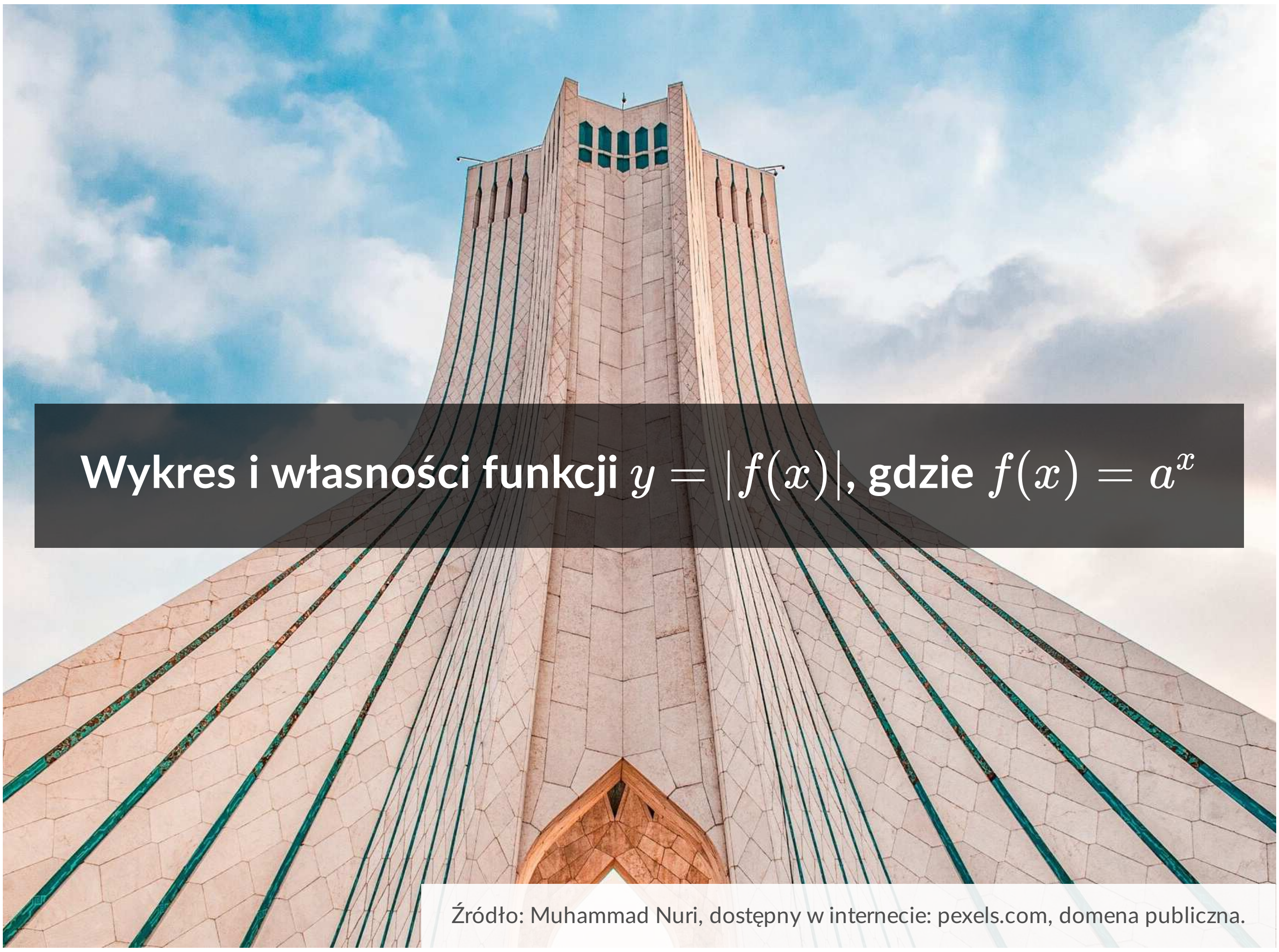
# Wykres i własności funkcji $y = |f(x)|$, gdzie $f(x) = a^x$



# Wykres i własności funkcji $y = |f(x)|$, gdzie $f(x) = a^x$

Źródło: Muhammad Nuri, dostępny w internecie: pexels.com, domena publiczna.

Funkcja wykładnicza ma wiele ciekawych własności. Przesunięcia, odbicia, czy symetria względem osi układu współrzędnych mają wpływ na zmianę wzoru tej funkcji jak i na zmianę położenia jej wykresu. W trakcie lekcji omówimy wykres i własności funkcji wykładniczej $f(x) = |a^x|$.

**Twoje cele**

- Wyznaczysz różnice pomiędzy wykresami i wzorami różnych funkcji wykładniczych.
- Określisz własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wzoru i wykresu.
- Wymienisz własności funkcji wykładniczej po złożeniu tej funkcji z wartością bezwzględną.

# Przeczytaj

Wykonanie przekształcenia geometrycznego na wykresie funkcji wykładniczej określonej wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ oraz $x \in \mathbb{R}$, powoduje zmianę wzoru i własności tej funkcji.

> **Definicja: przekształcenie wykresu funkcji $|f(x)|$**
>
> Wykres funkcji $|f(x)|$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi $X$ tej części wykresu funkcji $f(x)$, która znajduje się pod osią $X$.

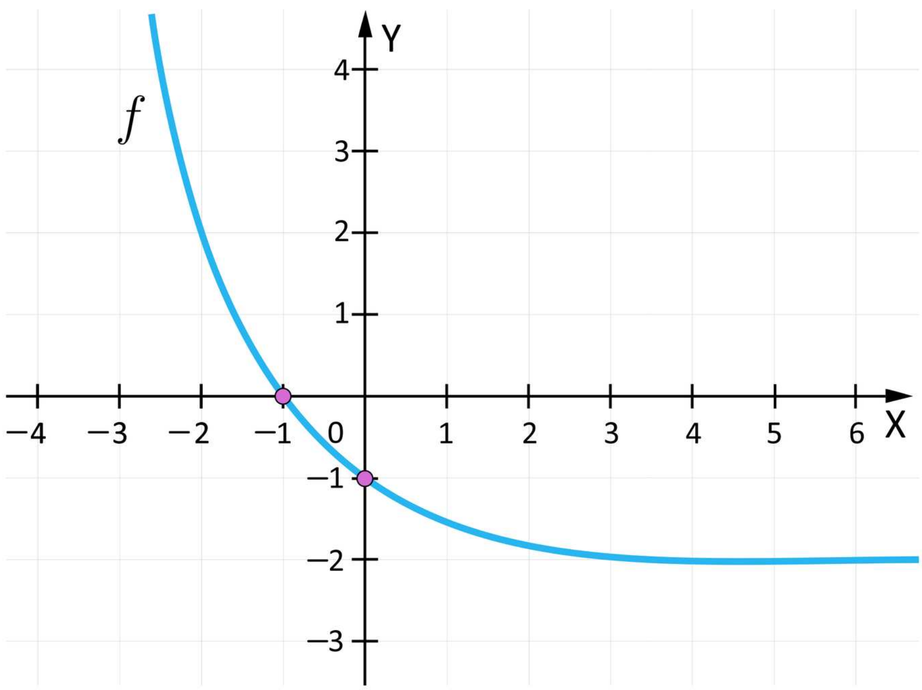
Porównamy wykresy i własności funkcji określonych wzorami $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = |a^x|$.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$.

W tym celu uzupełnimy tabelę wartości tej funkcji dla kilku argumentów.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $0$ | $-1$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{7}{4}$ |

Wykres tej funkcji wygląda następująco:

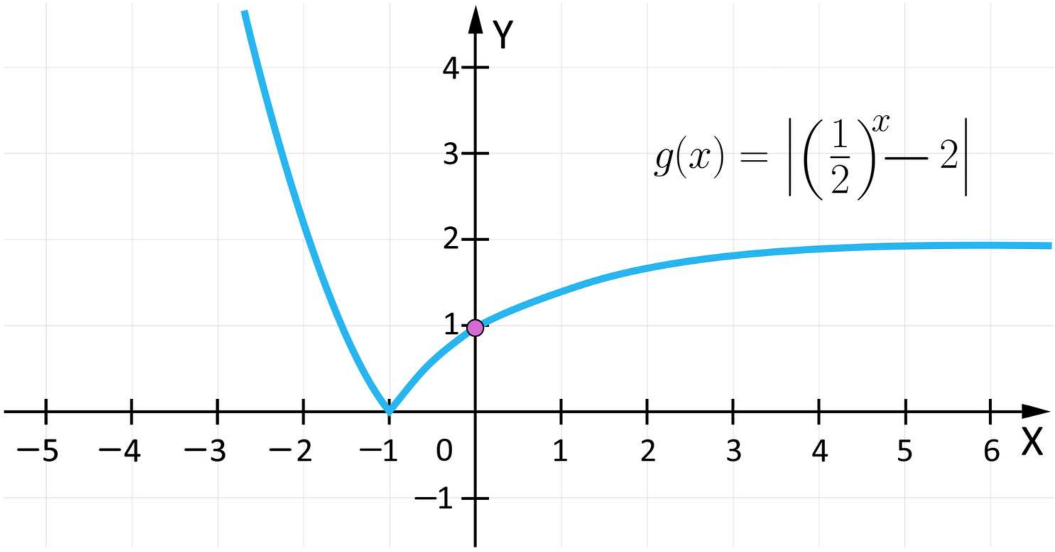



Określimy kilka własności tej funkcji:

- funkcja jest malejąca,
- zbiorem wartości jest zbiór liczb większych od $(-2)$,

- asymptotą wykresu funkcji jest prosta $y = -2$.

Wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right|$ wygląda następująco:




Zauważmy, że zmianie uległo kilka własności:

- funkcja jest przedziałami monotoniczna,
- funkcja przyjmuje tylko wartości nieujemne,
- dla argumentów nie mniejszych niż $(-1)$, funkcja $g(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right|$ przyjmuje wartości przeciwne do tych, które dla tych argumentów przyjmuje funkcja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$.

Przećwiczmy, jak wyznaczać własności przekształconych wykresów funkcji wykładniczych.

**Przykład 1**

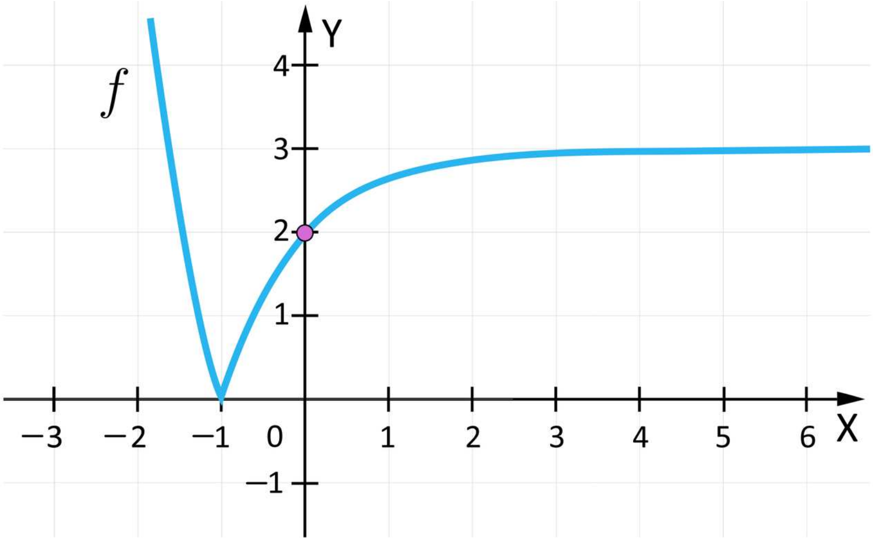
Na podstawie wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3\right|$ wyznaczymy:

a) zbiór wartości tej funkcji,

b) miejsce zerowe,

c) przedziały monotoniczności.

Wykres funkcji $f(x)$ wygląda następująco:




Rozwiązania:

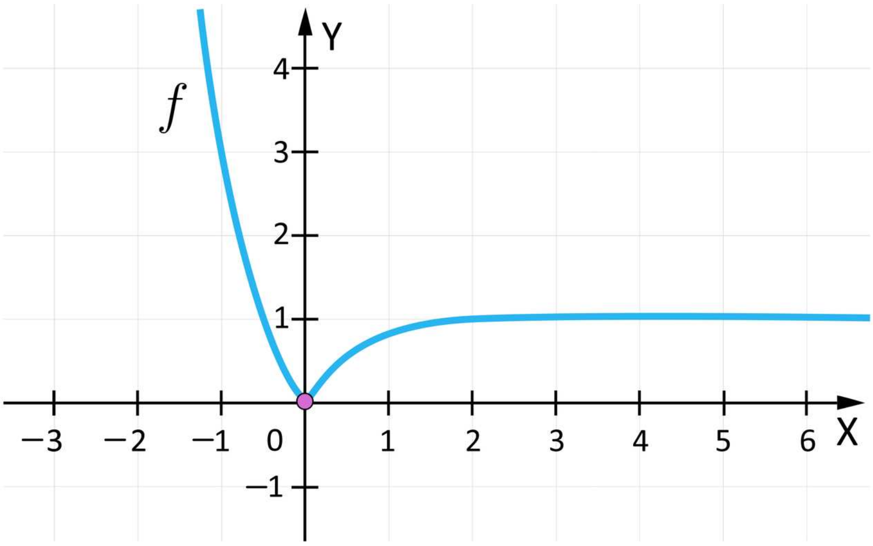
a) zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle 0, \infty)$,

b) miejscem zerowym jest liczba $(-1)$,

c) funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$ oraz rosnąca w przedziale $\langle -1, \infty)$.

**Przykład 2**

Na wykresie przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \left|\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1\right|$.




Korzystając z wykresu funkcji, wyznaczymy:

a) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości większe od 3,

b) przedziały monotoniczności tej funkcji,

c) liczbę rozwiązań równania $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązania:

a) $f(x) > 3$ dla $x \in (-\infty, -1)$,

b) funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 0, \infty)$,

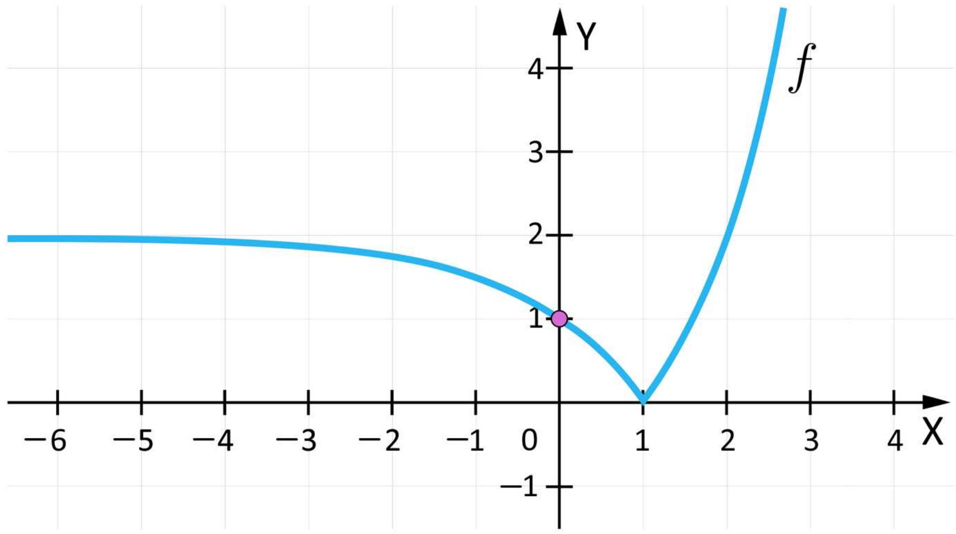
c) rozwiązanie równania $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sprowadza się do odczytania, dla ilu argumentów funkcja przyjmuje wartość $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Z wykresu funkcji możemy odczytać, że istnieją dwa takie argumenty, zatem powyższe równanie ma dwa rozwiązania.

Mając dany wzór oraz wykres funkcji wykładniczej możemy określać liczbę rozwiązań równań postaci $f(x) = m$, dla $m \in \mathbb{R}$.

**Przykład 3**

Na podstawie wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = |2^x - 2|$ określimy liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, w zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$.




Równanie $f(x) = m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$ posiada:

- $0$ rozwiązań, gdy $m \in (-\infty, 0)$,
- $1$ rozwiązanie, gdy $m \in \{0\} \cup \langle 2, \infty)$,
- $2$ rozwiązania, gdy $m \in (0, 2)$.

# Słownik

**funkcja wykładnicza**

funkcja określona wzorem $f(x) = a^x$ , gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ oraz $x \in \mathbb{R}$

**przekształcenie wykresu funkcji** $|f(x)|$

odbicie symetryczne względem osi $X$ tej części wykresu, która znajduje się pod osią $X$

# Aplet

**Polecenie 1**

Uruchom aplet, a następnie zaobserwuj, które własności funkcji określonej wzorem $f(x) = a^x$ ulegają zmianie przy przekształceniu $|f(x)|$.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dr1CMvDe2

**Polecenie 2**

Funkcję wykładniczą $f$ określamy wzorem $f(x) = |a^x - 1|$. Wiemy, że do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(2, 3)$:

a) wyznacz wzór tej funkcji,

b) naszkicuj wykres tej funkcji.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

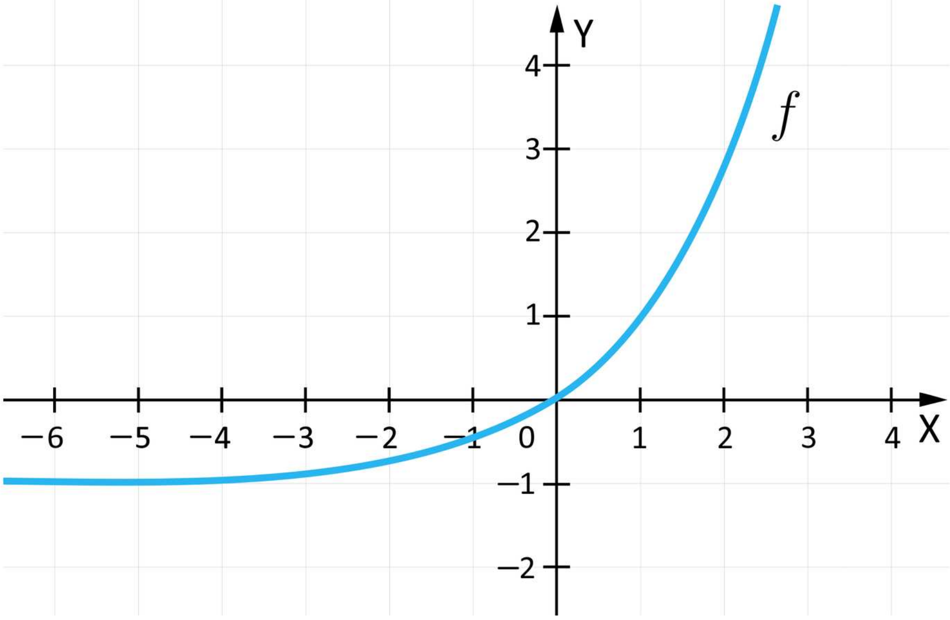
**Ćwiczenie 1**

Jeżeli $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, to funkcja określona wzorem $g(x) = |f(x)|$:

- jest niemalejąca
- przyjmuje tylko wartości nieujemne
- jest rosnąca

### Ćwiczenie 2

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = 2^x - 1$.




Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi. Wówczas funkcja $g(x) = |f(x)|$:

- [ ] dla argumentu $1$ przyjmuje wartość (- $1$)
- [ ] jest przedziałami monotoniczna
- [ ] przyjmuje tylko wartości nieujemne
- [ ] jest malejąca

### Ćwiczenie 3

Wstaw odpowiednie liczby.

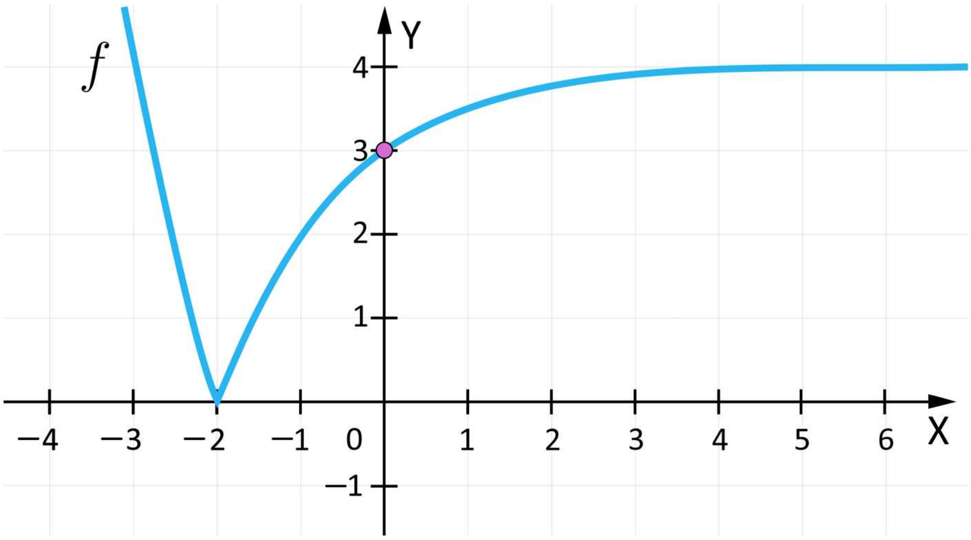
Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = |3^x - 2|$.

Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle$ ______ $, \infty)$.

Dla argumentu $2$ funkcja przyjmuje wartość ______ .

### Ćwiczenie 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4\right|$.




Uzupełnij tekst.

Funkcja jest malejąca w przedziale ______, zaś rosnąca w przedziale ______.
Dla argumentu $0$ przyjmuje wartość ______.

$(-2, \infty)$ | $-3$ | $(-\infty, -2)$ | $(-\infty, -2\rangle$ | $\langle -2, \infty)$ | $3$

### Ćwiczenie 5

Jeżeli do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = |a^x|$ należy punkt o współrzędnych $\left(3, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$, to do wykresu tej funkcji należy również punkt o współrzędnych:

- $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- $\left(-1, \sqrt{3}\right)$
- $\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

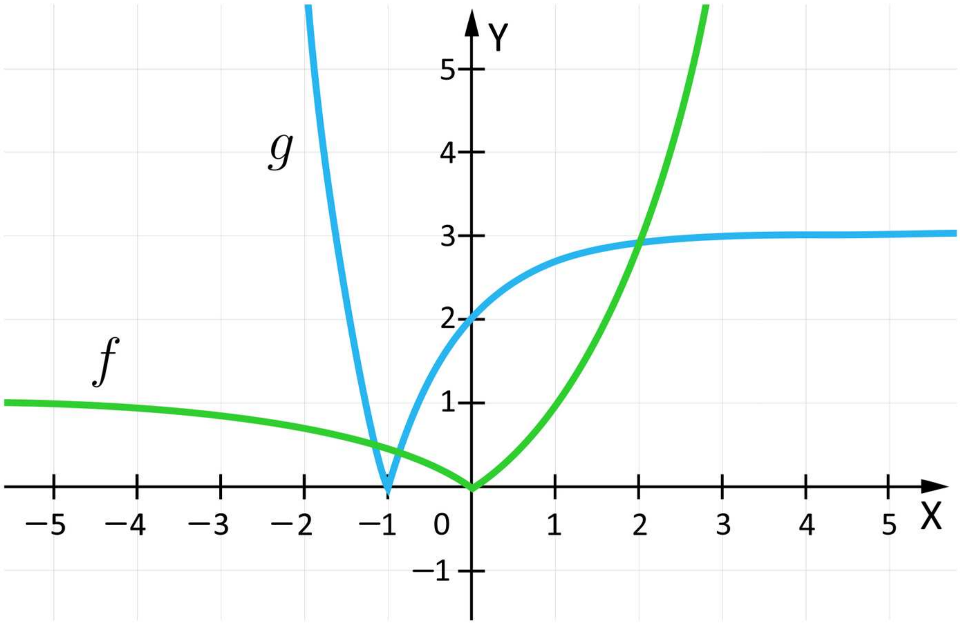
## Ćwiczenie 6

Połącz wzór funkcji z punktem, który należy do wykresu funkcji, określonej tym wzorem.

| | |
|---|---|
| $f(x) = \left\lvert \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{4} \right\rvert$ | $(2, 0)$ |
| $f(x) = \left\lvert \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 \right\rvert$ | $(2, 8)$ |
| $f(x) = \lvert 2^x + 1 \rvert$ | $(0, 0)$ |
| $f(x) = \lvert 3^x - 1 \rvert$ | $\left(-2, \frac{5}{4}\right)$ |

## Ćwiczenie 7

Dopasuj odpowiednie własności do odpowiednich funkcji.




Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji określonych wzorami $f(x) = |2^x - 1|$ oraz $g(x) = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3\right|$.

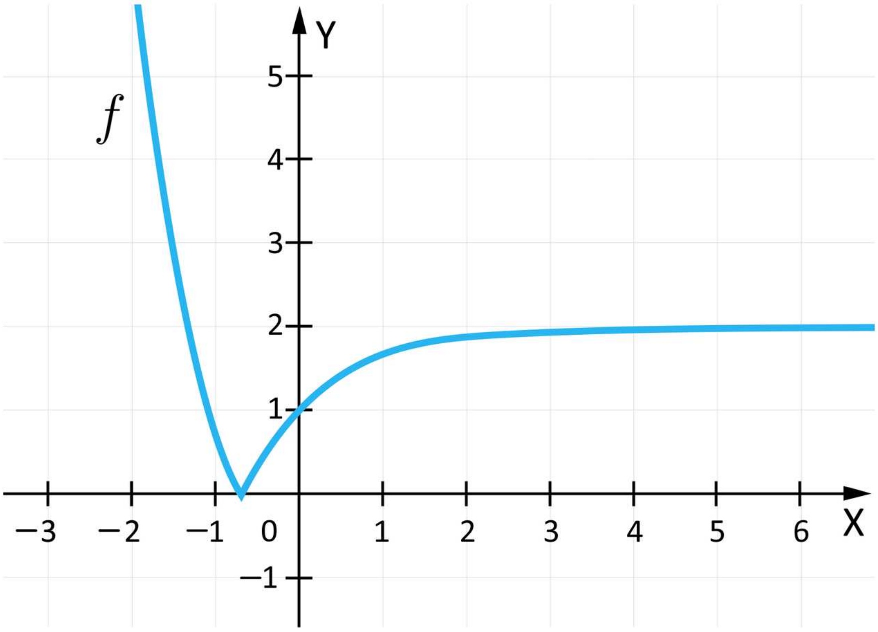
Własności funkcji określonej wzorem $f(x) = |2^x - 1|$
:

Własności funkcji określonej wzorem
$g(x) = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3\right|$:

- jest rosnąca w przedziale $\langle 0, \infty)$
- funkcja przyjmuje wartość $\sqrt{3}$ dla jednego argumentu
- dla argumentu $0$ przyjmuje wartość $2$
- jest malejąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$
- funkcja przyjmuje wartość $\sqrt{2}$ dla dwóch argumentów
- dla argumentu $1$ przyjmuje wartość $1$

## Ćwiczenie 8

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2\right|$. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ dla $m \in \mathbb{R}$.



# Dla nauczyciela

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Wykres i własności funkcji $y = |f(x)|$, gdzie $f(x) = a^x$**

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Cele nauczania - wymagania ogólne:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

14. posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zakres rozszerzony.

1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- odczytuje własności funkcji wykładniczej z wykresu,
- łączy wzór funkcji wykładniczej z wykresem i własnościami,
- wykorzystuje przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej do rozwiązywania problemów,
- stosuje różne strategie rozwiązywania zadań.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;

- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- z użyciem e-podręcznika;
- metoda stolików eksperckich;
- objaśnienie nowej wiedzy.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik.

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

1. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

**Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie przypominają różne przekształcenia wykresów funkcji wykładniczej - korzystają z e-podręcznika. Następnie uczniowie pracują metodą stolików eksperckich. W tym celu eksperci zapoznają się z materiałem teoretycznym dotyczącym tematu z sekcji „Przeczytaj” oraz szkicują po dwa wykresy funkcji wykładniczych po złożeniu z wartością bezwzględną. Porównują własności tych wykresów, a następnie dzielą się zdobytą wiedzą i doświadczeniami z pozostałymi uczniami. Każdy z ekspertów prezentuje wykonane wykresy i omawia ich własności. Następnie uczniowie wspólnie rozwiązują przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
2. W kolejnym kroku uczniowie zapoznają się z poleceniami w części „Aplet”. Zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w niej przedstawione. Nauczyciel wyjaśnia je w dyskusji z całą klasą.

3. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 z części „Sprawdź się” z pomocą całej klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je z uczniami na bieżąco.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
5. Ćwiczenie nr 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawiają je wspólnie z nauczycielem.

**Faza podsumowująca:**

1. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Wykres i własności funkcji $y = |f(x)|$, gdzie $f(x) = a^x$” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

**Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

**Materiały pomocnicze:**

- Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej

**Wskazówki metodyczne:**

- Liczba stolików eksperckich powinna zależeć od podziału materiału przeznaczonego na lekcję.