Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji

Źródło: Dawid Zawila, dostępny w internecie: unsplash.com.

Poszukiwanie ekstremów funkcji i znajomość zasad ich znajdowania jest ważna z praktycznego punktu zastosowań matematyki. Jednym z ciekawych problemów jest zagadnienie brachistochrony. Brachistochrona, inaczej zwana krzywą najkrótszego spadku, to krzywa po której masa punktowa pod wpływem stałej siły stacza się w możliwie najkrótszym czasie. Problem brachistochrony był jednym z pierwszych klasycznych problemów, do rozwiązania którego wykorzystano wyniki związane z istnieniem ekstremów, otrzymane dla funkcji rzeczywistych. Zagadnienie to jako pierwszy rozważał Bernoulli. Problem ten został rozwiązany niezależnie przez Leibniza, Newtona, Bernoulliego oraz de l’Hospitala.

Twoje cele

- Dowiesz się jaki jest warunek wystarczający, aby funkcja posiadała ekstremum.

Przeczytaj

> **Twierdzenie: Warunek wystarczający istnienia ekstremum**
>
> **a)** Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a,\ b)$ i $f\prime(x) < 0$ dla $x \in (a,\ x_0)$ oraz $f\prime(x) > 0$ dla $x \in (x_0,\ b)$, to funkcja ma w punkcie x_0 minimum.
>
> **b)** Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a,\ b)$ i $f\prime(x) > 0$ dla $x \in (a,\ x_0)$ oraz $f\prime(x) < 0$ dla $x \in (x_0,\ b)$, to funkcja ma w punkcie x_0 maksimum.

Powyższe twierdzenie można wypowiedzieć prościej. Zdefiniujmy następujące zwroty.

- Jeśli wartość danej funkcji f jest w każdym punkcie danego przedziału $(a,\ b)$ liczbą dodatnią (ujemną), to mówimy, że funkcja f jest w przedziale $(a,\ b)$ dodatnia (ujemna) lub, że **funkcja f ma w przedziale $(a,\ b)$ znak dodatni (ujemny)**.

- Jeśli istnieje liczba dodatnia ε taka, że w przedziale $(x_0 - \varepsilon,\ x_0)$ funkcja jest dodatnia (ujemna), a w przedziale $(x_0,\ x_0 + \varepsilon)$ jest odpowiednio ujemna (dodatnia), to mówimy, że przy przejściu przez punkt x_0 funkcja zmienia znak z „$+$” na „$-$” (z „$-$” na „$+$”).

Możemy teraz Twierdzenie o warunku wystarczającym istnienia ekstremum wyrazić w następujący sposób:

Jeżeli x_0 jest miejscem zerowym pochodnej funkcji f (czyli jest spełniony warunek konieczny istnienia ekstremum) i przy przejściu przez punkt x_0 pochodna funkcji zmienia znak, to w punkcie x_0 funkcja ma ekstremum, przy czym w punkcie x_0 jest:

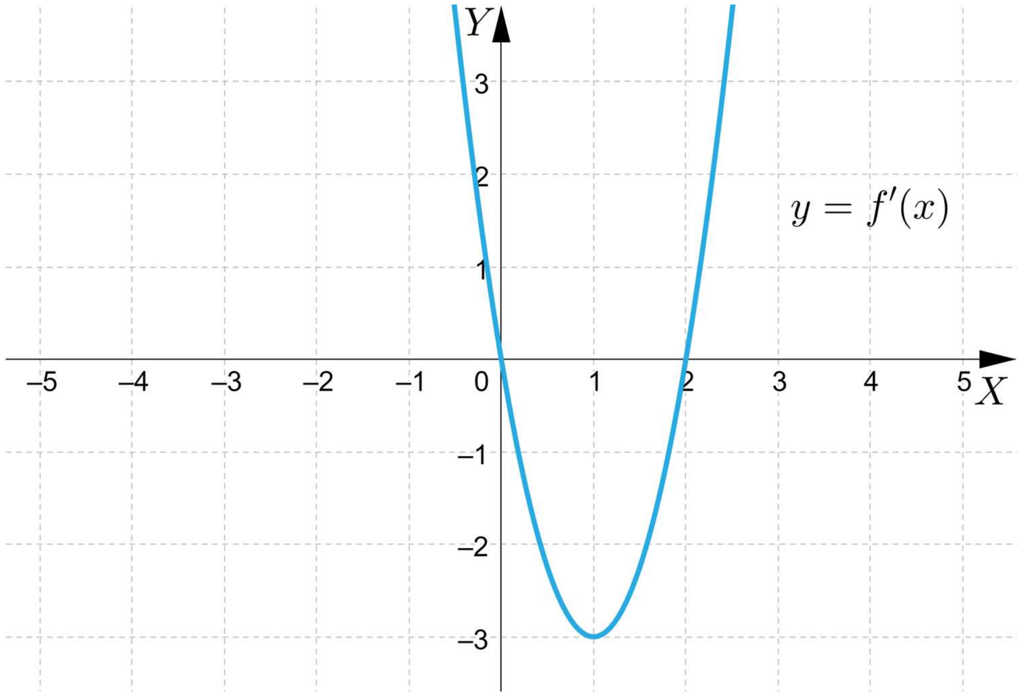
a) maksimum, gdy znak pochodnej funkcji f zmienia się z „$+$” na „$-$”,

b) minimum, gdy znak pochodnej funkcji f zmienia się z „$-$” na „$+$”.

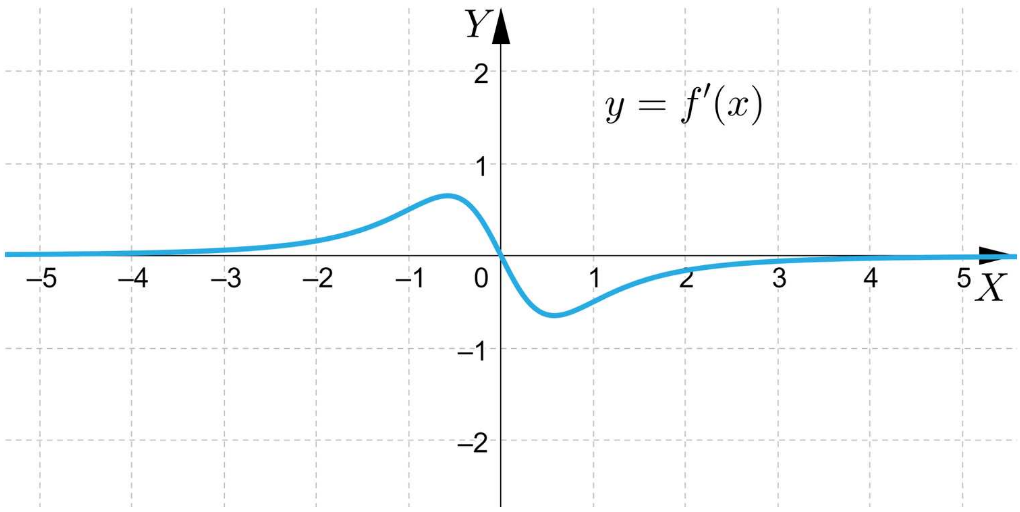
Przykład 1

Na podstawie wykresów pochodnej funkcji przedstawionych na poniższych rysunkach ustalimy punkty, w których te funkcje osiągają ekstremum.

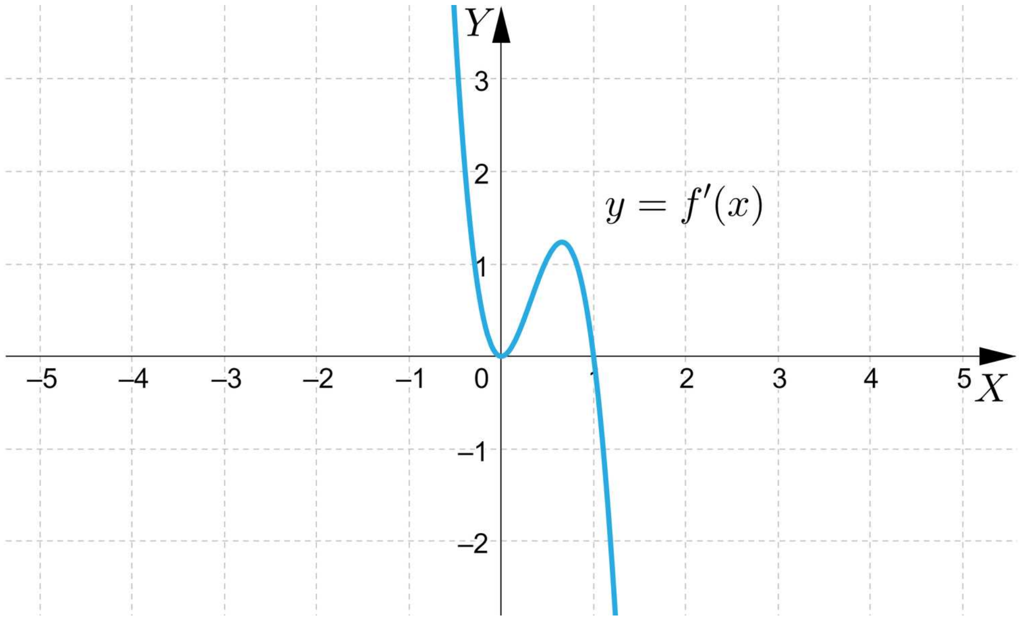
a)



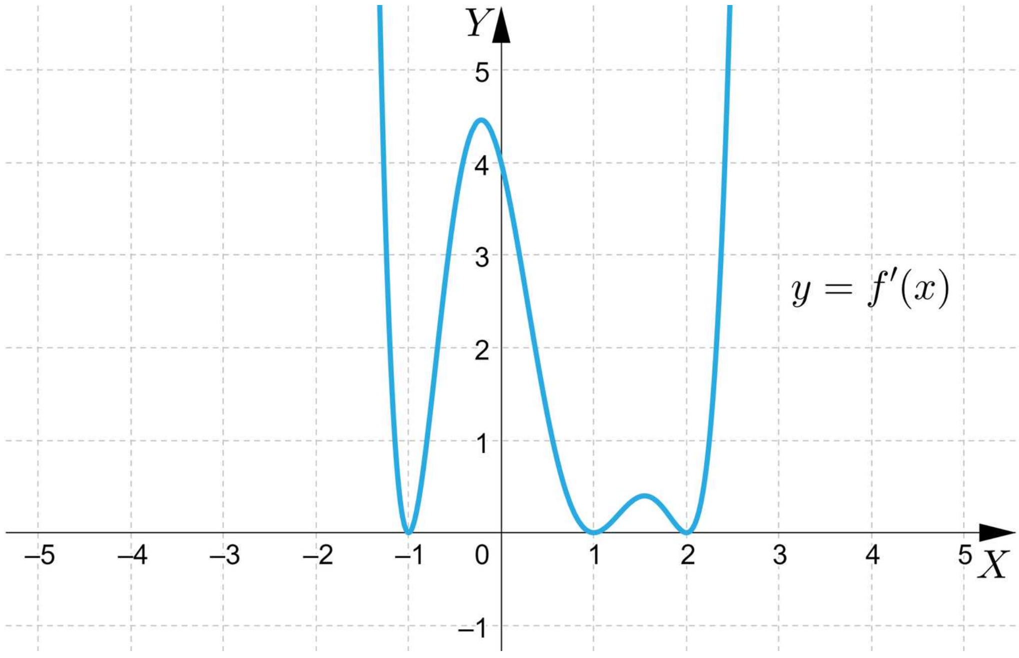
b)



c)



d)



Rozwiązanie:

Ad a)

Funkcja f osiąga ekstrema w punktach 0 i 2. W punkcie 0 pochodna przyjmuje wartość zero i w otoczeniu tego punktu zmienia znak z „$+$” na „$-$”, zatem spełniony jest warunek wystarczający, czyli funkcja osiąga w tym punkcie maksimum. W punkcie 2 pochodna przyjmuje wartość zero i w otoczeniu tego punktu zmienia znak z „$-$” na „$+$”, zatem spełniony jest warunek wystarczający, czyli funkcja osiąga w tym punkcie minimum.

Ad b)

Funkcja f osiąga ekstrema w punkcie 0. W punkcie 0 pochodna przyjmuje wartość zero i w otoczeniu tego punktu zmienia znak z „+” na „−”, zatem spełniony jest warunek wystarczający, czyli funkcja osiąga w tym punkcie maksimum.

Ad c)

Funkcja f może osiągać ekstrema w punktach 0 i 1. W punkcie 0 pochodna przyjmuje wartość zero, ale w otoczeniu tego punktu nie zmienia znaku, zatem nie jest spełniony warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji. Funkcja nie ma w tym punkcie ekstremum. W punkcie 1 pochodna przyjmuje wartość zero oraz zmienia znak zatem spełniony jest warunek wystrczający ekstremum. Funckja posiada w tym punkcie ekstremum.

Ad d)

Funkcja f może osiągać ekstrema w punktach (-1), 1, 2. W punktach tych pochodna przyjmuje wartość zero, ale w otoczeniach tych punktów nie zmienia znaku, zatem nie jest spełniony warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji. Funkcja nie posiada w tych punktach ekstremów.

Przykład 2

Wykażemy, że funkcja dana wzorem $f(x) = x^2(x-2)^2$ ma trzy ekstrema.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R}$. Funkcja $f(x)$ jako wielomian jest różniczkowalna w całej dziedzinie. Jej pochodna dana jest wzorem $f\prime(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x, D_{f\prime} = D_f$.

Warunek konieczny:

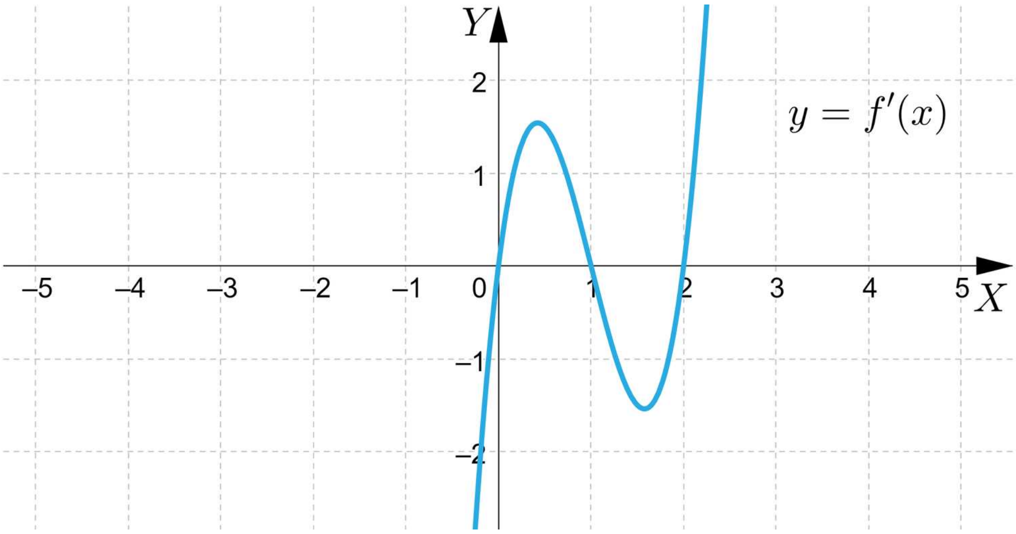
$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0,$

$x(x-1)(x-2) = 0,$

$x = 0, x = 1, x = 2$

Warunek wystarczający:

Poniższy rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji.



$f\prime(x) > 0$, dla $x \in (0,\ 1) \cup (2,\ \infty)$.

$f\prime(x) < 0$, dla $x \in (-\infty,\ 0) \cup (1,\ 2)$.

W punktach 0 i 2 pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni, więc funkcja posiada w nich minimum lokalne. W punkcie 1 pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny, więc funkcja posiada w nim maksimum lokalne. Zatem funkcja posiada trzy ekstrema.

Przykład 3

Dla jakich wartości parametru a funkcja f dana wzorem $f(x) = x^3 - ax^2 + 3x$ **nie** spełnia warunku wystarczającego istnienia ekstremum w otoczeniu pewnego punktu?

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x)$ jako wielomian jest różniczkowalna w zbiorze $\mathbb{R}$. Jej pochodna dana jest wzorem $f\prime(x) = 3x^2 - 2ax + 3$, $D_{f\prime} = D_f$. Aby nie był spełniony warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji jej pochodna nie zmienia znaku, czyli w naszym przypadku $f\prime(x) \geqslant 0$. Otrzymujemy kolejno:

$$3x^2 - 2ax + 3 \geqslant 0,$$

$$\Delta = 4a^2 - 36 = 4\left(a^2 - 9\right).$$

Aby pochodna była niedodatnia lub nieujemna $\Delta \leqslant 0$. Inaczej mówiąc, pochodna jest opisana funkcją kwadratową. Ramiona paraboli będącej jej wykresem skierowane są ku górze, zatem, aby pochodna nie zmieniała znaku może posiadać co najwyżej jedno miejsce zerowe. Stąd otrzymujemy $a \in \langle -3,\ 3\rangle$. Dla $a \in \langle -3,\ 3\rangle$ nie jest spełniony warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji f.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D18D62daM

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ funkcja f dana wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(m-1)x^2 + \left(m^2 - 1\right)x + 2$ spełnia warunek wystarczający istnienia ekstremum w otoczeniu pewnego punktu?

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x)$ jako wielomian jest różniczkowalna w zbiorze $D_f = \mathbb{R}$. Jej pochodna dana jest wzorem

$f\prime(x) = x^2 + (m-1)x + m^2 - 1, D_{f\prime} = D_f.$

Aby spełniony był warunek wystarczający istnienia ekstremum dla tej funkcji wystarczy sprawdzić czy pochodna zmienia znak w otoczeniu pewnego punktu, ponieważ dziedziną pochodnej jest $\mathbb{R}$. Zatem w naszym przypadku pochodna $f\prime(x)$ powinna mieć dwa miejsca zerowe, czyli $\Delta > 0$. Otrzymujemy kolejno:

$\Delta = -3m^2 - 2m + 5 = -3(m-1)\left(m + \frac{5}{3}\right) > 0,$

$m \in \left(-\frac{5}{3},\ 1\right).$

Dla $m \in \left(-\frac{5}{3},\ 1\right)$ funkcja posiada punkty dla których spełniony jest warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji f.

Słownik

funkcja różniczkowalna

funkcję nazywamy różniczkowalną jeśli ma pochodną w każdym punkcie dziedziny

warunek konieczny istnienia ekstremum

jeśli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i ma w tym punkcie ekstremum, to

$$f\prime(x_0) = 0$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem, a następnie wykonaj polecenia zamieszczone pod filmem.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1C4z1Di3

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej warunku wystarczającego istnienia ekstremum funkcji.

Polecenie 2

Polecenie 3

Sprawdzimy, kiedy spełniony jest warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$.

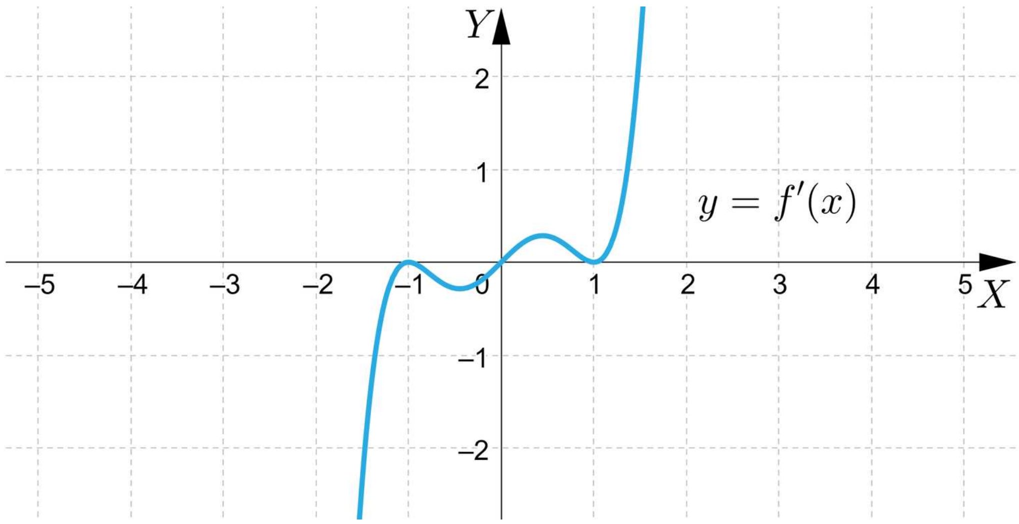
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

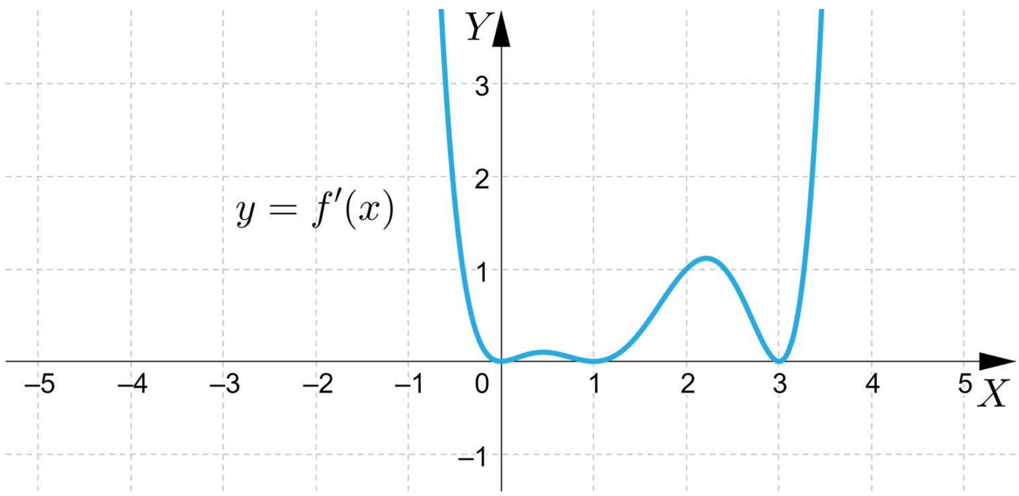
Ćwiczenie 1

Na rysunkach przedstawiono fragmenty pewnych pochodnych funkcji różniczkowalnych. Na tej podstawie oceń prawdziwość każdego zdania.

a)

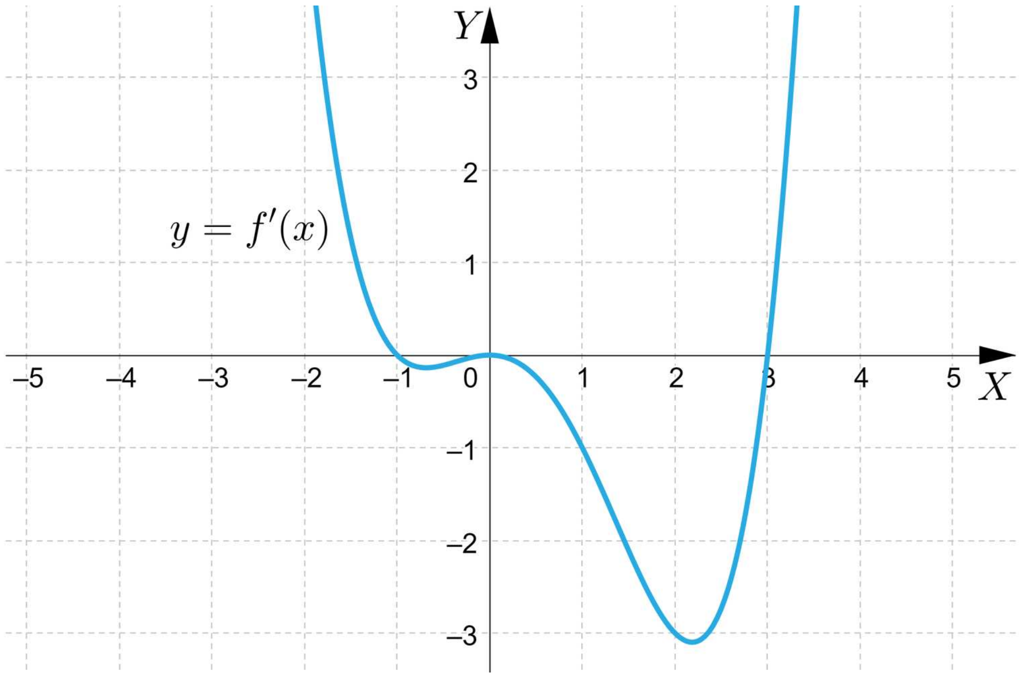


b)



Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono fragment pewnej pochodnej funkcji różniczkowalnej.



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Wykaż, że funkcja dana $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 2x^2$ ma dwa ekstrema.

Ćwiczenie 6

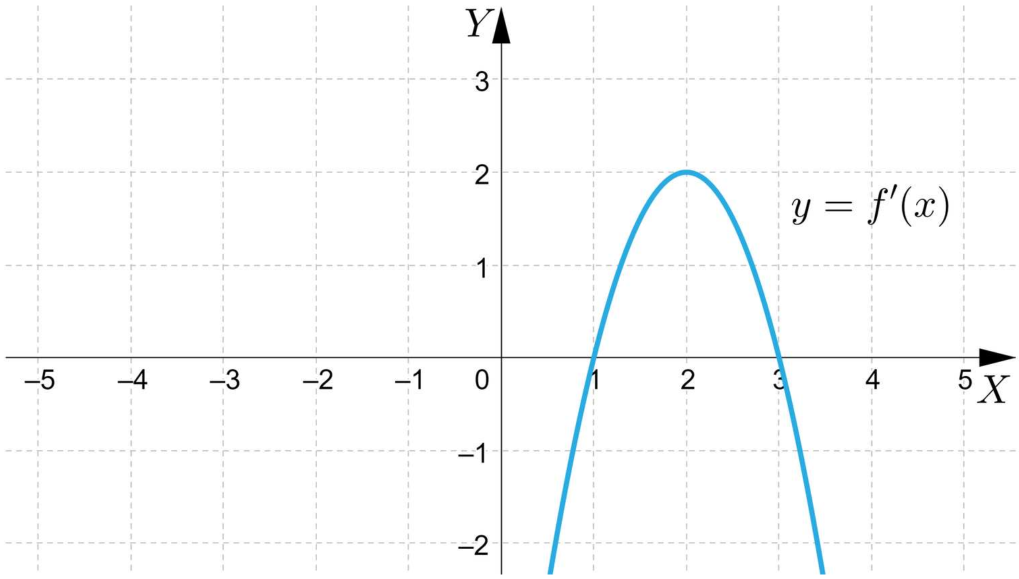
Wykaż, że funkcja dana wzorem $f(x) = x\sqrt{x}$, dla $x \in (0,\ \infty)$ **nie** posiada ekstremum.

Ćwiczenie 7

Dla jakich wartości parametru a funkcja f dana wzorem $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}ax^3 + x - a$ **nie** spełnia warunku wystarczającego istnienia ekstremum w otoczeniu pewnego punktu?

Ćwiczenie 8

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres pochodnej funkcji $f(x) = ax^3 + 4x^2 + bx + 1$. Dla jakich wartości a i b funkcja f posiada dwa ekstrema w punktach 1 i 3 ?



Ćwiczenie 9

Dana jest funkcja $f(x) = -x^3 + px^2 - 24x + 17$. Dla jakiej wartości parametru p funkcja osiąga maksimum w punkcie $x = 4$?

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Niemczynowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje obywatelskie.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcie maksimum lokalnego (właściwego/niewłaściwego) funkcji;
- zna pojęcie minimum lokalnego (właściwego/niewłaściwego) funkcji;

- szkicuje przykłady funkcji posiadających ekstrema lokalne;
- zna warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja panelowa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami dotyczącymi monotoniczności funkcji i jej miejsc zerowych.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji o temacie: “Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji”.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3 – 4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.

2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w filmie samouczku. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie polecenia nr 2 – 3 z sekcji „Film samouczek”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.
4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1 – 2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3 – 5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6 – 7 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Ekstrema funkcji

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek można wykorzystać jako powtórzenie wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji.