele zastosowań w geometrii analitycznej, choć na pierwszy rzut oka wydaje się być mało istotna.

Twoje cele

- Rozpoznaś równania prostych równoległych.
- Wyznaczysz równanie prostej równoległej do danej spełniającej określone warunki.
- Wyznaczysz wartości parametrów, przy których proste opisane danymi równaniami są równoległe.

Przeczytaj

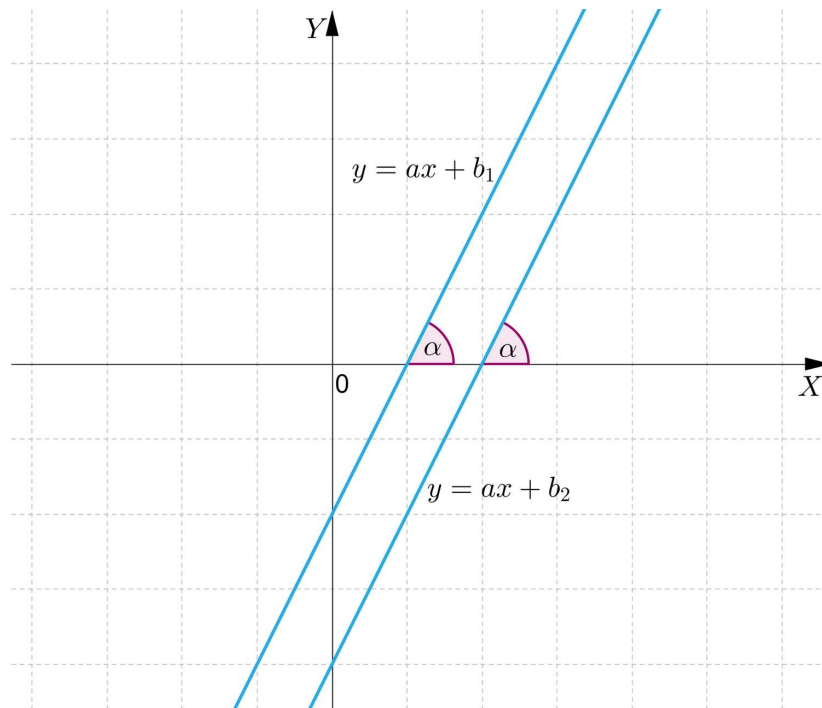
Rozważmy prostą k określoną wzorem $k: y = a_1x + b_1$ oraz prostą l określoną wzorem $l: y = a_2x + b_2$.

Założmy teraz, że proste te są równoległe. Oznacza to, że są nachylone do płaszczyzny X pod tym samym kątem. Ponadto wiemy już, że a_1 jest równe tangensowi kąta nachylenia prostej k do osi X , zaś a_2 jest równe tangensowi kąta nachylenia prostej l do osi X . A zatem $a_1 = a_2$.

Można więc sformułować wniosek, że proste opisane równaniami kierunkowi są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe tych równań są równe.

Warunek równoległości prostych

$k: y = a_1x + b_1 \parallel l: y = a_2x + b_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_1 = a_2$



Dwie proste równoległe.

Źródło: licencja: CC BY 3.0.

Przykład 1

Rozstrzygniemy, czy proste o podanych równaniach są równoległe.

a) $k: y = \sqrt{3}x - x + 1, l: y = x - \sqrt{3}x + 5$

Wyznamy najpierw współczynniki kierunkowe podanych prostych:

$$k: y = \sqrt{3}x - x + 1 = (\sqrt{3} - 1)x + 1 \Rightarrow a_1 = \sqrt{3} - 1,$$

$$l: y = x - \sqrt{3}x + 5 = (1 - \sqrt{3})x + 5 \Rightarrow a_2 = 1 - \sqrt{3} = -(\sqrt{3} - 1)$$

Zauważmy, że wyznaczone współczynniki kierunkowe są liczbami przeciwnymi. Zatem proste nie są równoległe.

$$b) k: y = \sqrt{2}x - x + 4, l: y = \frac{x}{(\sqrt{2}+1)} - 7$$

Wyznamy najpierw współczynniki kierunkowe podanych prostych:

$$k: y = \sqrt{2}x - x + 4 = (\sqrt{2} - 1)x + 4 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2} - 1$$

$$l: y = \frac{x}{(\sqrt{2}+1)} - 7 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = (\sqrt{2} - 1) \cdot (2 - 1) = \\ = \sqrt{2} - 1$$

Zauważmy, że wyznaczone współczynniki kierunkowe są równe. Zatem proste są równoległe.

Przykład 2

Wyznamy **równanie kierunkowe prostej** przechodzącej przez punkt A o współrzędnych $(-0, 5; 4)$ równoległej do prostej o równaniu $y = (-2x) + 5$.

Prosta taka ma równanie postaci $y = ax + b$.

Ponieważ ma być ona równoległa do prostej o równaniu $y = (-2x) + 5$, więc $a = (-2)$.

Aby wyznaczyć współczynnik b wystarczy do równania $y = (-2x) + b$ podstawić współrzędne punktu A :

$$4 = (-2) \cdot (-0, 5) + b$$

$$4 = 1 + b$$

$$b = 3$$

Zatem szukane równanie prostej to $y = (-2x) + 3$.

Przykład 3

Wyznamy wartość parametru m , dla którego proste o równaniach $y = x - mx + m$ i $y = 2mx - 5x - 9$ są równoległe.

Zacniemy od uporządkowania równań, aby odczytać współczynniki kierunkowe:

$$y = x - mx + m = (1 - m)x + m \Rightarrow a_1 = 1 - m$$

$$y = 2mx - 5x - 9 = (2m - 5)x - 9 \Rightarrow a_2 = 2m - 5$$

Ponieważ proste są równoległe dokładnie wtedy, gdy mają równe współczynniki kierunkowe, wystarczy więc rozwiązać równanie:

$$1 - m = 2m - 5$$

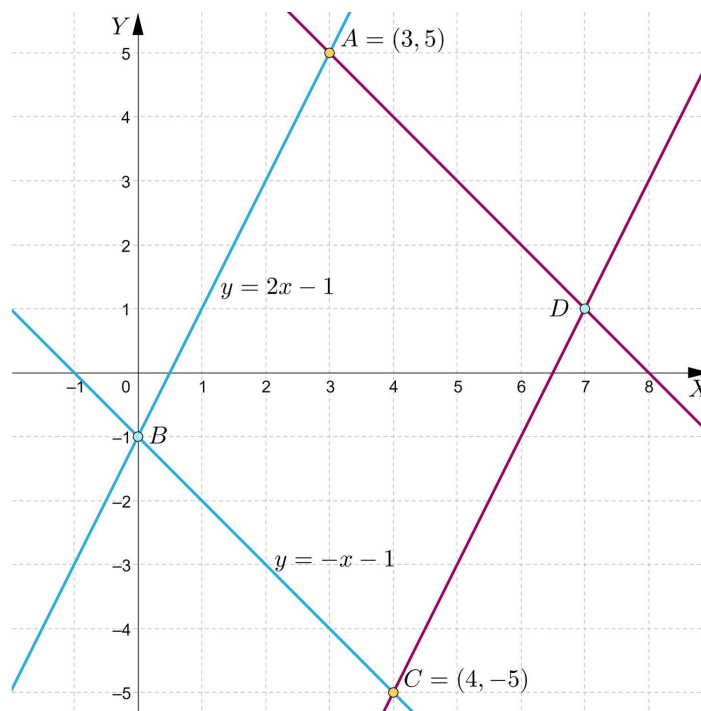
$$-3m = (-6)$$

$$m = 2$$

Wobec powyższego jedyną wartość parametru m , dla której proste o równaniach $y = x - mx + m$ i $y = 2mx - 5x - 9$ są równoległe wynosi 2.

Przykład 4

Dwa boki równoległoboku $ABCD$ zawarte są w prostych o równaniach $y = 2x - 1$ oraz $y = (-x) - 1$. Ponadto $A = (3; 5)$ i $C = (4; -5)$. Wyznacz równania prostych zawierających pozostałe dwa boki równoległoboku oraz współrzędne wierzchołków B i D .



Źródło: licencja: CC BY 3.0.

Współrzędne trzeciego wierzchołka równoległoboku - nazwijmy go B - możemy obliczyć rozwiązując układ równań opisujących obie proste. W tym szczególnym przypadku możemy zauważyć, że obie proste przecinają oś Y w punkcie $(0; -1)$ i nie są to te same proste, zatem jest to ich jedyny punkt wspólny. Stąd $B = (0; -1)$.

Zauważmy, że punkt $A = (3; 5)$ należy do prostej o równaniu $y = 2x - 1$, ponieważ współrzędne punktu A spełniają równanie tej prostej. Ponadto punkt C leży na prostej o równaniu $y = (-x) - 1$.

Wyznamy teraz równanie prostej AD .

Ponieważ jest ona równoległa do prostej BC (więc równania obu prostych mają równe współczynniki kierunkowe), to jej równanie ma postać $y = (-x) + b$. Wyraz wolny b możemy wyznaczyć, korzystając z faktu, że punkt $A = (3; 5)$ należy do tej prostej. Po podstawieniu współrzędnych punktu $A = (3; 5)$ do równania $y = (-x) + b$ otrzymamy:

$$5 = (-3) + b$$

$$b = 8$$

Zatem równanie prostej AD to $y = (-x) + 8$.

Analogicznie postąpimy w przypadku prostej CD . Ponieważ prosta CD jest równoległa do prostej AB , zatem jej równanie ma taki sam współczynnik kierunkowy jak równanie prostej AB .

Równanie kierunkowe prostej CD ma postać $y = 2x + b_1$. Aby wyznaczyć wyraz wolny b_1 podstawimy do równania $y = 2x + b_1$ współrzędne punktu C :

$$(-5) = 2 \cdot 4 + b_1$$

$$(-5) - 8 = b_1$$

$$(-13) = b_1$$

Zatem równanie prostej CD to $y = 2x - 13$.

Aby wyznaczyć współrzędne wierzchołka D , wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y = (-x) + 8 \\ y = 2x - 13 \end{cases}$$

Z powyższego układu równań wynika

$$(-x) + 8 = 2x - 13$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = (-7) + 8 = 1 \end{cases}$$

Zatem współrzędne wierzchołka D to $(7, 1)$.

Przykład 5

Dane są współrzędne trzech punktów $X = (2; 3)$, $Y = (4; -1)$, $Z = (5; 0)$. Wyznacz współrzędne takich punktów A , aby wszystkie cztery punkty X , Y , Z i A były wierzchołkami równoległoboku.

Zauważmy najpierw, że będą trzy takie punkty A :

W pierwszej kolejności wyznaczmy równania prostych XY , YZ i XZ .

Ponieważ żadna z tych prostych nie jest równoległa do osi Y , ich równania są postaci $y = ax + b$.

Aby wyznaczyć równanie prostej XY , tworząc układ równań podstawiamy do równania $y = ax + b$ najpierw współrzędne punktu X , potem współrzędne punktu Y

$$\begin{cases} 3 = 2a + b \\ (-1) = 4a + b \end{cases}$$

Po odjęciu równań stronami otrzymujemy

$$4 = (-2a)$$

$$a = (-2)$$

$$\begin{cases} a = (-2) \\ b = 3 - 2 \cdot (-2) = 7 \end{cases}$$

Zatem równanie prostej XY to $y = -2x + 7$.

Analogicznie wyznaczamy równania prostych YZ : $y = x - 5$ oraz prostej XZ : $y = (-x) + 5$.

W trzecim przypadku współrzędne punktu A wyznaczymy, rozwiązując układ równań opisujących proste AX i AZ . Otrzymamy wówczas równoległobok $XYZA$.

Ponieważ prosta AX jest równoległa do prostej YZ , zatem jej równanie jest postaci $y = x + b_1$. Po podstawieniu za zmienne x i y współrzędnych punktu $X(2; 3)$ wyznaczamy b_1 :

$$3 = 2 + b_1$$

$$b_1 = 1$$

Zatem równanie prostej AX to $y = x + 1$.

Analogicznie wyznaczamy równanie prostej $AZ : y = (-2x) + 10$. Rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = (-2x) + 10 \end{cases}$$

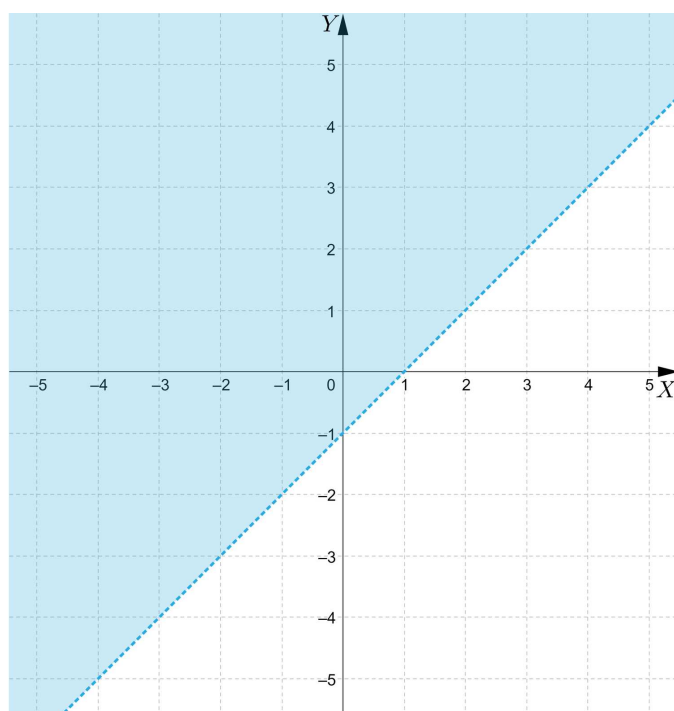
otrzymujemy współrzędne punktu $A = (3; 4)$.

Postępując podobnie otrzymujemy: w przypadku drugim równoległobok $YZXA$, gdzie $A = (1; 2)$ oraz w przypadku pierwszym równoległobok $ZXYA$, gdzie $A = (7; -4)$.

Przykład 6

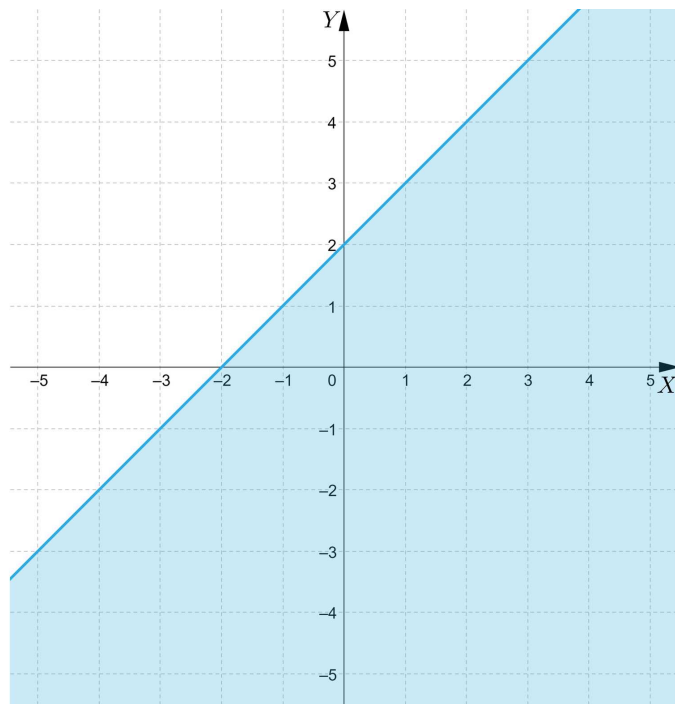
W prostokątnym układzie współrzędnych narysujemy zbiór wszystkich punktów spełniających warunek $x - 1 < y \leq x + 2$.

Zauważmy najpierw, że warunek $x - 1 = y$ spełniają punkty o współrzędnych (x, y) , które leżą na prostej opisanej tym równaniem. Warunek $x - 1 < y$ opisuje takie punkty, dla których druga współrzędna jest większa od pierwotnej, a zatem punkty leżące „ponad” prostą o równaniu $x - 1 = y$.



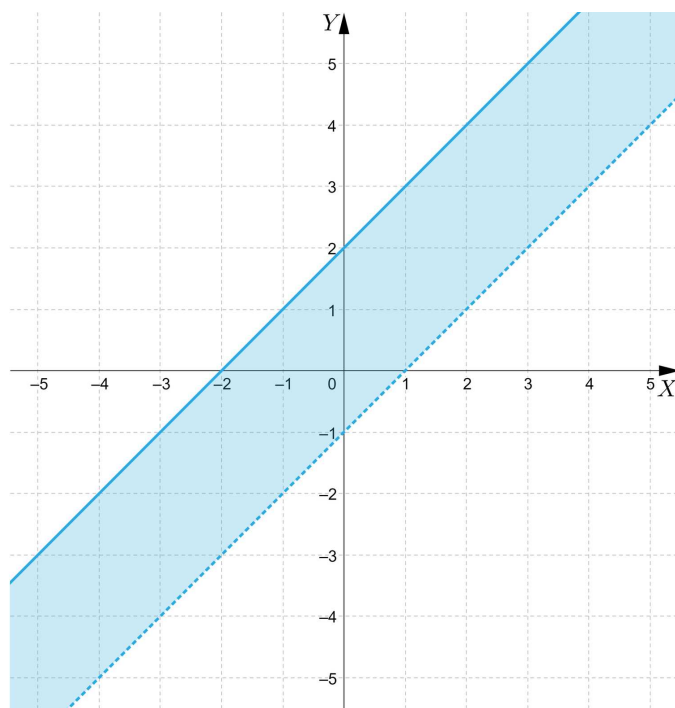
Źródło: licencja: CC BY 3.0.

Analogicznie możemy dojść do wniosku, że warunek $y \leq x + 2$ opisuje punkty, które leżą „na” prostej lub „pod” prostą o równaniu $y = x + 2$.



Źródło: licencja: CC BY 3.0.

Oba warunki jednocześnie spełniają współrzędne punktów, które leżą pomiędzy prostymi o równaniach $x - 1 = y$ oraz $y = x + 2$ lub na prostej o równaniu $y = x + 2$.



Źródło: licencja: CC BY 3.0.

Słownik

równanie kierunkowe prostej

równanie postaci $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$; można nim opisać każdą prostą, która nie jest równoległa do osi Y

warunek równoległości prostych

twierdzenie matematyczne, które orzeka, że proste opisane równaniami kierunkowymi są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe tych prostych są równe

Aplet

Polecenie 1

Przy pomocy suwaków zmieniaj wartości współczynników równań kierunkowych obu prostych. Zwróć uwagę, kiedy proste są równoległe.

Polecenie 2

Wyznacz wartość parametru a tak, aby proste k i l były równoległe.

Równania kierunkowe prostych k i l	Wartość parametru a , dla którego proste k i l są równoległe
$k: y = ax + a, l: y = 3x - 7$	
$k: y = (a - 2)x + 5, l: y = 4x - 5$	
$k: y = 2 + 3x + 1, l: y = 3x + 7$	
$k: y = ax - 3x + 11, l: y = 3x + 2 - 7$	

Polecenie 3

W wyznaczone miejsce wpisz równanie prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt A .

Równanie prostej k	Współrzędne punktu A	Równanie prostej równoległej do k przechodzącej przez A
$y = (-3)$	$A = (-2; 3)$	
$y = (-0, 5x)$	$A = (-4; 1)$	
$y = 3, 25x - 5$	$A = (8; 22)$	

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Czy podane pary równań opisują proste równoległe?

Pary równań	Tak	Nie
$y = \frac{1}{4}x - 10$ i $y = 0,25x + 6$	☐	☐
$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 7$ i $y = \sqrt{2}x + 3$	☐	☐
$y = \sqrt{3}x + x - 4$ i $y = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)}x + 3$	☐	☐
$y = \sqrt{5}x - x - 4$ i $y = \frac{4}{(\sqrt{5}-1)}x + 3$	☐	☐

Ćwiczenie 2



Wskaż wszystkie równania, które opisują prostą przechodzącą przez punkt

$A = (3; -6)$, równoległą do prostej $k: y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}x - 7$.

☐ $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}x - 6$

☐ $y = \frac{1}{3}x - \sqrt{3}$

☐ $y = 3x - 6$

☐ $x - 3y - 21 = 0$

☐ $y = (-6)$

☐ $y = \frac{1}{3}x - 7$

Ćwiczenie 3



Wyznacz m wiedząc, że podane niżej pary równań opisują proste równoległe.

Równania prostych równoległych	Wartość parametru m
$y = (2m - 3)x + 4$ $y = (-4x) + 7$	
$y = 3x + m$ $y = 4 + (4 + m)x$	
$y = m - mx$ $y = (2m - 6)x - 9$	
$y = 8m$ $y = mx - 10x + 7$	
$y = 4 - (2m + \sqrt{2})x$ $y = (\sqrt{2}m + 2)x + 8$	

Ćwiczenie 4



Przyporządkuj a wiedząc, że podane niżej pary równań opisują proste równoległe.

$$\begin{aligned}y &= x + 6a \\ y &= |a - 5|x - 3a\end{aligned}$$

$$a = 2$$

$$\begin{aligned}y &= |7 - a|x \\ y &= 5 + 3a + 4,5x\end{aligned}$$

$$a = 4, a = 6$$

$$\begin{aligned}y &= 9 - |2 - a|x \\ y &= 5\end{aligned}$$

$$a = 2,5, a = 11,5$$

$$y = 3x + 2y = |4 + a|x - 8$$

$$a = (-7), a = (-1)$$

Ćwiczenie 5



Dany jest trapez $ABCD$. Wyznacz równanie prostej zawierającej krótszą podstawę AB trapezu, znając:

- równanie $y = 0,5x - 1$ prostej zawierającej dłuższą podstawę CD trapezu,
- równanie $y = (-2x) + 2$ prostej zawierającej wysokość poprowadzoną przez wierzchołek A

oraz wiedząc, że ramię AD zawiera się w osi Y .

Ćwiczenie 6



Bok AB sześciokąta foremnego $ABCDEF$ ma długość 6 i zawiera się w prostej o równaniu $y = 1$. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się bok DE tego sześciokąta.

Ćwiczenie 7



Zaznacz wszystkie pary równań, które opisują proste równoległe. Możesz wykorzystać postać kierunkową prostej.

☐ $2x - 3x + 7 = 0$ i $2x + 5x - 10 = 0$

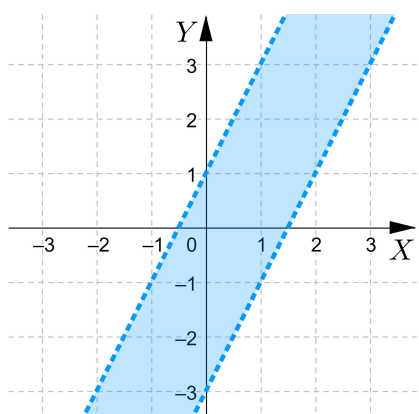
☐ $2x - 3y + 7 = 0$ i $2x - 3y - 10 = 0$

☐ $7y + 10 - 5x = 0$ i $7y + 10 + 6x = 0$

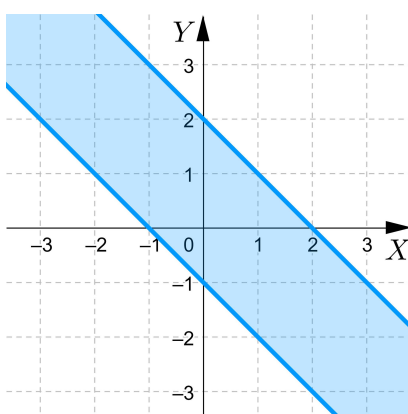
☐ $3x - 5y + 2 = 0$ i $(-6x) + 10y - 10 = 0$

Ćwiczenie 8

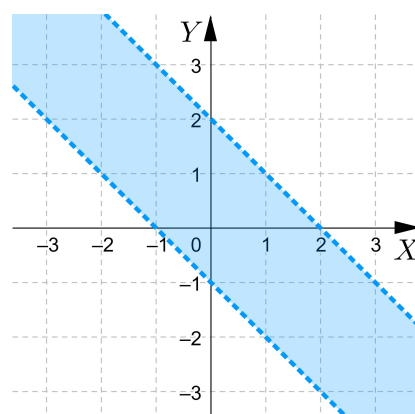
Połącz w pary ilustracje z warunkami, które ją opisują.



$2x - 3 < y < 2x + 1$



$(-x) - 1 \leq y \leq (-x) + 2$



$(-x) - 1 < y < (-x) + 2$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Warunek równoległości prostych

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje równania prostych równoległych,
- wyznacza równanie prostej równoległej do danej spełniającej określone warunki,
- wyznacza wartości parametrów, przy których proste opisane danymi równaniami są równoległe,
- sprawdza, analizując współczynniki kierunkowe prostych, jak ułożone są proste na płaszczyźnie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- eksperyment myślowy;

- dyskusja;
- konkurs zadaniowy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają równanie prostej.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.
3. Następnie uczniowie w małych grupach zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj”.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z Apletem, obserwują kiedy dwie proste są równoległe.
2. Następnie uczniowie w parach rozwiązują polecenia 2 i 3. Zapisują ewentualne problemy. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, odpowiedzi dyskutuje z uczniami na bieżąco.
3. Uczniowie biorą udział w konkursie zadaniowym. W parach rozwiązują ćwiczenia interaktywne. Trzy pary, które najszybciej poprawnie rozwiążą poprawnie zadania, otrzymują oceny bardzo dobre.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń interaktywnych.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do celów postawionych na początku lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Proste równoległe, proste prostopadłe](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać Aplet do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące warunku równoległości prostych.