



Odkryj, zrozum, zastosuj...

Jakie są związki graniastosłupów? Czym mediana różni się od dominanty? Czy można przewidzieć wyniki gry w lotto? Dowiesz się z naszego e-podręcznika.

- Stereometria
 - Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni
 - Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach
 - Ostrosłup i jego własności
 - Bryły obrotowe
 - Bryły obrotowe - walec
 - Bryły obrotowe - stożek
 - Bryły w 3D
- Elementy statystyki opisowej
 - Średnia, mediana, dominanta
 - Miary rozproszenia
- Kombinatoryka
 - Liczba elementów zbioru skończonego
 - Reguła mnożenia, reguła dodawania
 - Podzbiory zbioru skończonego (treść podstawowa)
 - Podzbiory zbioru skończonego (treść rozszerzona)
 - Zadania
- Prawdopodobieństwo
 - Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych
 - Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść rozszerzona)
- Słowniczek

Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni

Obraz przestrzeni, zgodny z tym, jaki tworzy oko ludzkie, jest przedstawiany w malarstwie lub rysunku za pomocą zasad perspektywy. Dzięki temu sposobowi płaskiego odwzorowania jesteśmy w stanie wyobrazić sobie rzeczywisty kształt i wzajemne położenie przedstawianych obiektów przestrzennych.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Takie kompleksowe podejście do związków między obiektami w przestrzeni nie będzie nam potrzebne. W kilku kolejnych rozdziałach będziemy badać jedynie wybrane własności pewnych figur geometrycznych umieszczonych w przestrzeni trójwymiarowej.

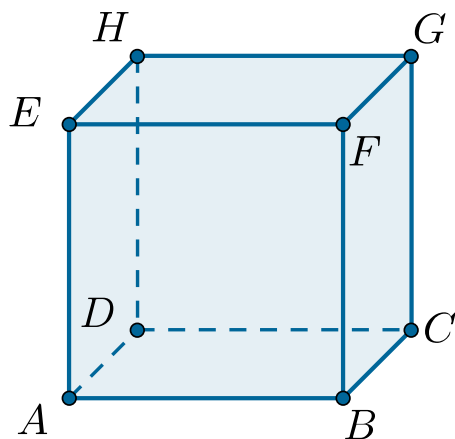
W przedstawionych przykładach będziemy się starali przeprowadzić rozumowanie stosowne do zadanej sytuacji przestrzennej.

Wprowadzimy też niezbędne definicje, a kluczowe zależności między omawianymi obiektami podamy jako twierdzenia.

Związki miarowe w figurach przestrzennych będziemy analizować za pomocą rysunków przedstawionych na płaszczyźnie. Przyjmujemy znaną i stosowaną w praktyce szkolnej umowę, że modele figur przestrzennych (które inaczej nazywamy bryłami) będziemy odwzorowywać na płaszczyźnie według zasad rzutu równoległego.

W ten sposób figury równoległe do kartki będą przystające do ich obrazów narysowanych na kartce, a figury nierównoległe do kartki zmieniały kształt.

Poniżej przedstawiony jest model sześcianu ABCDEFGH narysowany według powyższych zasad.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jego ściany ABEF i CDHG leżą w płaszczyźnie równoległej do kartki, więc są narysowane jako kwadraty, a w przypadku pozostałych ścian narysowane są równoległoboki.

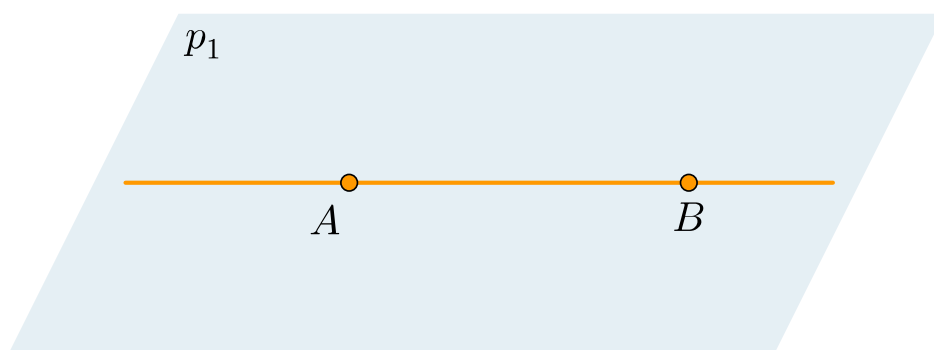
Punkty i proste w przestrzeni

W poniższych przykładach będziemy ilustrowali płaszczyznę w przestrzeni, prezentując jej wybraną część, istotną dla prezentowanych rozważań. Zazwyczaj będzie to prostokąt wycięty z tej płaszczyzny.

Na rysunku przedstawiona jest płaszczyzna p_1 i leżące w niej dwa punkty A i B .

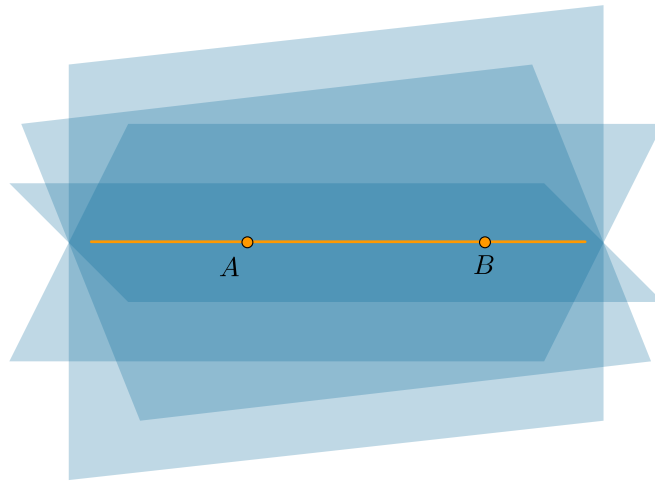
Przykład 1

Rozpatrzmy prostą AB na płaszczyźnie p_1 .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że oprócz płaszczyzny p_1 są jeszcze inne, w których leży prosta AB .

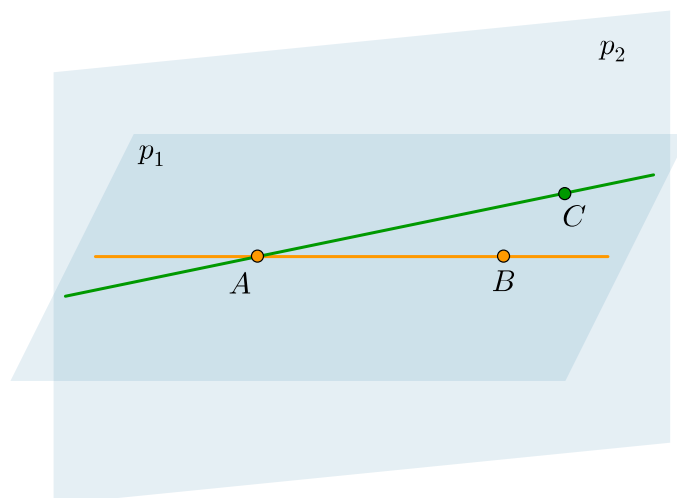


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozpatrzmy teraz płaszczyznę p_2 różną od p_1 , w której leży punkt A , ale nie leży w niej punkt B .

Wtedy poza punktem A nie ma na prostej AB takiego punktu, który leży też w płaszczyźnie p_2 .

Natomiast jeżeli punkt C leżący w płaszczyźnie p_1 leży również w płaszczyźnie p_2 , to wszystkie punkty prostej AC leżą zarówno w płaszczyźnie p_1 , jak i w płaszczyźnie p_2 .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że:

- p_1 jest jedyną płaszczyzną, do której należą wszystkie trzy punkty A , B i C ,
- p_1 jest jedyną płaszczyzną, do której należy prosta AB oraz punkt C ,
- p_1 jest jedyną płaszczyzną, do której należą proste AB i AC .

Uogólniając to spostrzeżenie, stwierdzimy, że płaszczyzna jest wyznaczona jednoznacznie przez:

- trzy różne punkty niewspółliniowe (zatem stół na trzech nogach postawiony na podłodze jest stabilny – nie będzie się chwiało),
- prostą i punkt, który do niej nie należy,
- dwie proste przecinające się.

Dwie płaszczyzny

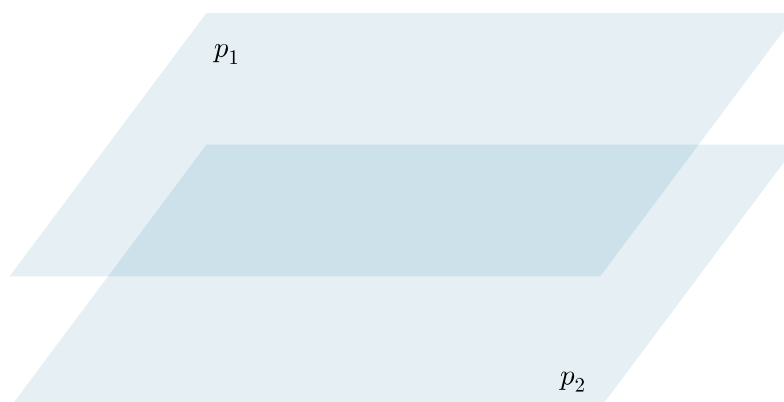
Twierdzenie: o dwóch różnych płaszczyznach nierównoległych

Jeżeli dwie różne płaszczyzny p_1 i p_2 mają wspólne dwa różne punkty A i B , to prosta AB leży zarówno w płaszczyźnie p_1 , jak i w płaszczyźnie p_2 . Mówimy wtedy, że prosta AB jest krawędzią przecięcia tych płaszczyzn.

W przestrzeni istnieją również pary płaszczyzn, które nie mają punktów wspólnych.

Definicja: Różne płaszczyzny równoległe

Dwie różne płaszczyzny, które nie mają punktów wspólnych, nazywamy płaszczyznami równoległymi.

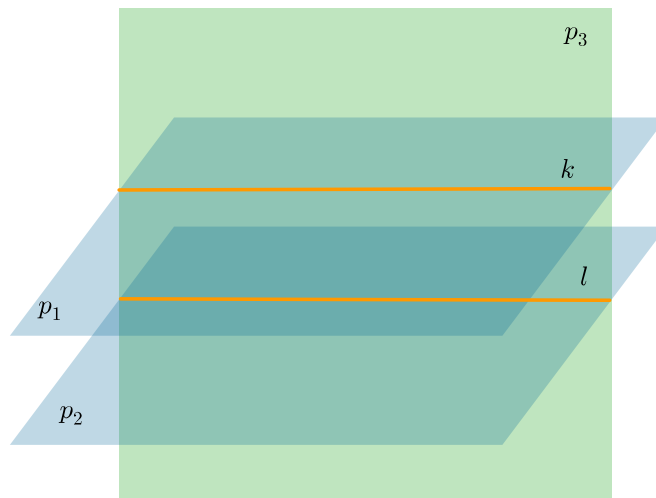


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Możliwe są zatem trzy przypadki, opisujące wzajemne położenie dwóch płaszczyzn:

- dwie płaszczyzny pokrywają się (każdy punkt jednej płaszczyzny należy również do drugiej płaszczyzny),
- dwie płaszczyzny przecinają się (ich częścią wspólną jest wtedy prosta),
- dwie płaszczyzny nie mają punktów wspólnych (są równoległe).

Uwaga. Rozpatrzmy dwie płaszczyzny równoległe p_1 i p_2 oraz płaszczyznę p_3 , która nie jest do nich równoległa. Wówczas płaszczyzna p_3 przecina każdą z płaszczyzn p_1 oraz p_2 wzdłuż prostej – odpowiednio k lub l .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Te proste leżą w jednej płaszczyźnie p_3 , ale nie mają punktów wspólnych, ponieważ leżą w płaszczyznach równoległych p_1 oraz p_2 . Oznacza to, że proste k i l są także równoległe.

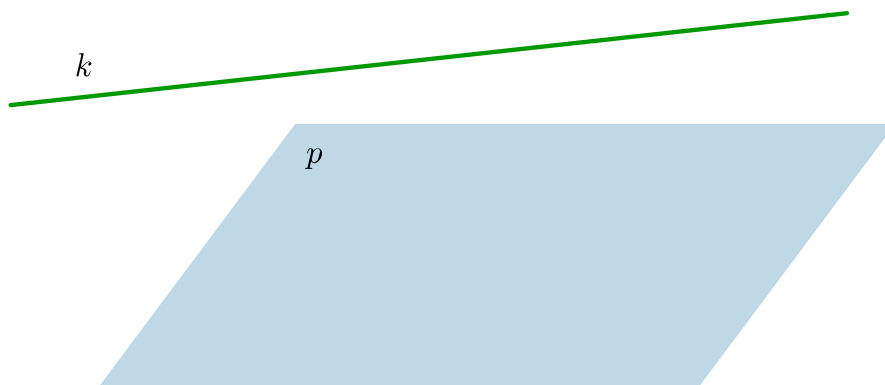
Z drugiej strony: jeżeli w każdej z dwóch płaszczyzn równoległych p_1 oraz p_2 wybierzemy proste równoległe odpowiednio k i l , to przez te proste przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

Zatem płaszczyzna jest wyznaczona jednoznacznie również przez dwie proste równoległe.

Prosta i płaszczyzna

Definicja: prosta równoległa do płaszczyzny

Prosta, która nie leży w płaszczyźnie i nie ma z tą płaszczyzną punktów wspólnych, jest równoległa do tej płaszczyzny.

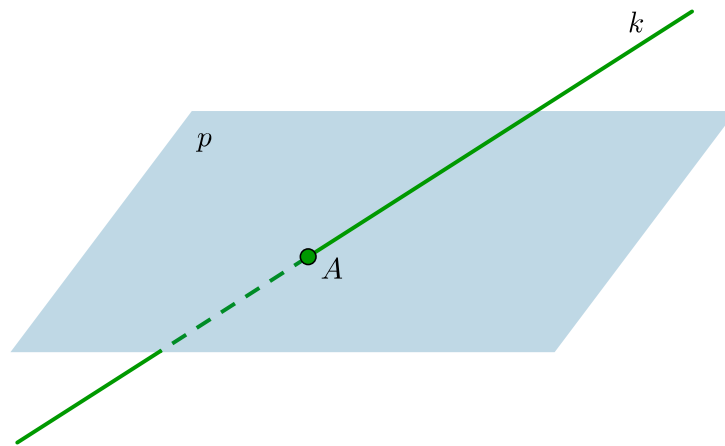


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uwaga. Przyjmujemy, że każda prosta leżąca w płaszczyźnie jest także równoległa do tej płaszczyzny (jak np. prosta AB z poprzedniego przykładu, która leży w płaszczyźnie p_1).

Definicja: prosta przebijająca płaszczyznę

Prosta, która nie leży w płaszczyźnie i nie jest do tej płaszczyzny równoległa, ma dokładnie jeden punkt wspólny z tą płaszczyzną. Mówimy, że prosta przebija płaszczyznę w tym punkcie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Możliwe są zatem trzy przypadki, opisujące wzajemne położenie prostej i płaszczyzny:

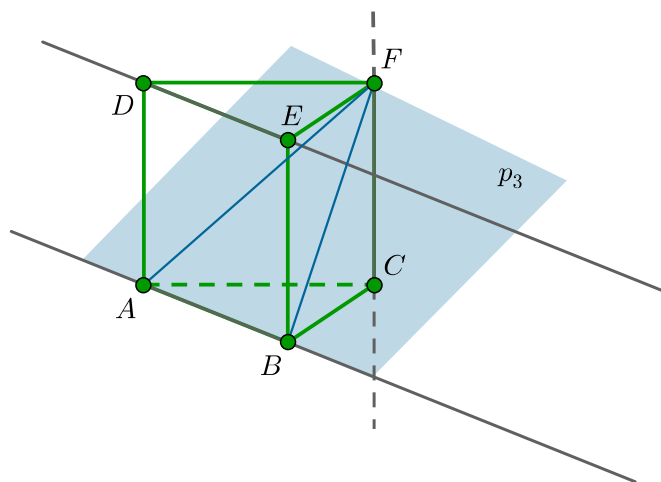
- prosta leży na płaszczyźnie (każdy punkt prostej jest również punktem płaszczyzny),
- prosta przebija płaszczyznę (prosta ma dokładnie jeden punkt wspólny z płaszczyzną),
- prosta jest równoległa do płaszczyzny (prosta i płaszczyzna nie mają punktów wspólnych).

Przykład 2

Na rysunku przedstawiony jest graniastosłup trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF .

1. Rozpatrzmy płaszczyznę p_1 , w której leży podstawa ABC . Prosta AB leży w tej płaszczyźnie, prosta DE jest do niej równoległa, a prosta DC przebija płaszczyznę p_1 w punkcie C .

3. Rozpatrzmy płaszczyznę p_3 , w której leżą punkty A , B oraz F . Trójkąt ABF jest płaskim przekrojem graniastosłupa $ABCDEF$ płaszczyzną p_3 . Prosta AB leży w tej płaszczyźnie, prosta CF przebija ją w punkcie F , a prosta DE jest do płaszczyzny p_3 równoległa.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dwie proste w przestrzeni

Przypomnijmy, że dwie proste przecinające się oraz dwie różne proste równoległe leżą w jednej płaszczyźnie.

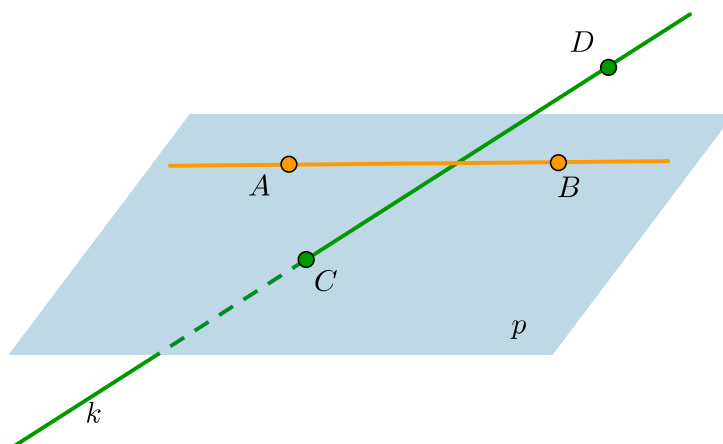
Istnieją w przestrzeni pary prostych, które nie mają punktów wspólnych i nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Przykład 3

Wybermy w przestrzeni punkty A i B oraz taki trzeci punkt C , który nie leży na prostej AB .

Płaszczyznę, którą wyznaczyły punkty A , B , C , oznaczmy przez p .

Rozpatrzmy teraz prostą k , która przebija płaszczyznę p w punkcie C i wybierzmy na prostej k punkt D różny od C .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pokażemy, że proste AB i CD nie mają punktów wspólnych.

Gdyby proste AB i CD miały punkt wspólny, to te dwie proste wyznaczałyby

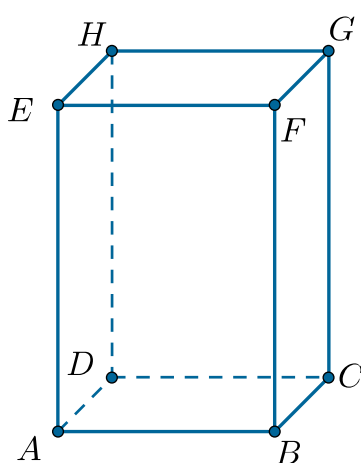
płaszczyznę. Ponieważ punkty A , B oraz C leżą w płaszczyźnie p , więc to właśnie p byłaby płaszczyzną wyznaczoną przez proste AB i CD . Jednakże punkt D nie leży w płaszczyźnie p , co oznacza, że proste AB i CD nie mają punktów wspólnych i nie leżą w jednej płaszczyźnie. Proste AB i CD są tak zwanymi prostymi skośnymi.

Definicja: proste skośne w przestrzeni

Dwie proste w przestrzeni, które nie leżą w jednej płaszczyźnie, nazywamy prostymi skośnymi.

Przykład 4

Na rysunku przedstawiony jest prostopadłościan $ABCDEFGH$.



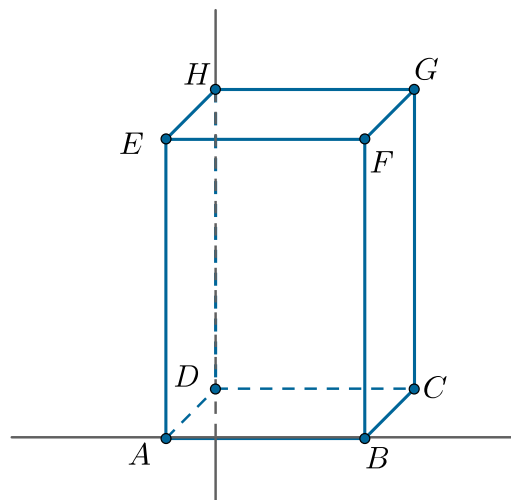
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wykażemy, że:

1. proste AB i DH są skośne

Rozpatrzmy płaszczyznę ściany $ADHE$. W tej płaszczyźnie leżą punkty A , D i H , natomiast punkt B w niej nie leży.

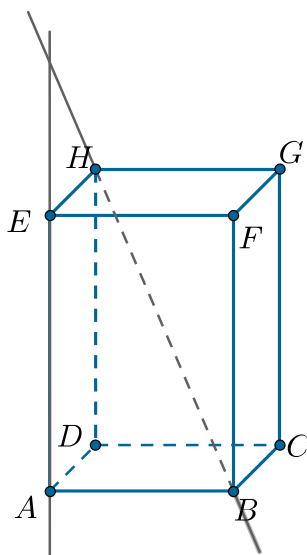
Zatem proste AB i DH są skośne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2. proste AE i BH są skośne

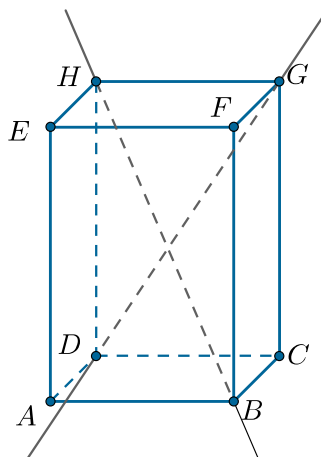
Rozpatrzmy płaszczyznę ściany $ABFE$. W tej płaszczyźnie leżą punkty A , B i E , natomiast punkt H w niej nie leży. Zatem proste AE i BH są skośne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3. proste BH i DG są skośne

Rozpatrzmy płaszczyznę ściany $DCGH$, w której leżą punkty D , G i H . Punkt B nie leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty D , G i H . Zatem proste BH i DG są skośne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Możliwe są zatem cztery następujące przypadki opisujące wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni:

- proste pokrywają się (każdy punkt jednej prostej należy również do drugiej),
- proste leżą w jednej płaszczyźnie i przecinają się w jednym punkcie,
- proste leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych (są równoległe),
- proste nie leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych (są skośne).

Prosta prostopadła do płaszczyzny. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Omówimy teraz pojęcie prostej prostopadłej do płaszczyzny.

W wielu sytuacjach praktycznych użytkujemy sprzęty, w których działaniu widać zastosowanie modelu pojęcia prostej prostopadłej do płaszczyzny. Każde skrzydła drzwi, okna (o ile nie są uchylne), bramy czy furtki muszą być zamocowane na zawiasach do pionowego, nieruchomego słupka ościeżnicy (nazywanej też futryną). Fachowiec, który montuje taką ościeżnicę, musi sprawdzić, czy słupek jest umocowany w pionie. Za pomocą odpowiednich narzędzi (np. poziomicy) weryfikuje ustawienie słupka, korzystając z następującej zasady: słupek jest ustawiony pionowo, gdy zostało ustalone, że jest on prostopadły do poziomu w dwóch różnych kierunkach.

Kiedy słupek ościeżnicy jest zamocowany pionowo, to niezależnie od tego, jak odchylimy zamocowane do niego skrzydła drzwi, zawsze będziemy mieli pewność, że są one ustawione właściwie (czyli prostopadle do poziomemu).

Formalnie pojęcie prostej prostopadłej do płaszczyzny wprowadzamy za pomocą następującej definicji.

Definicja: prostej prostopadłej do płaszczyzny

Prostą k , przebijającą płaszczyznę p w punkcie O nazywamy prostopadłą do tej płaszczyzny, gdy prosta k jest prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie p i przechodzącej przez punkt O .

Twierdzenie: o prostej prostopadłej do płaszczyzny

Rozpatrzmy płaszczyznę p oraz dwie zawarte w tej płaszczyźnie proste l i m , które przecinają się w punkcie O . Jeżeli prosta k przebija płaszczyznę p w punkcie O tak, że jest prostopadła zarówno do prostej m , jak i do prostej l , to jest ona prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie p i przechodzącej przez punkt O .

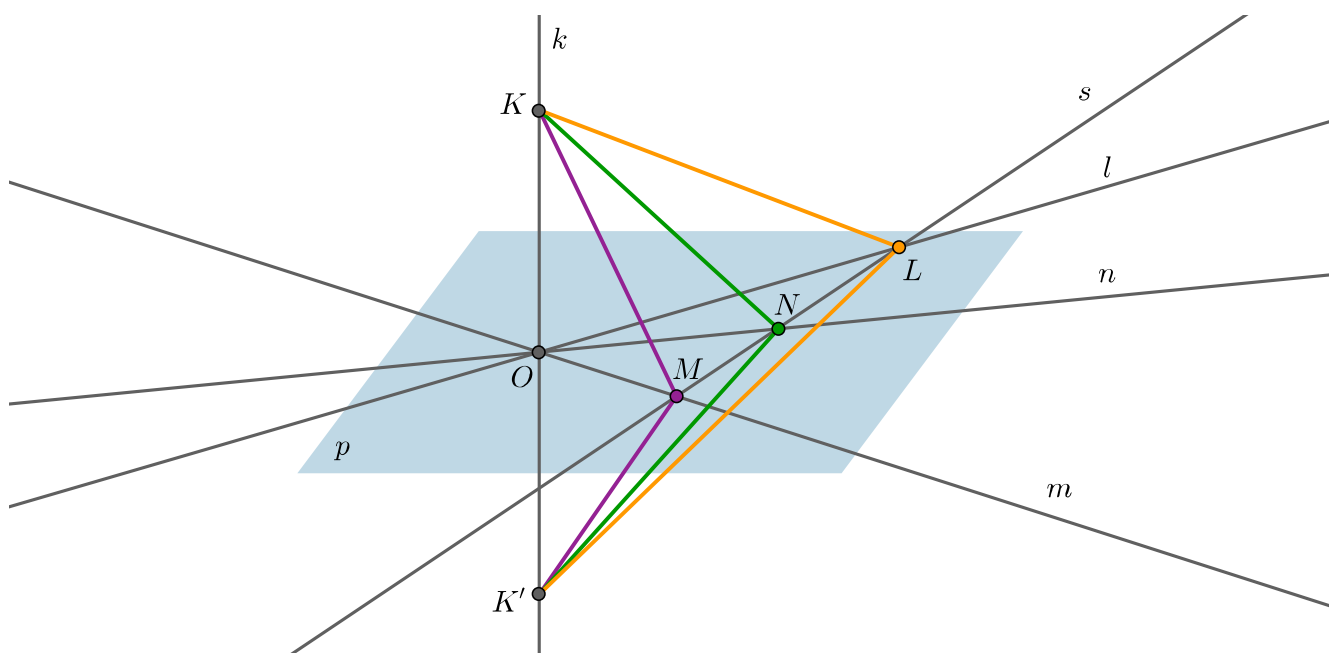
Przykład 5

Wyberzmy na prostej k punkt K różny od O . Przez K' oznaczmy punkt symetryczny do K względem O .

Rozpatrzmy w płaszczyźnie p dwie proste:

- dowolną prostą n , która przechodzi przez punkt O i jest różna od każdej z prostych k i l ,
- dowolną prostą s , która leży w płaszczyźnie p i nie przechodzi przez punkt O .

Przez L , M oraz N oznaczmy punkty, w których prosta s przecina proste odpowiednio l , m i n .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wtedy:

- w trójkącie $KK'M$ prosta OM jest prostopadła do KK' i przechodzi przez środek O tego boku, zatem jest symetralną boku KK' . Oznacza to, że $|MK| = |MK'|$.
- w trójkącie $KK'L$ prosta OL jest prostopadła do KK' i przechodzi przez środek O tego boku, zatem jest symetralną boku KK' . Oznacza to, że $|LK| = |LK'|$.

Ponieważ $|MK| = |MK'|$ oraz $|LK| = |LK'|$, więc na mocy cechy bok-bok-bok stwierdzamy, że trójkąty MKL i $MK'L$ są przystające. Stąd wynikają równości kątów: $|\angle KML| = |\angle K'ML|$ oraz $|\angle KLM| = |\angle K'LM|$.

Ponieważ $|MK| = |MK'|$ oraz $|\angle KMN| = |\angle K'MN|$, więc na mocy cechy bok-kąt-bok stwierdzamy, że trójkąty MKN i $MK'N$ są przystające. Stąd $|NK| = |NK'|$, co oznacza, że trójkąt KNK' jest równoramienny. W tym trójkącie środkowa ON poprowadzona z wierzchołka między ramionami jest prostopadła do podstawy KK' . Oznacza to, że prosta n jest prostopadła do prostej k . To spostrzeżenie kończy dowód.

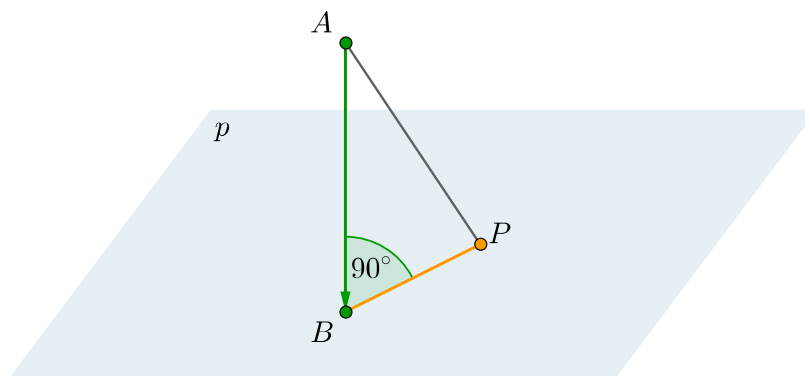
Uwaga. Ponieważ prosta KK' jest prostopadła do płaszczyzny p , więc każda z płaszczyzn przechodzących przez prostą KK' :

- płaszczyzna wyznaczona przez punkty K , K' oraz M ,
- płaszczyzna wyznaczona przez punkty K , K' oraz N ,
- płaszczyzna wyznaczona przez punkty K , K' oraz L

jest prostopadła do płaszczyzny p .

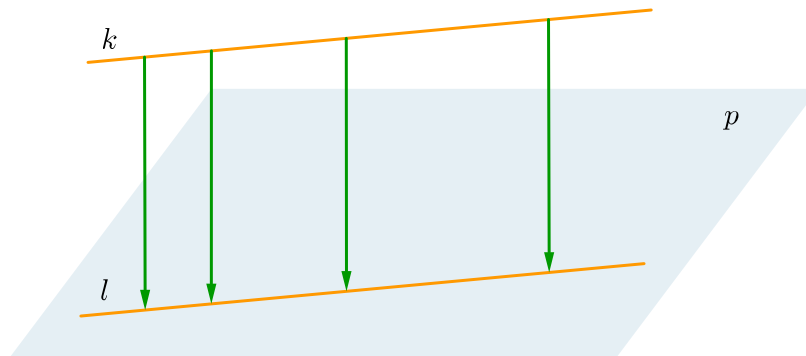
Zatem dwie płaszczyzny nazywamy prostopadłymi, jeśli jedna przechodzi przez prostą prostopadłą do drugiej.

Prowadząc prostopadłą na płaszczyznę p z punktu A leżącego poza tą płaszczyzną, przebijamy płaszczyznę p w punkcie B . Długość odcinka AB wyznacza odległość punktu A od płaszczyzny p . Jeżeli wybierzemy na płaszczyźnie p dowolny punkt P różny od B , to jego odległość od A jest większa od długości odcinka AB , co natychmiast wynika z zastosowania twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym ABP .



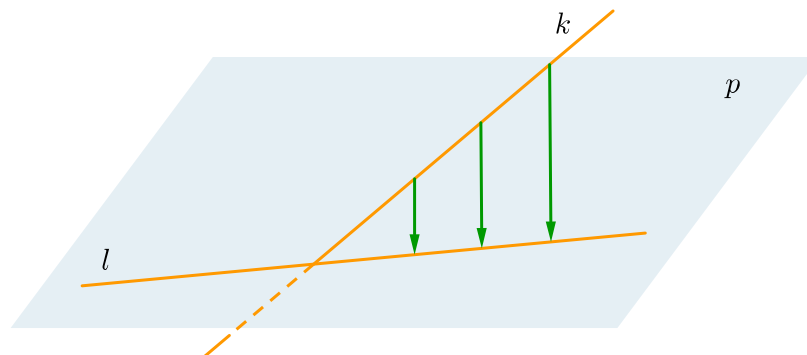
Punkt B nazywamy też rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę p .

Równie oczywiste jest spostrzeżenie, że wszystkie punkty prostej równoległej do danej płaszczyzny są równoodległe od tej płaszczyzny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeżeli natomiast dla pewnych dwóch punktów prostej odległości od płaszczyzny są różne, to ta prosta przebija płaszczyznę.

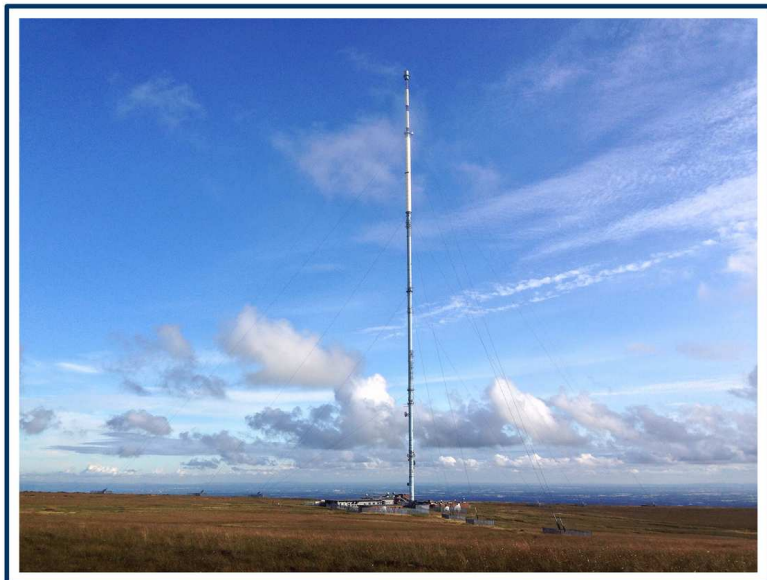


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że rzutem prostokątnym dowolnej prostej k na płaszczyznę p jest prosta l , którą niekiedy nazywa się śladem prostej k na płaszczyźnie p .

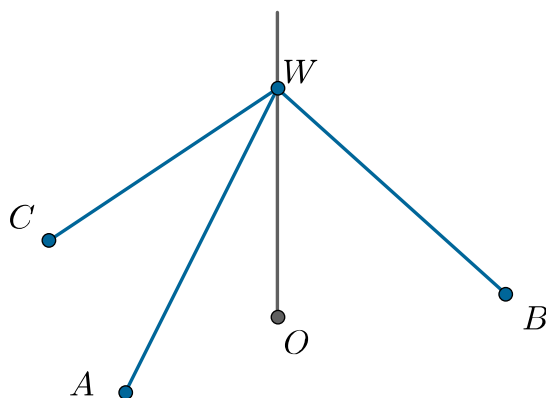
Przykład 6

Przy montażu terenowego masztu antenowego stosuje się tzw. odciąg. Są to zazwyczaj linki stalowe o odpowiedniej wytrzymałości. Jeden koniec odciagu jest połączony z konstrukcją masztu, a drugi – z podłożem. Do mocowania odciagu w praktyce stosuje się regulowane połączenia przegubowe zarówno od strony podłoża, jak i masztu. Odciąg rozmieszcza się równomiernie wokół osi masztu, w grupach po trzy lub cztery. Żeby odciąg te jednakowo przenosiły obciążenia poziome, należy zadbać również o to, aby były nachylone do płaszczyzny podłoża pod takim samym kątem.



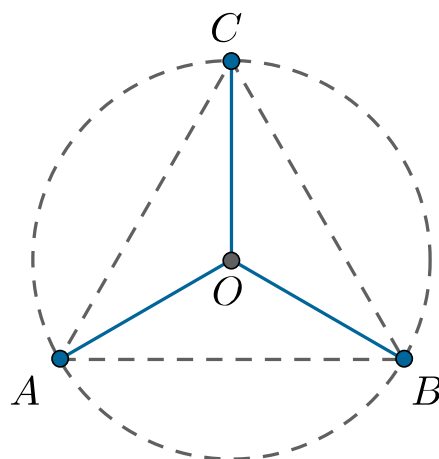
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pokażemy, że wszystkie te warunki są zrealizowane, gdy miejsca połączeń odciągów z fundamentem znajdują się w wierzchołkach wielokąta foremnego, wpisanego w okrąg o środku znajdującym się w punkcie mocowania masztu do podłoża. Rozpatrzmy model masztu z trzema odciągami (jak na rysunku).



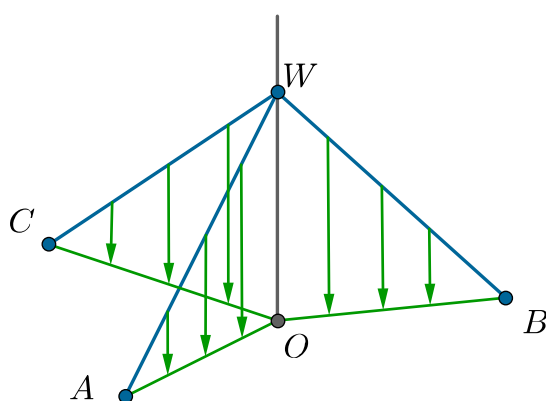
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Spójrzmy na płaszczyznę p , w której leżą punkty A , B , C i O . Punkty A , B , C znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego, wpisanego w okrąg o środku O .



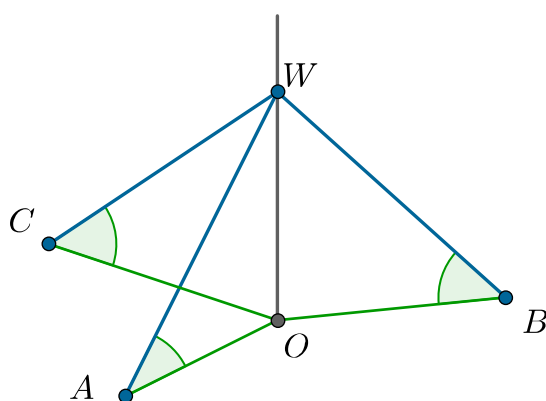
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Każdy z odcinków: OA , OB , OC jest rzutem prostokątnym odcinka odpowiednio: AW , BW oraz CW na płaszczyznę p .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ $|AO| = |BO| = |CO|$, więc na mocy cechy bok-kąt-bok trójkąty prostokątne: AOW , BOW , COW są przystające. Oznacza to, że odcinki AW , BW oraz CW są równe, a także równe są kąty: OAW , OBW , OCW .



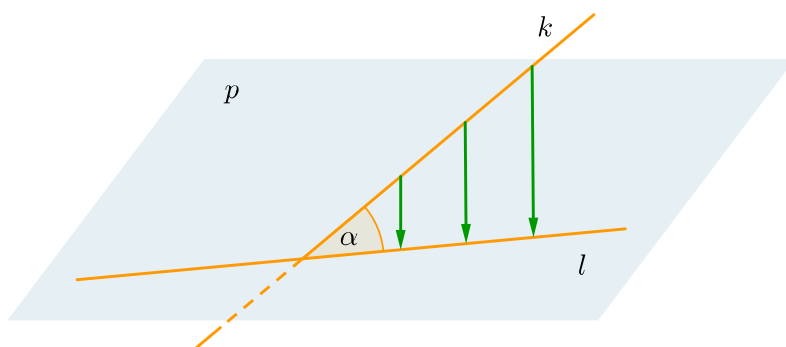
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Każdy z kątów: OAW , OBW , OCW uznajemy za kąt nachylenia prostej odpowiednio: AW , BW oraz CW do płaszczyzny p .

Przyjmujemy bowiem następującą umowę.

Definicja: kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

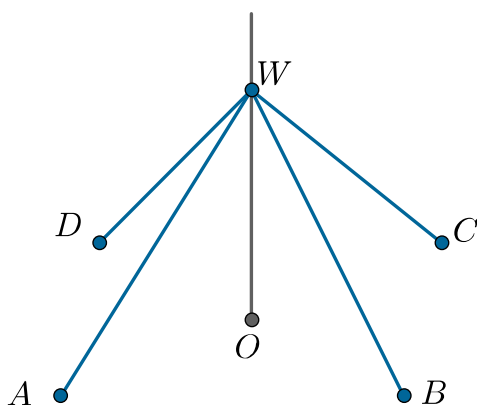
Rozpatrzmy płaszczyznę p oraz prostą k , która nie jest ani równoległa, ani prostopadła do płaszczyzny p . Kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny p nazywamy kąt ostry między tą prostą i jej rzutem prostokątnym l na płaszczyznę p .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

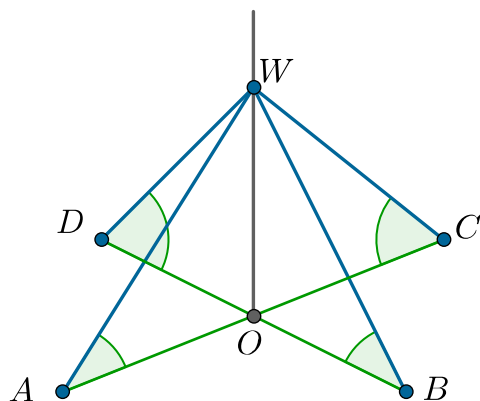
Przykład 7

Rozpatrzmy model masztu OW z czterema odciągami AW , BW , CW oraz DW . Przy opisanych wcześniej założeniach: czworokąt ABCD jest kwadratem, którego przekątne przecinają się w punkcie O .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

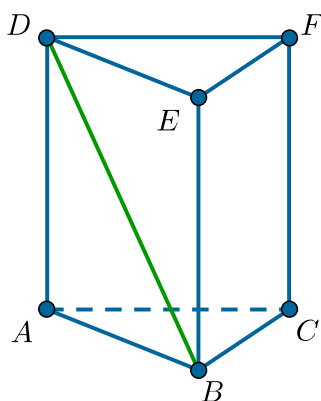
Ponieważ $|\text{AO}| = |\text{BO}| = |\text{CO}| = |\text{DO}|$, więc na mocy cechy bok-kąt-bok trójkąty prostokątne: AOW , BOW , COW oraz DOW są przystające. Oznacza to, że równe są kąty nachylenia odcinków AW , BW , CW oraz DW do płaszczyzny, w której leży kwadrat ABCD .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 8

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCDEF$ podstawami są trójkąty ABC i DEF . Zaznaczymy kąt, pod jakim przekątna DB ściany bocznej $ABCD$ jest nachylona do ściany bocznej $BCFE$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wyznamy rzut prostokątny prostej BD na ścianę $BCFE$. Postawmy w tym celu graniastosłup na tej ścianie.

Zauważmy, że prosta BD przebija ścianę $BCFE$ w punkcie B . Dany graniastosłup jest prosty, zatem płaszczyzny ścian DEF i $BCFE$ są prostopadłe. Ponadto trójkąt DEF jest równoboczny, więc rzutem prostokątnym punktu D na ścianę $BCFE$ jest punkt G – środek krawędzi EF . Zatem kątem α , pod jakim prosta DB jest nachylona do ściany $BCFE$, jest kąt DBG .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wtedy prosta KL jest prostopadła do płaszczyzny p , a więc każda płaszczyzna, która zawiera prostą KL , jest prostopadła do p . Jedną z takich płaszczyzn jest ta, którą wyznaczają proste k i l . Nazwijmy tę płaszczyznę p' .

Rozpatrzmy prostą n leżącą w płaszczyźnie p' , przechodzącą przez punkt P i równoległą do KL .

 Rysunek płaszczyzny p oraz prostej k , która przebija tę płaszczyznę w punkcie P . Zaznaczono prostą l , która jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę p oraz prostą m leżącą na tej płaszczyźnie prostopadłą do prostych k i l . Na prostej k leży punkt K różny od punktu P oraz punkt L , który jest rzutem prostokątnym punktu K . Prosta n jest równoległa do prostej KL .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ prosta n jest prostopadła do płaszczyzny p , więc jest również prostopadła do prostej m .

Zatem:

- jeżeli m jest także prostopadła do k , to jest prostopadła do płaszczyzny p' (bo jest prostopadła do dwóch prostych leżących w tej płaszczyźnie: n oraz k), zatem i do prostej l ,
- jeżeli m jest także prostopadła do l , to jest prostopadła do płaszczyzny p' (bo jest prostopadła do dwóch prostych leżących w tej płaszczyźnie: n oraz l), zatem i do prostej k .

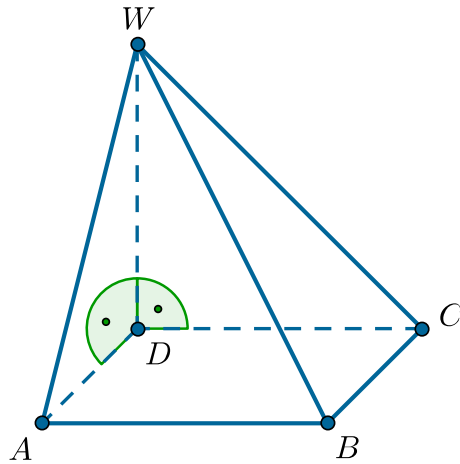
Oznacza to, że prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l .

To spostrzeżenie kończy dowód.

Przykład 9

Podstawą ostrosłupa $ABCDW$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa. Wykażemy, że wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami prostokątnymi.

Ponieważ krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa, więc prosta DW jest prostopadła do płaszczyzny podstawy $ABCD$ danego ostrosłupa. W szczególności DW jest prostopadła do prostych DA oraz DC , zatem trójkąty ADW i CDW są prostokątne.



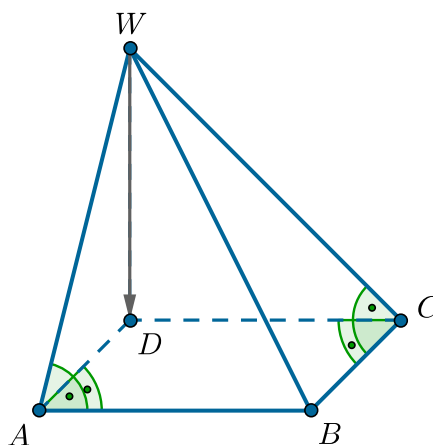
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy ponadto, że:

- prosta AW przebija płaszczyznę podstawy ostrosłupa w punkcie A , a jej rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę jest prosta DA ,
- prosta CW przebija płaszczyznę podstawy ostrosłupa w punkcie C , a jej rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę jest prosta DC .

Ponieważ $ABCD$ jest prostokątem, więc prosta DA jest prostopadła do prostej AB , a prosta DC jest prostopadła do prostej CB . Korzystając zatem z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, stwierdzamy, że:

- prosta AW jest prostopadła do prostej AB , co oznacza, że trójkąt ABW jest prostokątny,
- prosta CW jest prostopadła do prostej CB , co oznacza, że trójkąt BCW jest prostokątny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

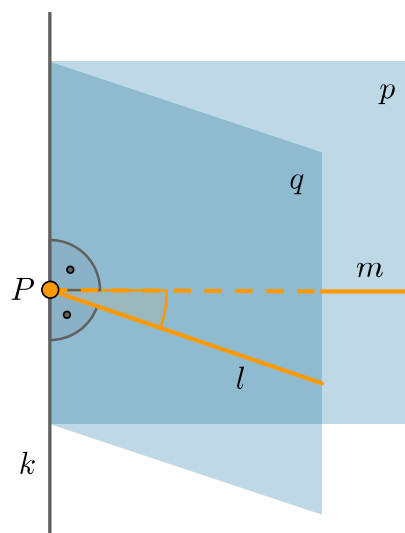
W ten sposób wykazaliśmy, że wszystkie ściany boczne ostrosłupa $ABCDW$ są trójkątami prostokątnymi.

Kąt między dwiema płaszczyznami

Podamy teraz sposób, według którego mierzymy kąt nachylenia płaszczyzny q do płaszczyzny p , gdy te płaszczyzny nie są ani równoległe, ani prostopadłe.

W tym celu z dowolnego punktu P wybranego na krawędzi k tych płaszczyzn (czyli na prostej, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny p i q) prowadzimy w każdej z tych płaszczyzn prostą prostopadłą do krawędzi k – oznaczmy te proste przez l i m . Mniejszy z kątów utworzonych przez proste l i m nazywamy kątem nachylenia płaszczyzny p do płaszczyzny q .

Praktycznie dla zmierzenia takiego kąta nachylenia wystarczy zatem zaznaczyć dwie prostopadłe do krawędzi półproste w stosownych do sytuacji półpłaszczyznach i zmierzyć kąt między nimi.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

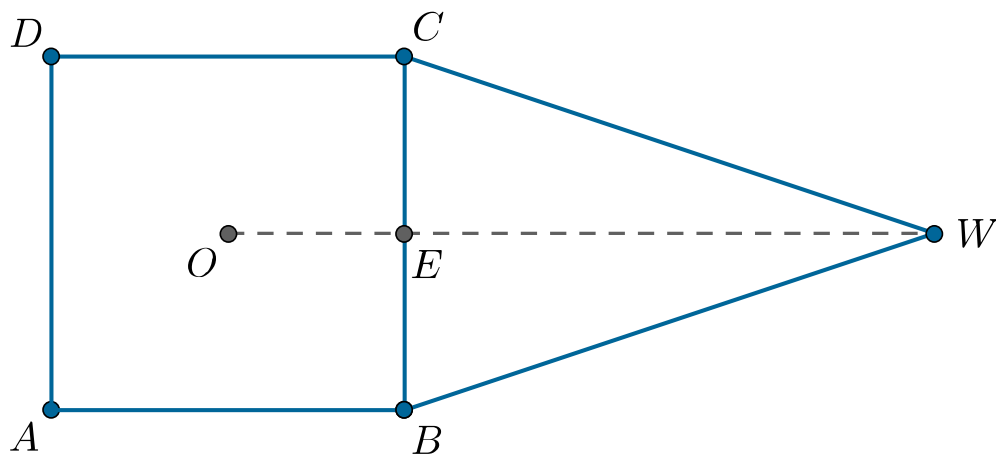
W tej sytuacji warto przypomnieć pomysł z wcześniejszego przykładu – po otwarciu drzwi zamocowanych do pionowego słupka ościeżnicy możemy, stosując powyższy przepis, bez kłopotu zmierzyć kąt, o jaki skrzydła tych drzwi odchyliły się od płaszczyzny, w której zamocowana jest ościeżnica.

Przykład 10

Wróćmy do modelu, rozpatrywanego w przykładzie 7. Wykażemy, że każda z czterech płaszczyzn ścian bocznych ostrosłupa $ABCDW$ jest nachylona pod tym samym kątem do płaszczyzny podstawy $ABCD$.

- sposób I

Rozpatrzmy dwie płaszczyzny: płaszczyznę p , w której leży kwadrat $ABCD$, oraz płaszczyznę q_1 , w której leżą punkty B , C i W . Oznaczmy przez E środek odcinka BC . Narysujmy trójkąt BCW na płaszczyźnie, na której leży kwadrat $ABCD$.



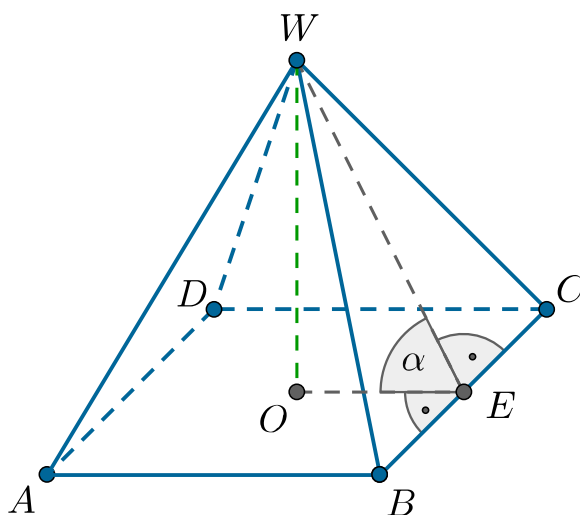
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że

- ponieważ punkty B i C są równo oddalone od punktu O , więc O leży na symetralnej odcinka BC ,
- ponieważ punkty B i C są równo oddalone od punktu W , więc W leży na symetralnej odcinka BC .

Zatem w punkcie E , symetralna OW przecina pod kątem prostym odcinek BC .

Oznacza to, że mierząc kąt OEW (oznaczony na rysunku jako α), dowiemy się, pod jakim kątem płaszczyzna q_1 jest nachylona do płaszczyzny p .

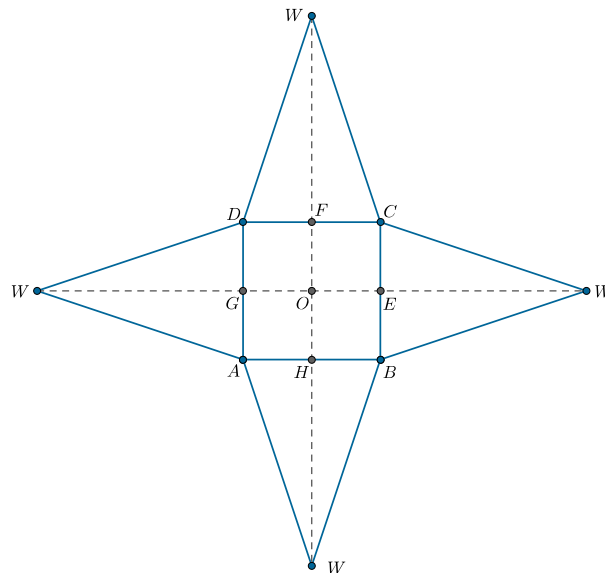


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozpatrzmy z kolei płaszczyzny:

- q_2 – w której leżą punkty C , D i W ,
- q_3 – w której leżą punkty D , A i W ,
- q_4 – w której leżą punkty A , B i W .

Oznaczmy też środki odcinków CD , DA oraz AB przez odpowiednio F , G oraz H . Narysujmy teraz każdy z trójkątów: ABW , BCW , CDW i DAW na płaszczyźnie, na której leży kwadrat $ABCD$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozumując podobnie jak w przypadku płaszczyzn p i q_1 , stwierdzamy, że:

- kąt nachylenia płaszczyzny q_2 do płaszczyzny p ma miarę taką, jak kąt OFW ,
- kąt nachylenia płaszczyzny q_3 do płaszczyzny p ma miarę taką, jak kąt OGW ,
- kąt nachylenia płaszczyzny q_4 do płaszczyzny p ma miarę taką, jak kąt OHW .

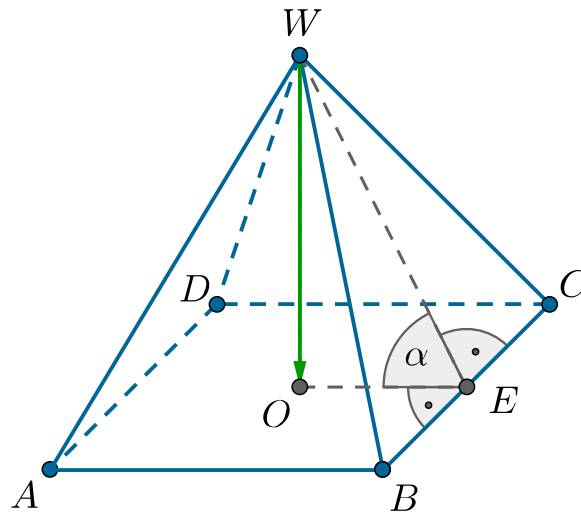
Ponieważ trójkąty OEW , OFW , OGW oraz OHW mają równe przyprostokątne (są to wysokości przystających trójkątów równoramiennych ABW , BCW , CDW oraz DAW), a także równe są odcinki OE , OF , OG oraz OH , to te trójkąty są przystające. Zatem kąty OEW , OFW , OGW i OHW są równe. Stąd równe są kąty nachylenia płaszczyzn q_1 , q_2 , q_3 oraz q_4 do płaszczyzny p .

- sposób II

Tym razem pokażemy, że przy ustalaniu miar omawianych kątów dwuściennych można skorzystać z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych.

Zauważmy, że prosta OW jest prostopadła do płaszczyzny p , w której leży kwadrat $ABCD$. Prosta WE przebija płaszczyznę p w punkcie E . Rzutem prostokątnym prostej WE na płaszczyznę p jest prosta OE . Ponieważ prosta WE jest prostopadła do prostej BC (bo WE jest wysokością w trójkącie równoramiennym BCW), więc na podstawie

twierdzenia o trzech prostych prostopadłych jest również prostopadła do prostej OE. Zatem kąt OEW opisuje kąt nachylenia płaszczyzny q_1 do płaszczyzny p .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

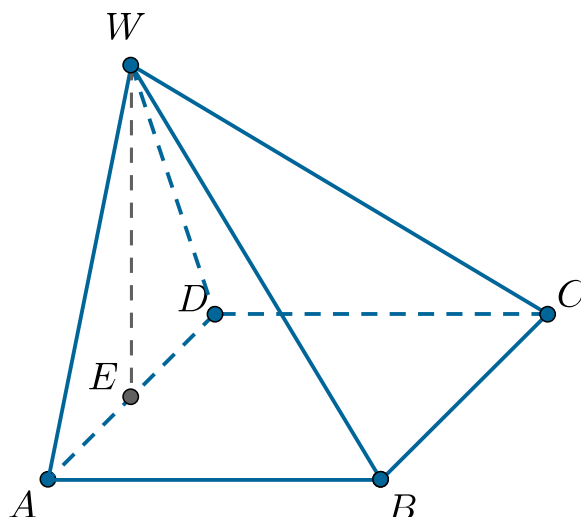
Korzystając z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, opisujemy kąty nachylenia płaszczyzn q_2, q_3, q_4 do płaszczyzny p jako kąty OFW, OGW i OHW. W trójkątach OEW, OFW, OGW i OHW przyprostokątna OW jest wspólna, a przeciwprostokątne EW, FW, GW i HW są równe, więc te trójkąty są przystające. Stąd równe są kąty nachylenia płaszczyzn q_1, q_2, q_3 oraz q_4 do płaszczyzny p .

Uwaga.

Podobne rozumowanie pozwala stwierdzić, że w dowolnym ostrosłupie prawidłowym równe są kąty, pod jakimi każda ze ścian bocznych jest nachylona do płaszczyzny podstawy. W każdym takim ostrosłupie spodek O wysokości poprowadzonej z wierzchołka W ostrosłupa na podstawę jest bowiem środkiem okręgu opisanego na tej podstawie. Równe są także wysokości ścian bocznych takiego ostrosłupa. Zatem z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych otrzymujemy przystawanie trójkątów, w których jeden z kątów ostrych ma miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy. Stąd te kąty nachylenia są równe.

Przykład 11

Podstawą ostrosłupa ABCDW jest kwadrat ABCD. Punkt E jest środkiem krawędzi AD, odcinek EW jest wysokością ostrosłupa.



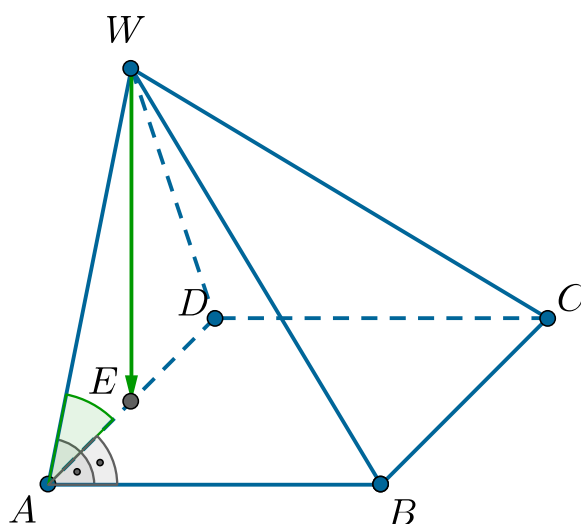
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznaczymy kąty nachylenia ścian bocznych: ABW , BCW , CDW oraz DAW tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy $ABCD$.

Ponieważ prosta WE jest prostopadła do płaszczyzny podstawy $ABCD$, więc ściana DAW jest również prostopadła do tej płaszczyzny.

Prosta EA jest rzutem prostokątnym prostej WA na płaszczyznę podstawy $ABCD$.

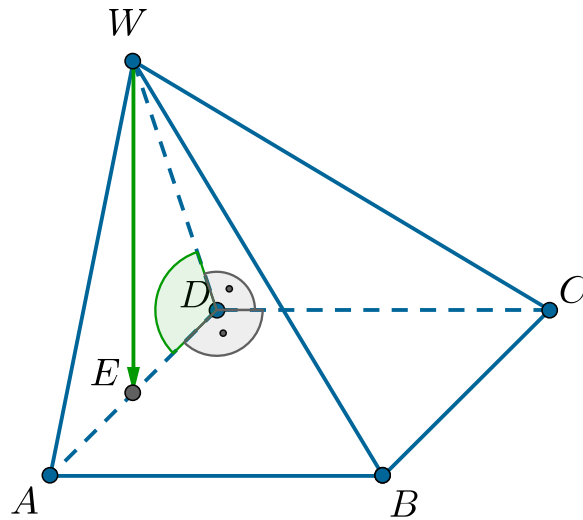
Ponieważ podstawą jest kwadrat $ABCD$, więc prosta EA jest prostopadła do prostej AB . Zatem na podstawie twierdzenia o trzech prostych prostopadłych także prosta WA jest prostopadła do prostej AB . Oznacza to, że kąt WAE jest kątem nachylenia płaszczyzny ściany WAB do płaszczyzny podstawy $ABCD$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Prosta ED jest rzutem prostokątnym prostej WD na płaszczyznę podstawy $ABCD$.

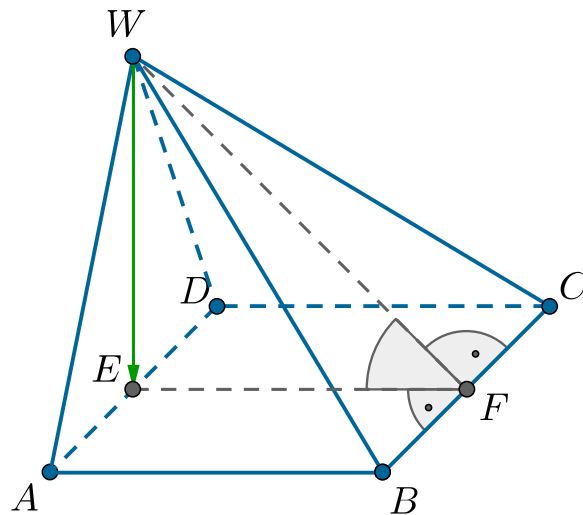
Proste ED i DC są prostopadłe, zatem na podstawie twierdzenia o trzech prostych prostopadłych również prosta WD jest prostopadła do prostej DC . Oznacza to, że kąt WDE jest kątem nachylenia płaszczyzny ściany WDC do płaszczyzny podstawy $ABCD$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

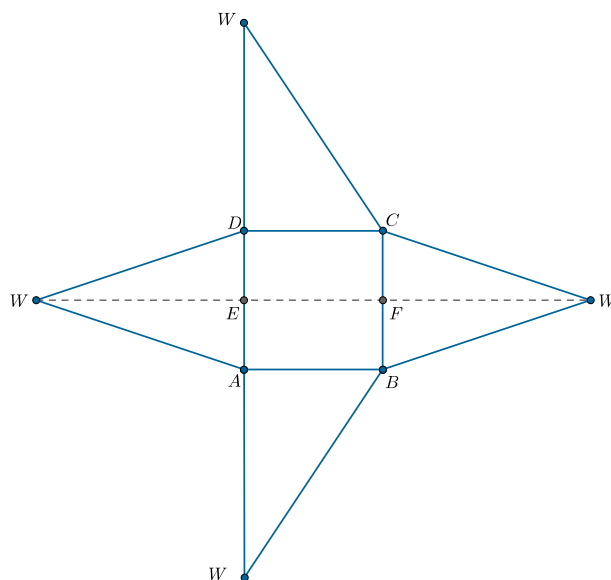
Zauważmy, że w przypadku tego ostrosłupa kąty nachylenia dwóch ścian: ABW oraz CDW do płaszczyzny podstawy ABCD zmierzylśmy za pomocą kątów płaskich odpowiednio: WAD i WDA w ścianie DAW.

Oznaczmy środek krawędzi BC przez F . Wtedy prosta EF jest rzutem prostokątnym prostej WF na płaszczyznę podstawy ABCD. Proste EF i BC są prostopadłe, zatem na podstawie twierdzenia o trzech prostych prostopadłych również prosta WF jest prostopadła do prostej BC. Oznacza to, że kąt WFE jest kątem nachylenia płaszczyzny ściany WBC do płaszczyzny podstawy ABCD.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

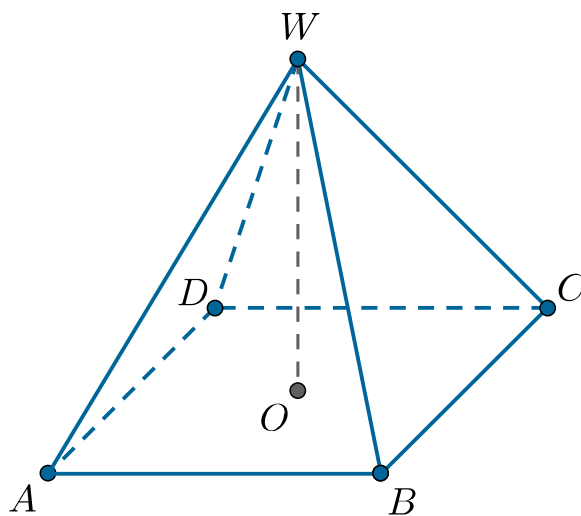
Odkładając każdy z trójkątów: ABW, BCW, CDW oraz DAW na płaszczyznę kwadratu ABCD, otrzymamy następującą siatkę ostrosłupa ABCDW.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 12

Rozpatrzmy ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDW$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

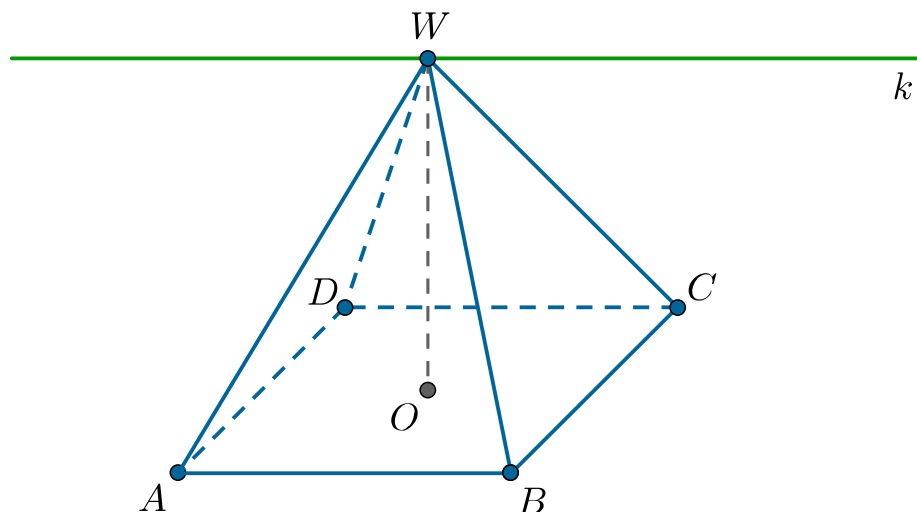
Płaszczyzny ścian ABW oraz CDW mają punkt wspólny W , zatem przecinają się wzdłuż pewnej prostej przechodzącej przez W . Zaznaczmy krawędź k przecięcia tych płaszczyzn.

Zauważmy, że proste AB i CD są równoległe. Zatem prosta k przechodząca przez W i równoległa do jednej z nich jest równoległa także do drugiej.

Oznacza to, że prosta k

- jest równoległa do prostej AB i przechodzi przez punkt W , zatem leży w płaszczyźnie ściany ABW ,
- jest równoległa do prostej CD i przechodzi przez punkt W , zatem leży w płaszczyźnie ściany CDW .

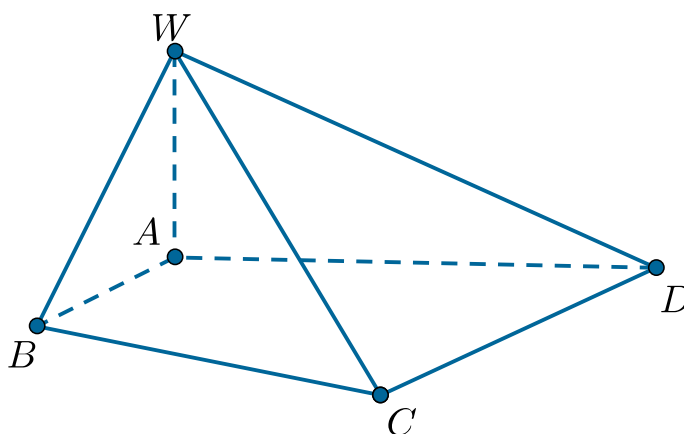
Płaszczyzny tych ścian nie są, oczywiście, równoległe, zatem prosta k jest szukaną krawędzią przecięcia płaszczyzn ścian ABW i CDW .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 13

Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDW$ jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym podstawa AB jest krótsza od podstawy CD .

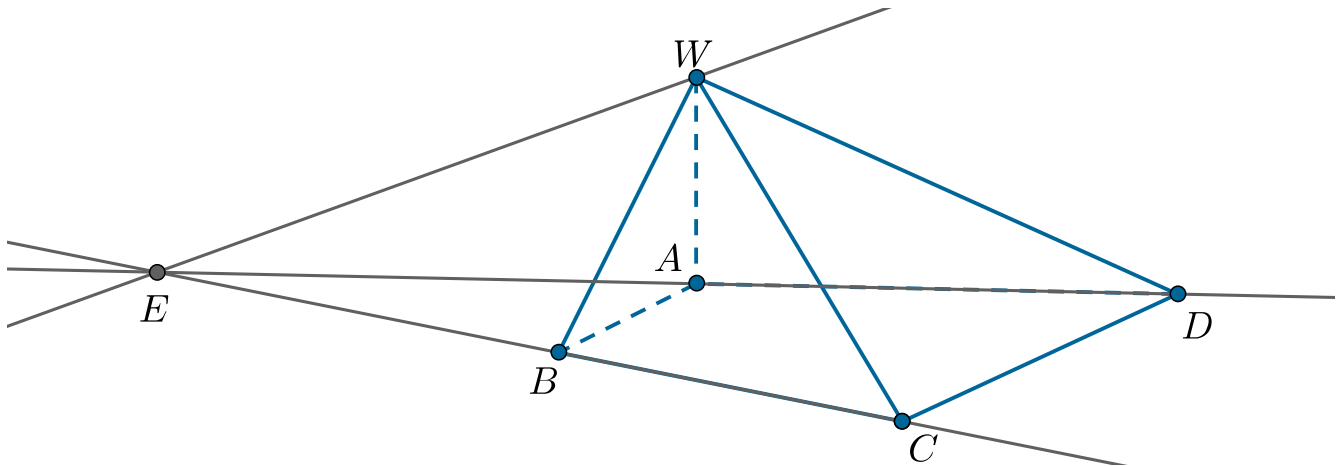


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Płaszczyzny ścian ADW oraz BCW mają punkt wspólny W , zatem przecinają się wzdłuż pewnej prostej przechodzącej przez W . Zaznaczmy krawędź przecięcia tych płaszczyzn.

Zauważmy, że proste AD i BC nie są równoległe. Zatem punkt E , w którym te proste się przecinają, leży jednocześnie w płaszczyźnie ściany ADW (bo każdy punkt prostej AD leży w tej płaszczyźnie) oraz w płaszczyźnie ściany BCW (bo każdy punkt prostej BC leży w tej płaszczyźnie).

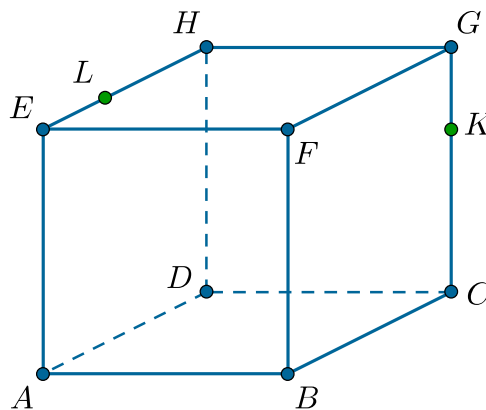
Mamy zatem dwa punkty E i W , które należą jednocześnie do płaszczyzny każdej ze ścian: ADW oraz BCW . Punkty te leżą więc na krawędzi, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny tych ścian. Oznacza to, że prosta WE jest szukaną krawędzią.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 14

Na krawędziach CG oraz HE sześciianu $ABCDEFGH$ wybrano punkty odpowiednio K i L .



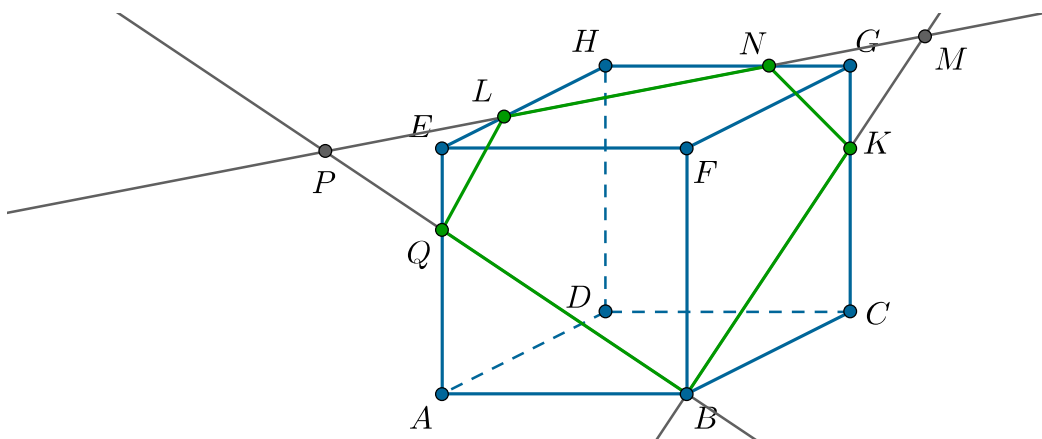
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznamy płaski przekrój tego sześciianu płaszczyzną p , do której należą punkty B , K oraz L .

Do płaszczyzny tego przekroju należy prosta BK . Oznaczmy przez M punkt przecięcia tej prostej z krawędzią FG , wzdłuż której przecinają się płaszczyzny ścian $BCGF$ oraz $EHGF$. Zatem punkt M należy do płaszczyzny p , a także leży w płaszczyźnie ścian

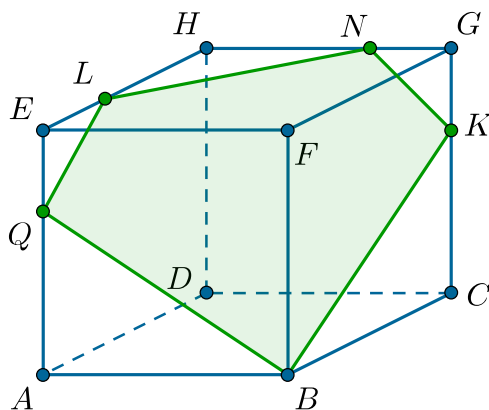
EHGF. W tej płaszczyźnie leży też punkt L , który należy do płaszczyzny przekroju. Oznacza to, że prosta ML należy do płaszczyzny p . Oznaczmy przez P punkt, w którym prosta ML przecina krawędź EF między płaszczyznami GHEF oraz BAEF. Punkt P należy do płaszczyzny przekroju, a także leży w płaszczyźnie ściany ABFE. W tej płaszczyźnie leży również punkt B , który należy do płaszczyzny p . Zatem prosta PB należy do płaszczyzny przekroju.

Oznaczmy przez N punkt, w którym prosta PM przecina krawędź GH , a przez Q – punkt, w którym prosta PB przecina krawędź AE .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wobec tego płaskim przekrojem sześciangu płaszczyzną p , do której należą punkty B , K oraz L jest pięciokąt BKNLQ.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że proste BK i QL leżą w płaszczyznach równoległych ścian odpowiednio BCGF i ADHE danego sześciangu. Zatem te proste nie mają punktów wspólnych, a więc są skośne lub równoległe. Jednocześnie obie te proste leżą w płaszczyźnie p , co oznacza że, są to proste równoległe.

Rozumując podobnie, można uzasadnić twierdzenie o dwóch płaszczyznach równoległych przeciętych płaszczyzną.

Twierdzenie: o dwóch płaszczyznach równoległych przeciętych płaszczyzną

Jeżeli płaszczyzna przecina każdą z dwóch płaszczyzn równoległych, to otrzymane krawędzie przecięcia są prostymi równoległymi.

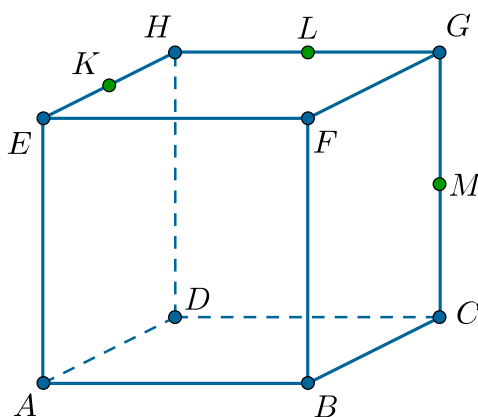
Przykład 15

Na podstawie tego twierdzenia stwierdzamy, że również proste BQ i NK są równoległe – otrzymujemy je w wyniku przecięcia płaszczyzną p dwóch równoległych płaszczyzn: płaszczyzny ściany ABFE oraz płaszczyzny ściany CDHG.

Zatem pięciokąt BKNLQ ma dwie pary boków równoległych: $BQ \parallel NK$ oraz $BK \parallel QL$.

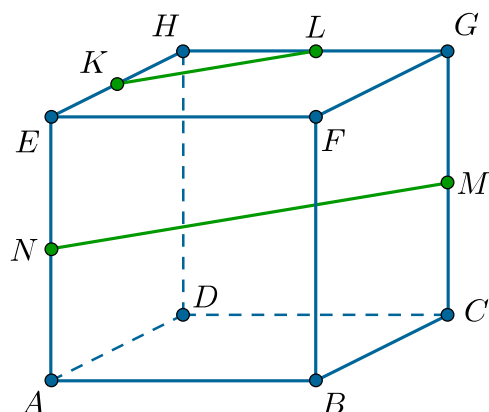
Przykład 16

Rozpatrzmy sześcian ABCDEFGH, którego krawędź ma długość a . Wykorzystując spostrzeżenia poczynione w poprzednim przykładzie, można wykazać, że płaski przekrój sześcianu płaszczyzną p , do której należą środki K , L , M krawędzi, odpowiednio EH, HG oraz GC (zobacz rysunek), jest sześciokątem foremnym.



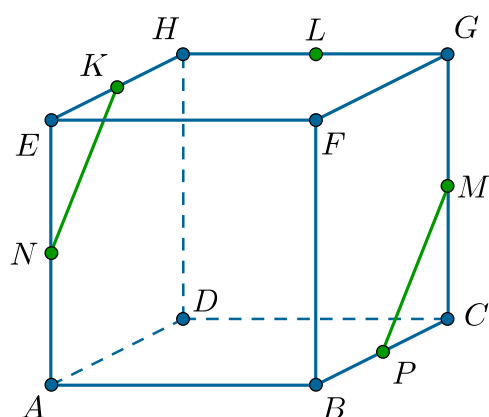
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Do tego przekroju należy bowiem prosta równoległa do prostej KL i przechodząca przez punkt M . Ta prosta przecina krawędź AE w jej środku N .



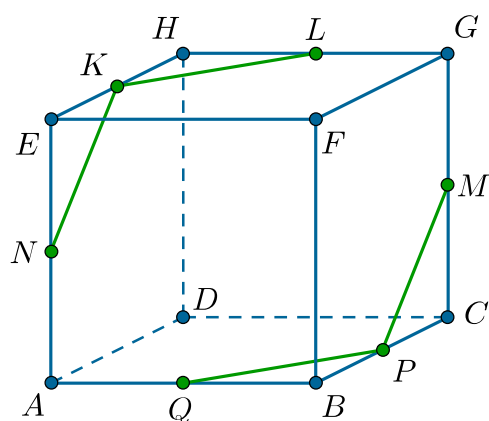
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ ściany ADHE i BCGF są równoległe, więc płaszczyzna p przecina ścianę BCGF wzdłuż prostej równoległej do KN i przechodzącej przez punkt M . Ta prosta przecina krawędź BC w jej środku P .

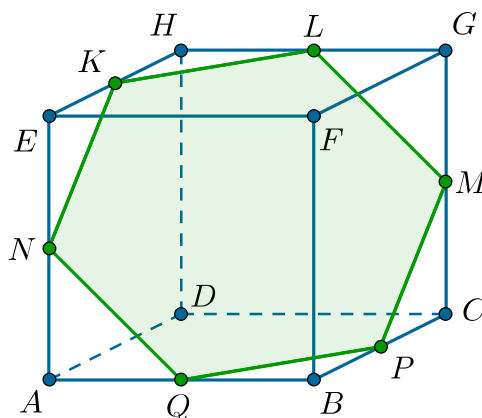


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozumując podobnie, pokazujemy, że do płaszczyzny przekroju należy prosta równoległa do prostej KL i przechodząca przez punkt P . Ta prosta przecina krawędź AB w jej środku Q .



Zatem przekrojem danego sześcianu jest sześciokąt KLMPQN.

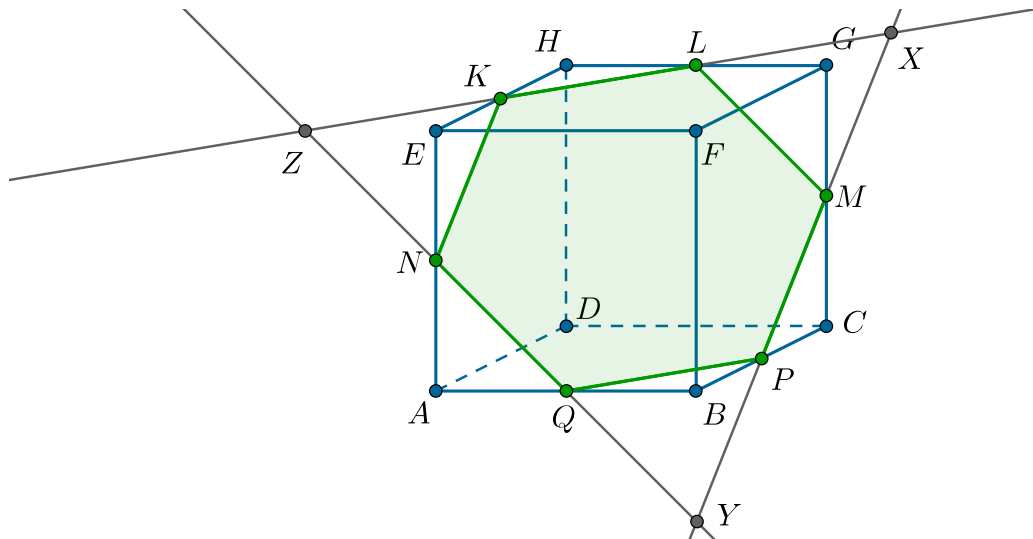


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jego wierzchołki są środkami sześciu krawędzi sześcianu, więc każdy z boków tego sześciokąta ma długość $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Zauważmy też, że każda z przekątnych PK, QL i NM sześciokąta KLMPQN jest odcinkiem łączącym środki przeciwległych (nieskośnych) krawędzi sześcianu, zatem jest równa przekątnej ściany sześcianu. Stąd każda z tych przekątnych ma długość $a\sqrt{2}$. Oznaczmy przez S punkt, w którym przecinają się przekątne PK i QL. Ponieważ czworokąt KLPQ jest równoległobokiem ($KL \parallel PQ$ oraz $|KL| = |PQ| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$), więc S jest środkiem każdego z odcinków PK, QL. Rozumując podobnie, pokazujemy, że czworokąt LMQN również jest równoległobokiem, co oznacza, że S jest także środkiem odcinka NM. Wobec tego przekątne PK, QL i NM dzielą sześciokąt KLMPQN na sześć trójkątów równobocznych o boku $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. To spostrzeżenie kończy dowód – sześciokąt KLMPQN jest foremny.

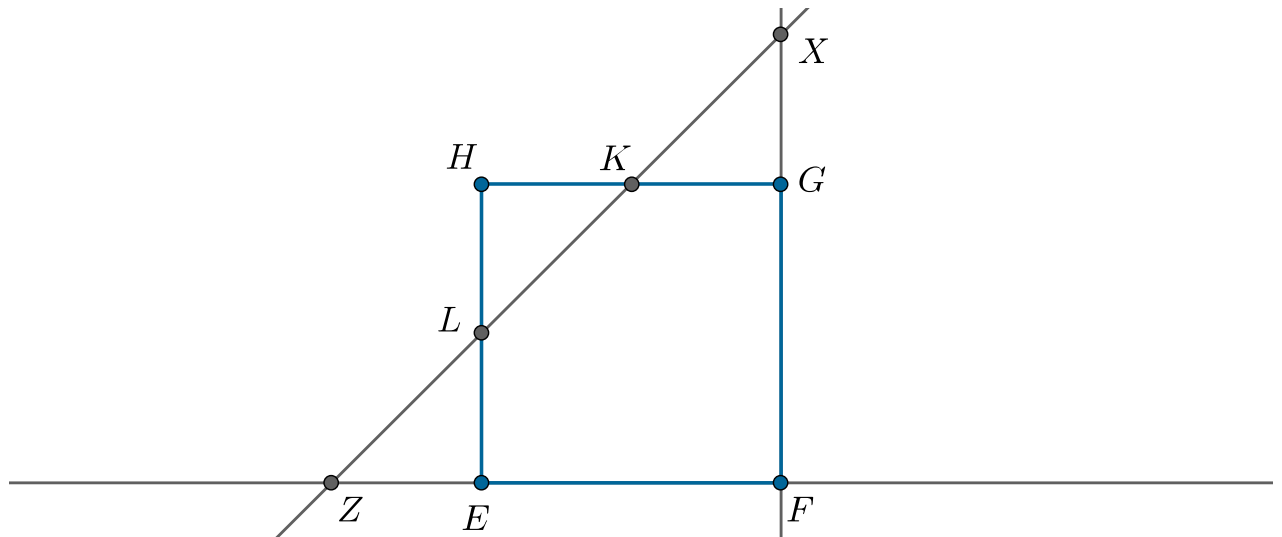
Podamy jeszcze jeden sposób uzasadnienia, że sześciokąt KLMPQN jest foremny. Rozpatrzmy proste KL, MP oraz NQ. Ponieważ leżą one w jednej płaszczyźnie, więc:

- proste KL i MP przecinają się w punkcie X , leżącym na krawędzi FG między płaszczyznami ścian BCGF oraz EHGF,
- proste MP i QN przecinają się w punkcie Y , leżącym na krawędzi FB między płaszczyznami ścian CGFB oraz AEFB,
- proste QN i KL przecinają się w punkcie Z , leżącym na krawędzi FE między płaszczyznami ścian GHEF oraz BAEF.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W płaszczyźnie ściany EFGH, na prostej KL leżą punkty X oraz Z.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ K i L są środkami krawędzi odpowiednio HG i HE , więc trójkąt HKL jest trójkątem prostokątnym i równoramiennym. Zatem w trójkątach prostokątnych KGX i LEZ kąty ELZ oraz XKG są równe 45° , co oznacza, że są to trójkąty równoramienne. Wobec tego każdy z nich jest przystający do trójkąta HKL . Stąd wynika, że $|XK| = |KL| = |LZ| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, a więc $|XZ| = 3|KL| = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Rozumując podobnie pokazujemy, że:

- $|XM| = |MP| = |PY| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, stąd $|XY| = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$,
- $|YQ| = |QN| = |NZ| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, stąd $|YZ| = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Trójkąt XYZ jest więc równoboczny i ma bok długości $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Każdy z trójkątów XML , YPQ oraz ZKN jest też równoboczny i ma bok długości $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. To oznacza, że w sześciokącie $KLMPQN$ każdy z boków jest równy $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ i każdy z kątów wewnętrznych ma miarę 120° . Zatem sześciokąt $KLMPQN$ jest foremny.

Zauważmy przy okazji, że jeżeli płaski przekrój sześcianu jest czworokątem, to płaszczyzna tego przekroju przecina pewne cztery ściany sześcianu. Ponieważ w sześcianie są trzy pary ścian równoległych, więc wśród tych czterech ścian sześcianu pewne dwie są równoległe. Zatem przekrój ten jest trapezem. W szczególności może być rombem, a także może być prostokątem.

Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach

Definicja: Graniastosłup prosty

Graniastosłup prosty to taki wielościan, którego dwie przystające ściany (podstawy graniastosłupa) są położone w równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany są prostokątami.

Graniastosłup

krok 2 z 2

Graniastosłup prosty to taki wielościan, którego dwie przystające ściany (podstawy graniastosłupa) są położone w równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany są prostokątami.

Wybierz liczbę wierzchołków podstawy.

$n = 3$

Poruszając punktem P, możesz obracać bryłę.

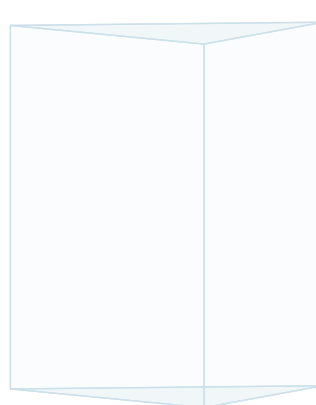
Graniastosłup trójkątny -
- podstawą graniastosłupa jest trójkąt.

liczba wierzchołków $w = ?$

liczba krawędzi $k = ?$

liczba ścian $s = ?$



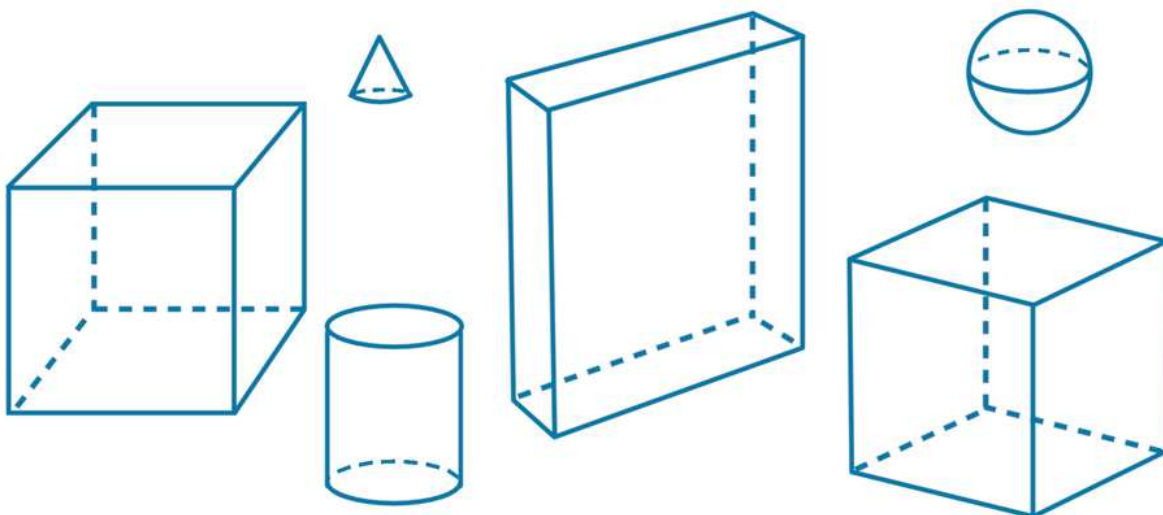


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnBY88PtA>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.



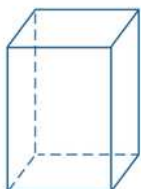
Na płaszczyźnie figury przestrzenne przedstawiamy w uproszczeniu.



Animacja

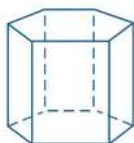
Przykład 1

Przykład ①



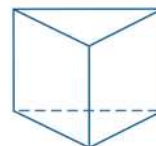
Graniastosłup o podstawie kwadratu.

Przykład ②



Graniastosłup o podstawie sześciokąta.

Przykład ③



Graniastosłup o podstawie trójkąta.

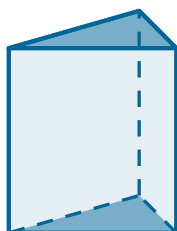
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

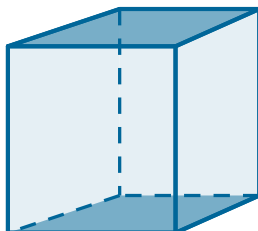
Animacja pokazuje przykłady trzech figur przestrzennych, które są graniastosłupem o podstawie kwadratu, graniastosłupem o podstawie sześciokąta i graniastosłupem o podstawie trójkąta.

Ważne!

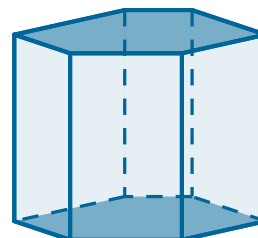
Podstawą graniastosłupa może być trójkąt, czworokąt i sześciokąt.



graniastosłup trójkątny



graniastosłup czworokątny

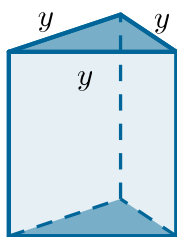


graniastosłup sześciokątny

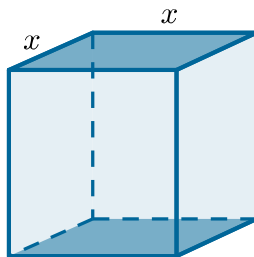
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

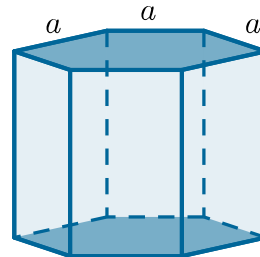
Jeżeli podstawą graniastosłupa jest wielokąt foremny (trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny itd.), to mówimy, że taki graniastosłup jest prawidłowy.



graniastosłup prawidłowy
trójkątny

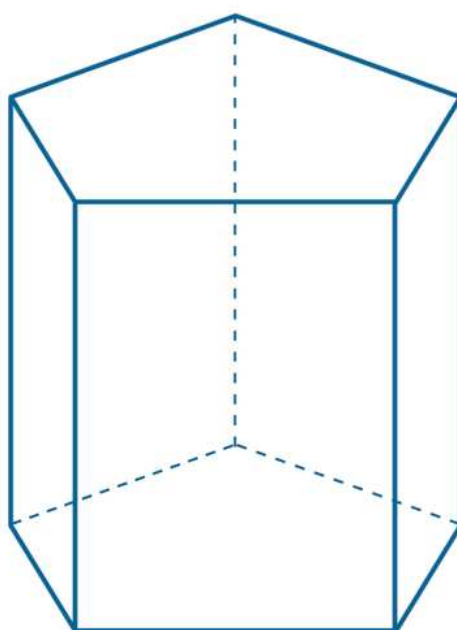


graniastosłup prawidłowy
czworokątny



graniastosłup prawidłowy
sześciokątny

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

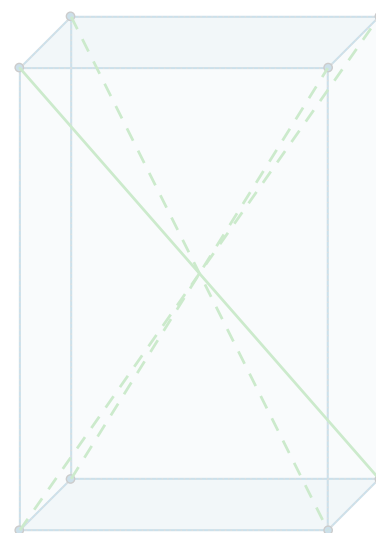
Graniastosłup, którego podstawą jest prostokąt, nazywać będziemy prostopadłością.

Odcinki w prostopadłości

Prostopadłościan

- ☒ wierzchołki Prostopadłościan ma 8 wierzchołków.
- ☒ krawędzie podstawy Prostopadłościan ma 8 krawędzi podstawy.
- ☒ krawędzie boczne Prostopadłościan ma 4 krawędzie boczne.
- ☒ podstawy Podstawy to dwa przystające prostokąty leżące w płaszczyznach równoległych.
- ☒ ściany boczne Ściany boczne prostopadłościanu są prostokątami.
- ☐ przekątna podstawy
- ☐ przekątna ściany bocznej
- ☒ przekątna bryły Prostopadłościan ma 4 przekątne.





Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnBY88PtA>

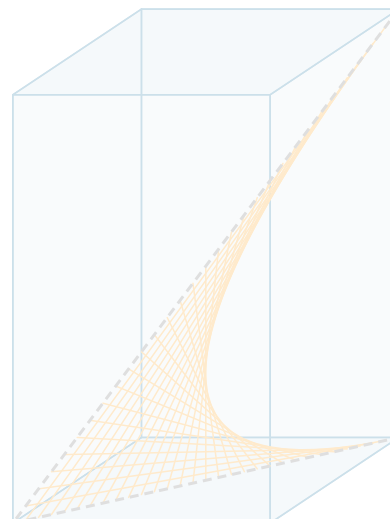
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Kąty w prostopadłościanie

Kąty w graniastosłupie czworokątnym

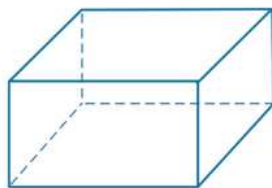
- ☐ kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy
- ☒ kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy
- ☐ kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych





Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnBY88PtA>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przekroje w prostopadłościanie

Ważne!

Sześcián to taki prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami.

Przykład 2

Krawędź sześcianu jest równa 6 cm. Obliczymy długość przekątnej sześcianu.

Przekątna sześcianu

krok 3 z 3

Obliczymy długość przekątnej sześcianu o krawędzi równej 6 cm.

Przekątna podstawy jest przekątną kwadratu o boku 6 cm, czyli

$$d_p = 6\sqrt{2}$$

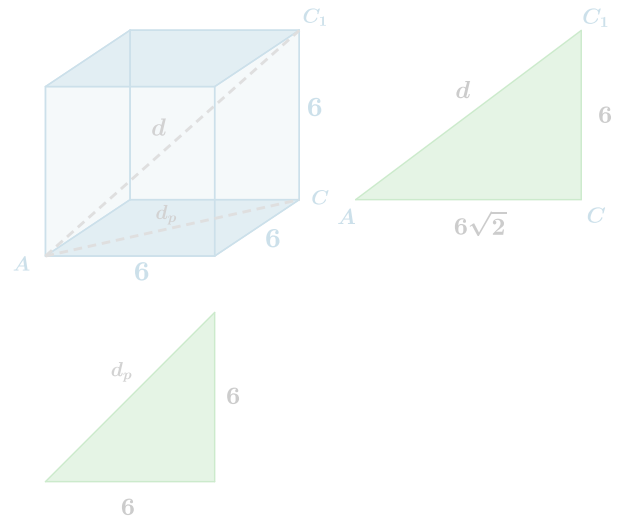
Przekątna sześcianu jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym ACC_1 .

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$d^2 = 6^2 + (6\sqrt{2})^2$$

$$d^2 = 36 + 72 = 108$$

$$d = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnBY88PtA>

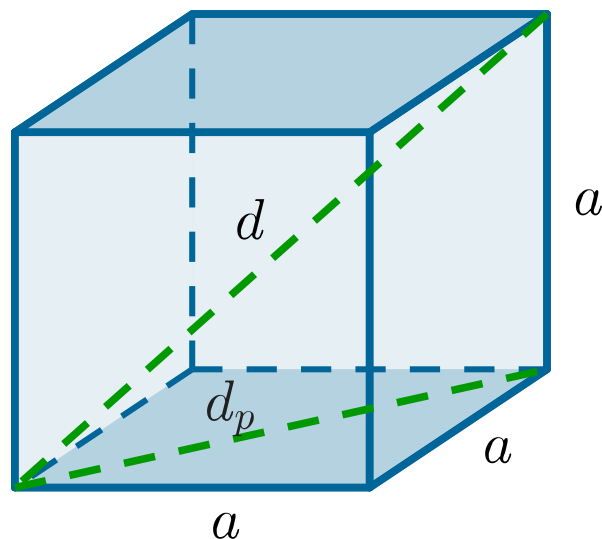
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Zauważ, że jeśli podobne obliczenia wykonamy dla dowolnego sześcianu o krawędzi a , to otrzymamy wzór na przekątną sześcianu.

Zapamiętaj!

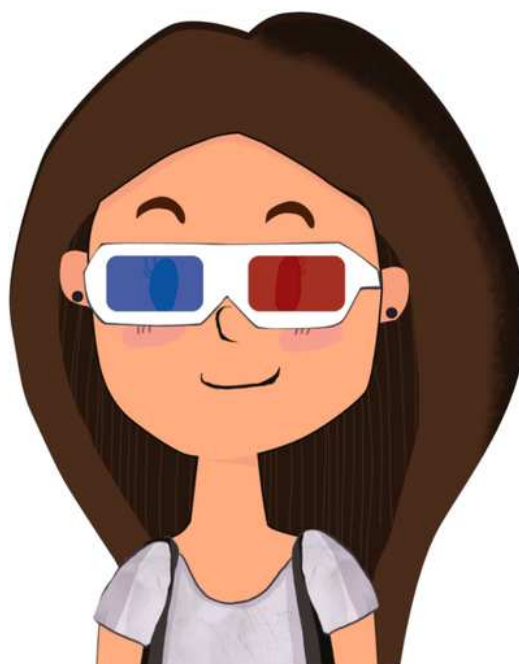
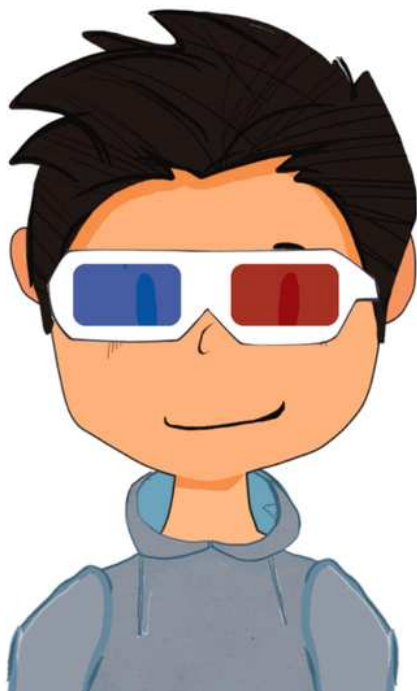
Przekątna sześcianu o krawędzi a jest równa

$$d = a\sqrt{3}$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

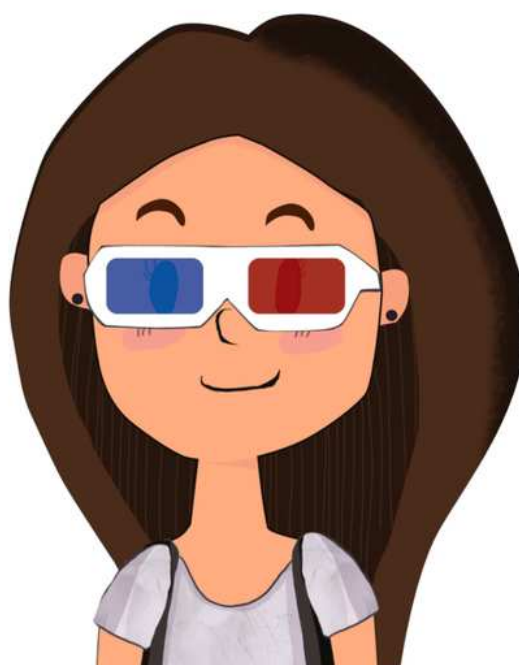
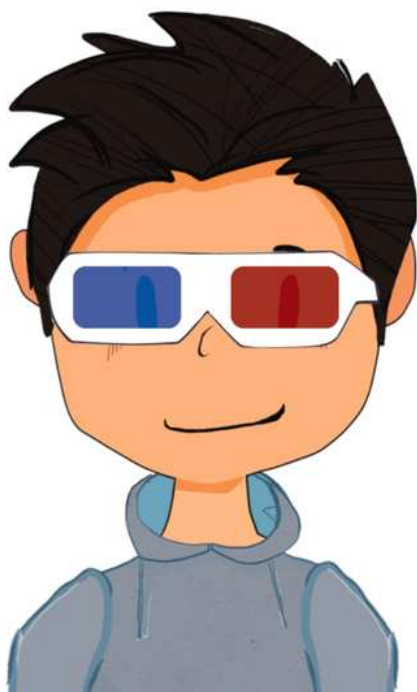
Siatka sześcianu



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje leżące na stole kostki do gry. Kreślone są krawędzie jednej kostki – powstaje sześcián. Dwa jednakowe sześciány rozkładają się na dwie różne siatki sześciánu.

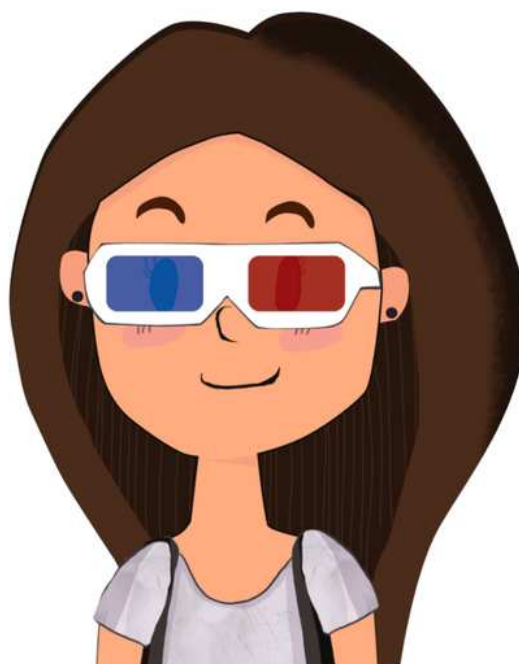
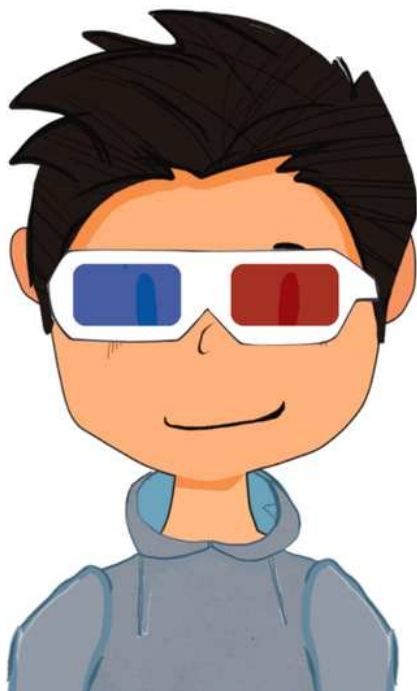
Siatka sześciánu



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki sześciánu, które składają się w jednakowe sześciány. Sześcián zamienia się w kostkę do gry, która leży z innymi kostkami na stole.

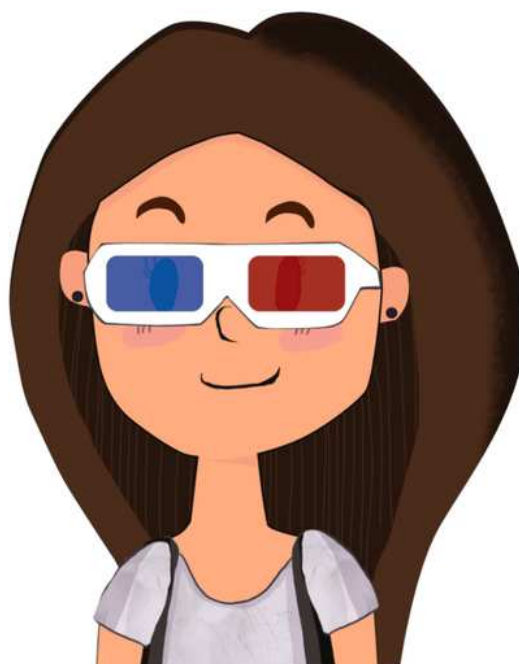
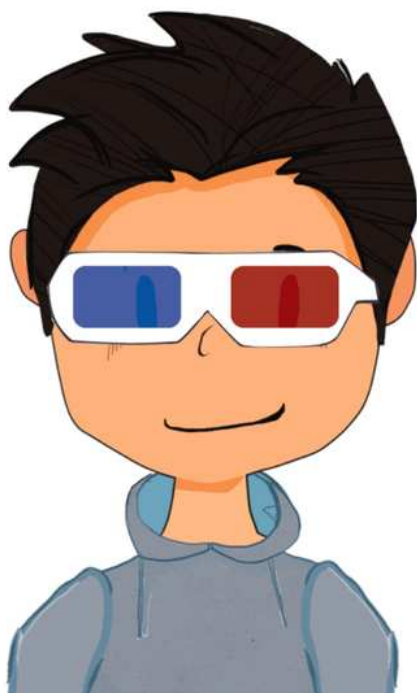
Siatka prostopadłościanu



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje kolumny. Kreślone są krawędzie jednej kolumny – powstaje prostopadłościan. Dwa jednakowe prostopadłościany rozkładają się na dwie różne siatki prostopadłościanu.

Siatka prostopadłościanu



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki prostopadłościanu, które składają się w jednakowe prostopadłościany. Prostopadłościan zmienia się w kolumnę, która stoi obok innych kolumn.

Siatka graniastosłupa



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje nakrętki na śruby. Kreślone są krawędzie jednej nakrętki – powstaje graniastosłup o podstawie sześciokąta foremego. Dwa jednakowe graniastosłupy rozkładają się na dwie różne siatki graniastosłupa.

Siatka graniastosłupa

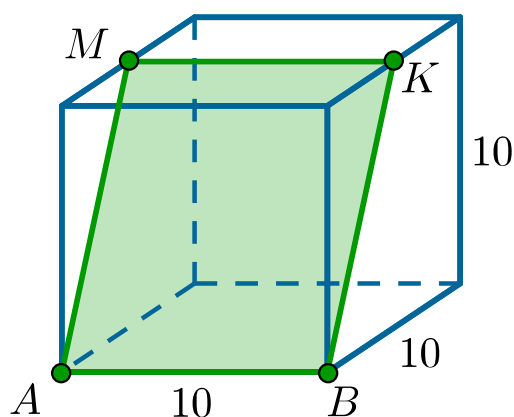


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki graniastosłupa, które składają się w jednakowe graniastosłupy. Graniastosłup zamienia się w nakrętkę leżącą między nakrętkami.

Przykład 3

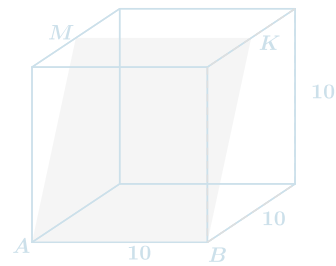
Punkty M i K są środkami krawędzi sześcianu. Obliczymy pole powierzchni czworokąta $ABKM$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odcinki AB i MK leżą na płaszczyznach równoległych i są sobie równe. Podobnie odcinki $AM \parallel BK$ oraz $|AM| = |BK|$. Ponadto odcinek BK leży na płaszczyźnie prostopadłej do podstawy sześcianu i jest prostopadły do krawędzi AB . Wynika z tego, że czworokąt $ABKM$ jest prostokątem. Obliczymy długości boków prostokąta $ABKM$.

Punkty K i M są środkami krawędzi sześcianu.
Oblicz pole czworokąta ABKM.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnBY88PtA>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa.

Zapamiętaj!

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$$

gdzie P_p oznacza pole podstawy graniastosłupa, a P_b – pole powierzchni bocznej.

W szczególności pole całkowite

- prostopadłościanu o krawędziach a , b , c jest równe

$$P_c = 2(ab + ac + bc)$$

- sześcianu o krawędzi a jest równe

$$P_c = 6a^2$$

- graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H jest równe

$$P_c = 2a^2 + 4aH$$

Zapamiętaj!

Objętość graniastosłupa jest równa

$$V = P_p \cdot H$$

gdzie P_p oznacza pole podstawy graniastosłupa, a H – wysokość bryły.

W szczególności objętość

- prostopadłościanu o krawędziach a , b , c jest równa $V = abc$
- sześcianu o krawędzi a jest równa

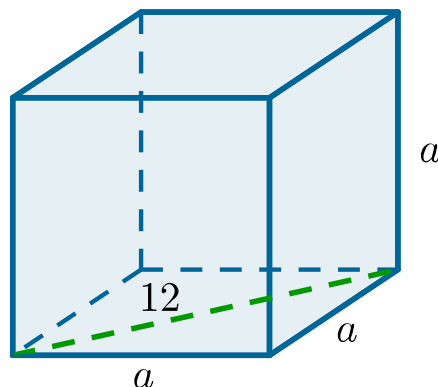
$$V = a^3$$

- graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H jest równa

$$V = a^2 \cdot H$$

Przykład 4

Przekątna podstawy sześcianu ma długość 12. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekątna kwadratu jest równa $a\sqrt{2}$, zatem otrzymujemy równanie $a\sqrt{2} = 12$, czyli $a = 6\sqrt{2}$.

Wynika z tego, że objętość sześcianu jest równa

$$V = a^3 = \left(6\sqrt{2}\right)^3 = 432\sqrt{2}$$

a pole powierzchni całkowitej

$$P_c = 6a^2 = 6 \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 432$$

Przykład 5

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość 6 cm, a przekątna ściany bocznej 10 cm. Obliczymy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krok 5 z 5
przekątna podstawy ma długość 6 cm,
a przekątna ściany bocznej 10 cm.
Obliczymy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

$$P_c = 2P_p + P_b \quad P_c = 2a^2 + 4aH$$

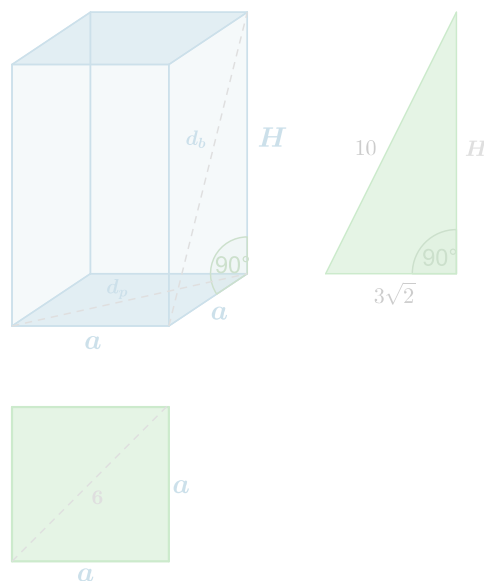
czyli: $P_p = (3\sqrt{2} \text{ cm})^2 = 18 \text{ (cm}^2\text{)}.$

$$H = \sqrt{82} \text{ cm}$$

Po wstawieniu do wzoru na pole powierzchni całkowitej otrzymamy:

$$P_c = 2 \cdot 18 + 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{82}$$

$$P_c = 36 + 24\sqrt{41} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnBY88PtA>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 6

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość $6\sqrt{2}$ cm, a przekątna graniastosłupa jest 2 razy dłuższa od przekątnej podstawy.

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość $6\sqrt{2}$ cm, a przekątna graniastosłupa jest 2 razy dłuższa niż przekątna podstawy. krok 5 z 5

$$P_c = 2P_p + P_b \quad P_c = 2a^2 + 4aH$$

czyli: $a = 6\sqrt{2},$

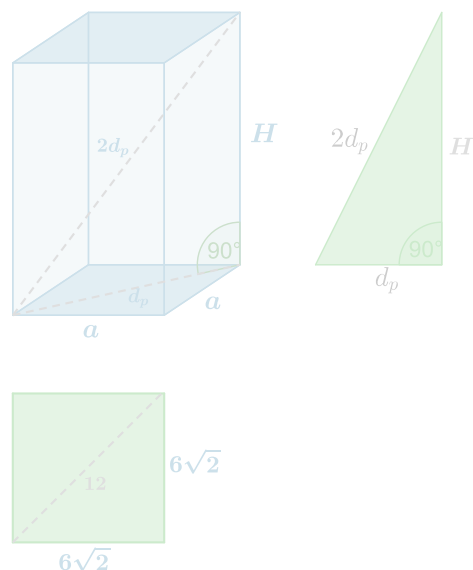
$$P_p = 72 \text{ cm}^2,$$

$$H = 12\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Po wstawieniu do wzoru na pole powierzchni całkowitej otrzymamy:

$$P_c = 2 \cdot 72 + 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{3}$$

$$P_c = 144 + 288\sqrt{6} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnBY88PtA>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 7

Przekątna prostopadłościanu ma długość 6 cm i jest nachylona do podstawy pod kątem 30° . Pole podstawy prostopadłościanu jest równe 24 cm^2 . Oblicz objętość bryły.

krok 5 z 5

Przekątna prostopadłościanu ma długość 6 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Pole podstawy prostopadłościanu jest równe 24 cm^2 . Oblicz objętość bryły.

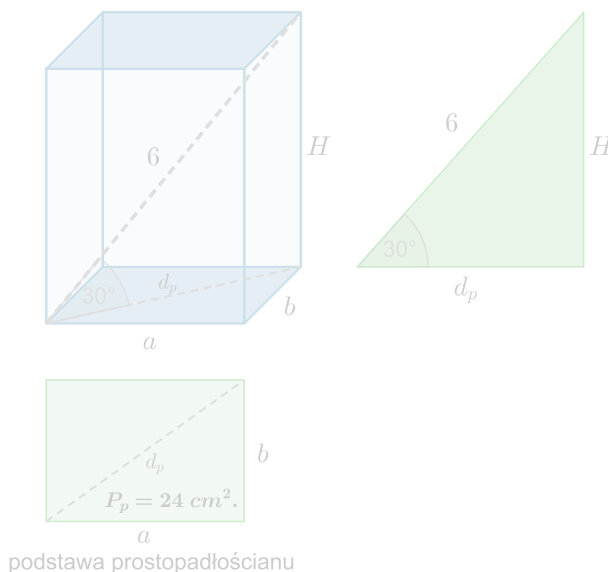
Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o polu równym

$$P_p = 24 \text{ cm}^2, \quad H = 3 \text{ cm}$$

Objętość prostopadłościanu jest równa

$$V = P_p \cdot H$$

$$\text{zatem } V = 24 \cdot 3 = 72 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnBY88PtA>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 8

Podstawą graniastoslupa jest trójkąt równoboczny o polu $12\sqrt{3}$. Przekątna ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły.

Graniastosłup prawidłowy trójkątny

krok 8 z 8

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny o polu $12\sqrt{3}$. Przekątna ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem 60° .

Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły.

$$a = 4\sqrt{3}, \quad H = 12.$$

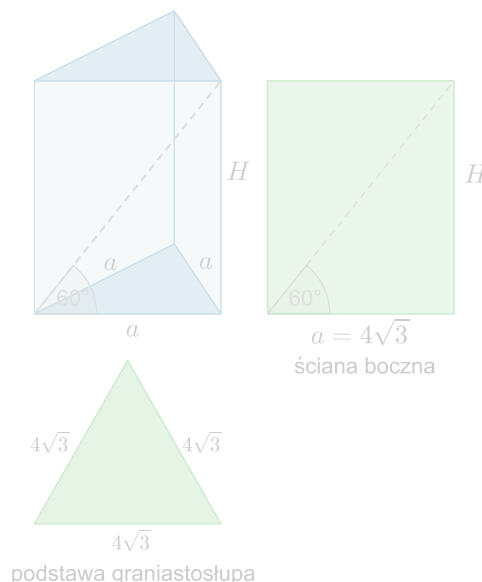
Zatem pole ściany bocznej jest równe

$$P_{sb} = a \cdot H = 4\sqrt{3} \cdot 12 = 48\sqrt{3}.$$

Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

$$P_c = 2P_p + 3P_{sb} \quad \text{czyli}$$

$$P_c = 2 \cdot 12\sqrt{3} + 3 \cdot 48\sqrt{3} = 168\sqrt{3}.$$

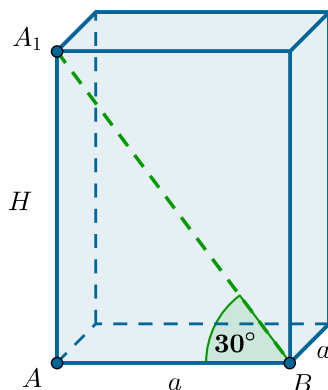


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnBY88PtA>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 9

Objętość graniastosłupa o podstawie kwadratu jest równa $72\sqrt{3}$. Przekątna ściany bocznej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Obliczmy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $P_c = 2a^2 + 4aH$ - zatem do jego obliczenia będzie potrzebna długość krawędzi podstawy i wysokość bryły.

W trójkącie prostokątnym $AB A_1$ mamy:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{H}{a}$$

zatem

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{a}$$

czyli

$$H = a \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Objętość graniastosłupa jest równa $V = a^2 \cdot H$, czyli $72\sqrt{3} = a^2 \cdot H$.

Wstawiając wyznaczoną wcześniej wartość H , otrzymamy

$72\sqrt{3} = a^3 \frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $a^3 = 216$. Wynika z tego, że $a = 6$ oraz

$$H = a \frac{\sqrt{3}}{3} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Zatem pole powierzchni całkowitej jest równe:

$$P_c = 2a^2 + 4aH = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 72 + 48\sqrt{3}$$

Przykład 10

Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 75 dm^3 . Przekątna podstawy graniastosłupa ma długość 5 dm. Oblicz sinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

krok 7 z 7

Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 75 dm^3 .
Przekątna podstawy graniastosłupa ma długość 5 dm.
Oblicz sinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

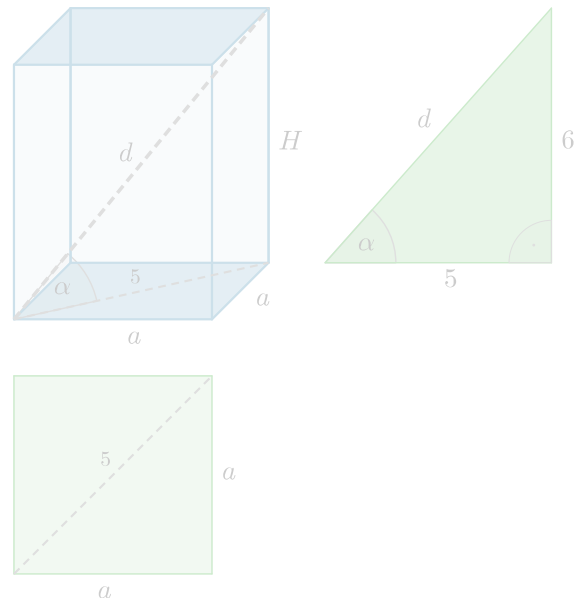
$$H = 6 \text{ dm} \qquad \sin \alpha = \frac{H}{d}$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$d^2 = 5^2 + 6^2, \quad \text{czyli} \quad d = \sqrt{61} \text{ (dm)}.$$

Wynika z tego, że

$$\sin \alpha = \frac{H}{d} = \frac{6}{\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnBY88PtA>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 1

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 286 cm^2 . Przekątna podstawy jest równa $4\sqrt{2} \text{ cm}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa

Ćwiczenie 2

Pole powierzchni całkowitej graniastopuła prawidłowego czworokątnego jest równe 144 cm^2 , a suma długości wszystkich krawędzi jest równa 60 cm . Oblicz objętość tego graniastopuła.

Ćwiczenie 3

Pole podstawy graniastopuła prawidłowego trójkątnego jest równe $27\sqrt{3}$, a przekątna ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem 45° . Oblicz objętość graniastopuła.

Ćwiczenie 4

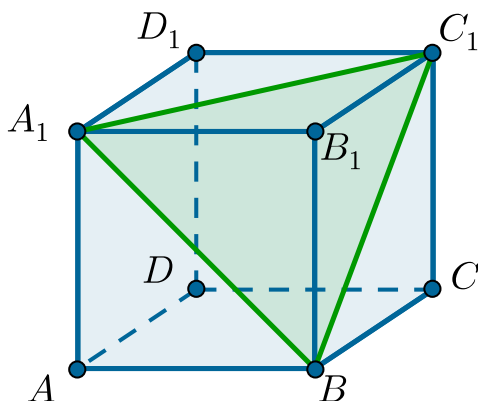
Jedna z krawędzi podstawy prostopadłościanu jest 3 razy większa od drugiej. Przekątna prostopadłościanu ma długość $2\sqrt{5} \text{ cm}$ i jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość prostopadłościanu.

Ćwiczenie 5

Przekątna podstawy sześcianu ma długość 5 cm . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu.

Ćwiczenie 6

Pole powierzchni całkowitej sześcianu $ABCD A_1B_1C_1D_1$ jest równe 432 cm^2 . Oblicz pole trójkąta A_1BC_1 .



Ćwiczenie 7

Przekątna sześcianu jest o 5 cm dłuższa od jego krawędzi. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu.

Ćwiczenie 8

Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

Ostrosłup i jego własności

Definicja: Ostrosłup

Ostrosłup to taki wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Ostrosłup

krok 2 z 2

Ostrosłup to taki wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Wybierz liczbę wierzchołków podstawy.

$n = 7$

Poruszając punktem P, możesz obracać bryłę.

Ostrosłup siedmiokątny -
- podstawą ostrosłupa jest siedmiokąt.

liczba wierzchołków $w =$

liczba krawędzi $k =$

liczba ścian $s =$

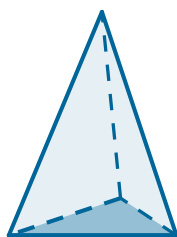
Dobrze

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxeuZnYIs>

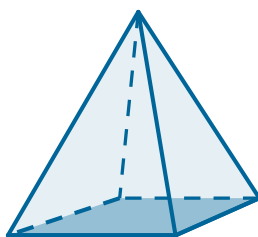
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ważne!

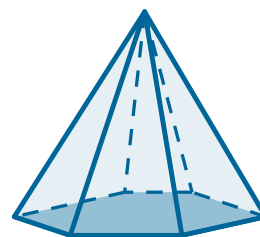
Podstawą ostrosłupa może być dowolny trójkąt, dowolny czworokąt i dowolny sześciokąt.



ostrosłup trójkątny



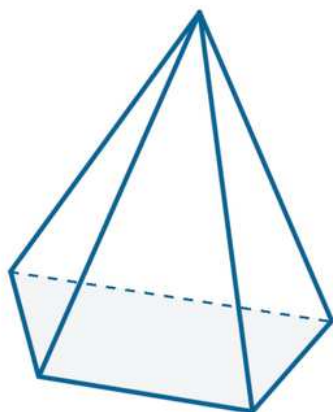
ostrosłup czworokątny



ostrosłup sześciokątny

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny (trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny itd...), a spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na jego podstawie, to mówimy, że taki ostrosłup jest prawidłowy.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

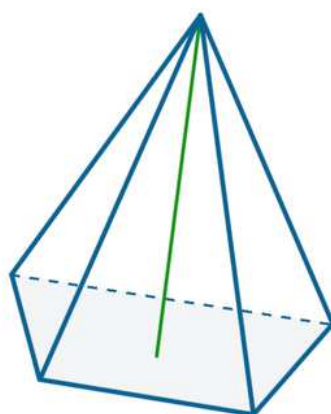
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Odcinki w ostrosłupie

Przykład 1

Chcąc narysować ostrosłup prosty, po narysowaniu podstawy zaznaczamy wysokość – odcinek prostopadły do płaszczyzny podstawy. Koniec wysokości, który nie leży na podstawie, łączymy z wierzchołkami podstawy.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

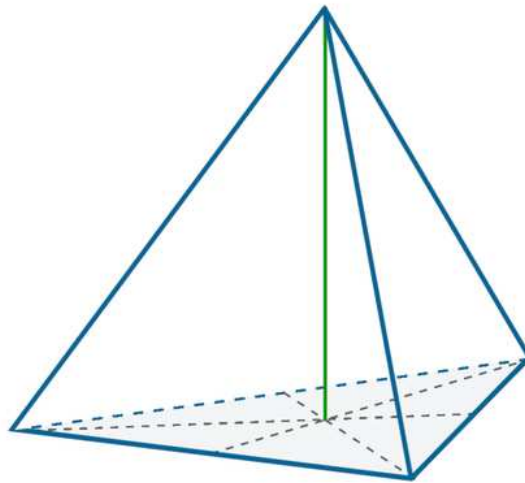
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 2

W przypadku ostrosłupów prawidłowych, po narysowaniu podstawy zaznaczamy spodek wysokości, który jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, a następnie rysujemy wysokość i krawędzie boczne.

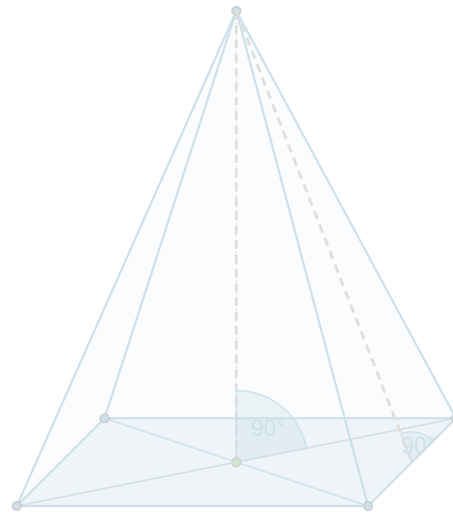
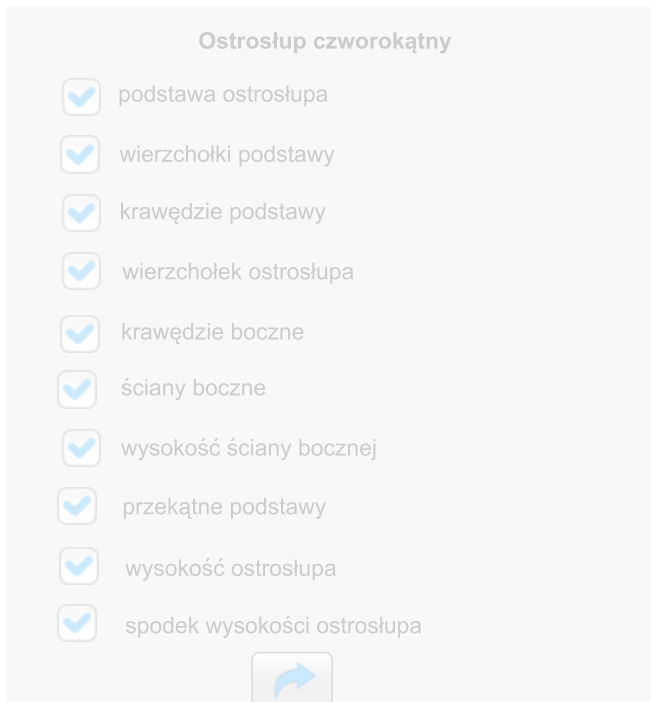
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym spodek wysokości leży na przecięciu wysokości podstawy.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

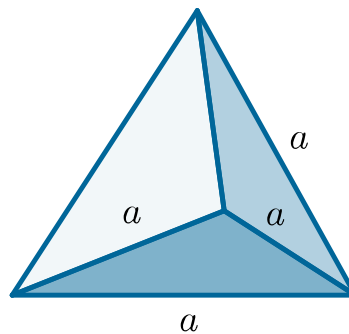


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxeuZnYIs>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Zapamiętaj!

- Jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są równe, to taki ostrosłup nazywamy prostym.
- Ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy będzianem.

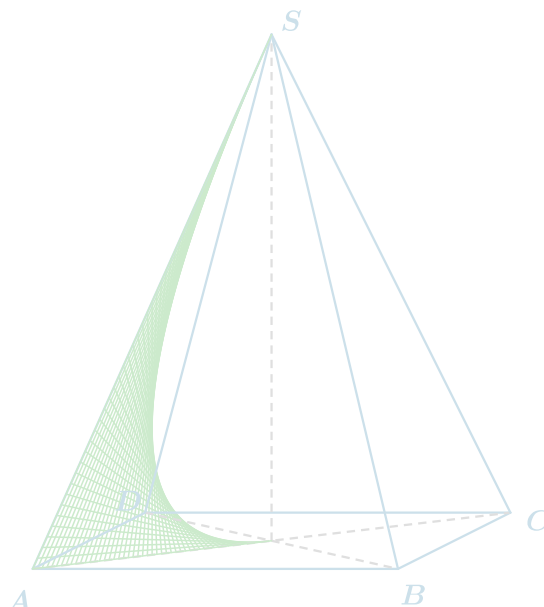


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąty w ostrosłupie

Kąty w ostrosłupie czworokątnym

- ☒ kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy
- ☐ kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy
- ☐ kąt między sąsiednimi krawędziami bocznymi
- ☐ kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi
- ☐ kąt między sąsiednimi ścianami



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxeuZnYIs>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa

Zapamiętaj!

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe

$$P_c = P_p + P_b$$

gdzie P_p oznacza pole podstawy ostrosłupa, a P_b – pole powierzchni bocznej.

W szczególności pole całkowite

czworoscianu o krawędzi a jest równe

$$P_c = a^2\sqrt{3}$$

Siatka ostrosłupa



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje drewniane klocki w kształcie brył. Kreślone są krawędzie jednego klocka – powstaje ostrosłup. Następnie dwa jednakowe ostrosłupy rozkładają się na dwie różne siatki ostrosłupa.

Siatka ostrosłupa



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, które składają się w jednakowe ostrosłupy. Ostrosłup zamienia się w drewniany klocek leżący między

innymi klockami.

Zapamiętaj!

Objętość ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

gdzie P_p oznacza pole podstawy ostrosłupa, a H – wysokość bryły.

W szczególności objętość

- czworoscianu o krawędzi a jest równa $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
- ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H jest równa $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot H$

Przykład 3

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 72 cm^2 . Krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α , takim że $\text{tg} \alpha = 0,6$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

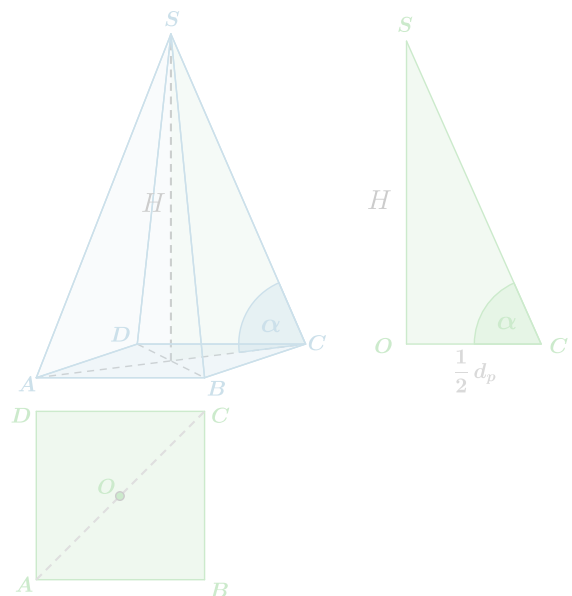
krok 7 z 7

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 72 cm^2 . Krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α , takim że $\text{tg} \alpha = 0,6$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

$$d_p = 12 \text{ cm} \quad H = 3,6 \text{ cm}$$

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$,

$$\text{czyli } V = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 3,6 = 86,4 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxeuZnYls>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 4

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 9 cm , a ściana boczna ostrosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

krok 10 z 10

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 9 cm, a ściana boczna ostrosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

Powierzchnia całkowita ostrosłupa składa się z podstawy i 4 trójkątów równoramiennych:

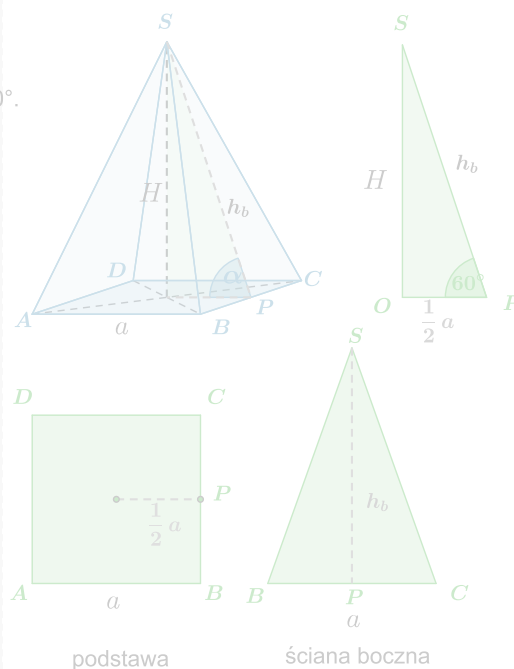
$$P_c = P_p + P_b = P_p + 4P_{sb}$$

$$\text{Zatem } P_p = (6\sqrt{3} \text{ cm})^2 = 108 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$P_b = 4 \cdot P_{sb} = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_b = 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 216 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Pole całkowite ostrosłupa jest równe:

$$P_c = 108 + 216 = 324 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxeuZnYls>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 5

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 2 : 3. Trójkąt ACS jest równoboczny, a jego pole jest równe $27\sqrt{3} \text{ dm}^2$. Oblicz objętość ostrosłupa.

krok 12 z 12

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 2 : 3. Trójkąt ACS jest równoboczny, a jego pole jest równe $27\sqrt{3} \text{ dm}^2$. Oblicz objętość ostrosłupa.

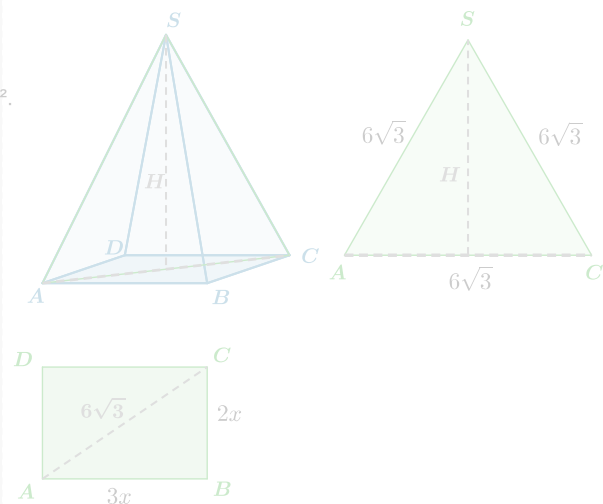
$$a = 6\sqrt{3} \text{ dm} \quad P_p = \frac{648}{13} \text{ dm}^2$$

Obliczymy wysokość ostrosłupa, która jest jednocześnie wysokością trójkąta równobocznego ACS.

$$H = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9 \text{ (dm)}.$$

Zatem objętość ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{648}{13} \cdot 9 = \frac{1944}{13} \text{ (dm}^3\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxeuZnYls>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 6

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, którego wysokość jest równa $9\sqrt{3} \text{ cm}$. Krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość ostrosłupa.

krok 9 z 10

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, którego wysokość jest równa $9\sqrt{3}$ cm. Krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość ostrosłupa.

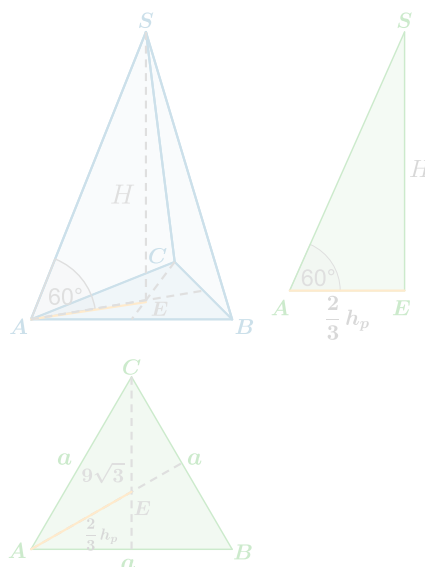
$$h_p = 9\sqrt{3} \text{ cm} \quad P_p = 81\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\frac{2}{3} h_p = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym AES otrzymamy

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{\frac{2}{3} h_p}, \text{ czyli } \sqrt{3} = \frac{H}{6\sqrt{3}}$$

zatem $H = 18 \text{ (cm)}$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxeuZnYls>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 7

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $9\sqrt{3} \text{ dm}^3$. Ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem α , którego $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{4}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

krok 15 z 15

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $9\sqrt{3} \text{ dm}^3$. Ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem α , którego $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{4}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

$$27\sqrt{3} = a^2 \cdot H \quad \text{oraz} \quad H = \frac{9a}{8}$$

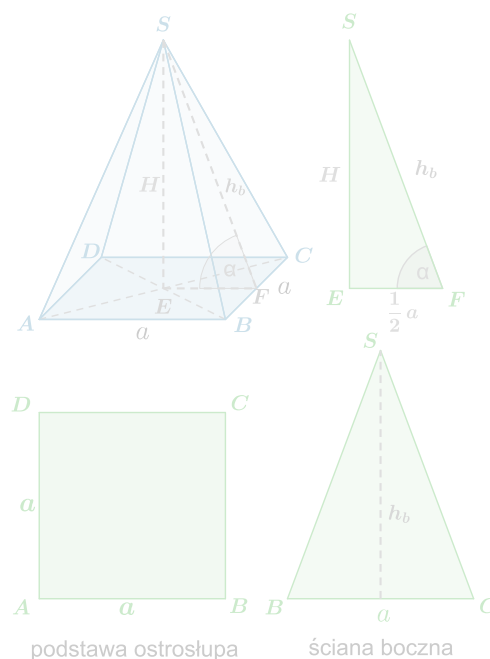
$$a = 2\sqrt{3} \text{ (dm)} \quad H = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ (dm)} \quad h_b = \frac{\sqrt{291}}{4} \text{ dm}$$

Powierzchnia ściany bocznej jest równa:

$$P_{sb} = \frac{1}{2} a \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{291}}{4} = \frac{3\sqrt{97}}{4} \text{ dm}^2$$

Zatem powierzchnia boczna ostrosłupa jest równa:

$$P_b = 4 \cdot P_{sb} = 4 \cdot \frac{3\sqrt{97}}{4} = 3\sqrt{97} \text{ dm}^2$$

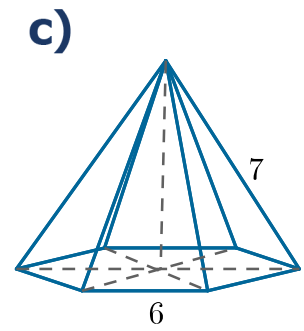
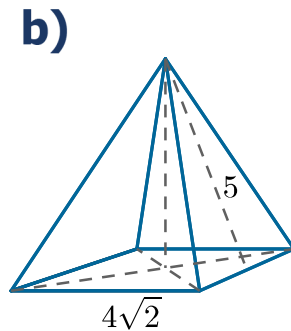
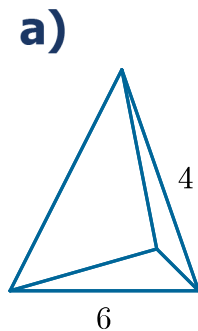


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxeuZnYls>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 1

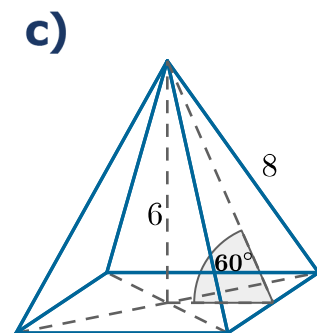
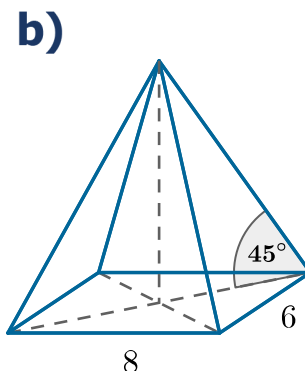
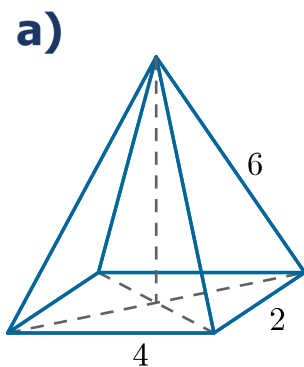
Na rysunkach przedstawiono ostrosłupy prawidłowe. Oblicz objętość każdego z ostrosłupów.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Wysokość ściany bocznej czworościanu foremnego jest równa 9 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego czworościanu.

Ćwiczenie 4

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $2\sqrt{3}$, a wysokość ściany bocznej jest równa 4. Oblicz objętość ostrosłupa.

Ćwiczenie 5

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o przekątnej długości 12 cm. Krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość ostrosłupa.

Ćwiczenie 6

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α , którego $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, wiedząc, że jego wysokość jest równa 15 dm.

Ćwiczenie 7

Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa krawędzi podstawy. Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe 48 dm^2 . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 8

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o polu $64\sqrt{3} \text{ cm}^2$, a ściany boczne są trójkątami prostokątnymi. Oblicz objętość ostrosłupa.

Ćwiczenie 9

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu 30 cm^2 , w którym jeden z boków jest o 40% krótszy od drugiego. Krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość ostrosłupa.

Ćwiczenie 10

Podstawą ostrosłupa jest sześciokąt foremny o polu równym $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Objętość ostrosłupa jest równa $48\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

Ćwiczenie 11

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Bryły obrotowe - walec

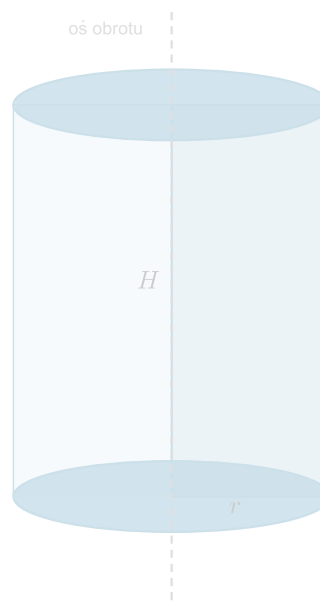
Bryły obrotowe – walec

Bryły obrotowe powstają w wyniku obrotu figury płaskiej dookoła prostej będącej osią obrotu.

W tym rozdziale zajmiemy się trzema bryłami obrotowymi: walcem, stożkiem i kulą.

Definicja: Walec

Walec jest to bryła, która powstała w wyniku obrotu prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dq25hcgT7>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Walec

☒ oś obrotu	☐ tworząca walca
☒ podstawa walca	☐ wysokość walca
☐ promień podstawy walca	☒ powierzchnia boczna walca
☐ średnica walca	☐ przekrój osiowy walca





Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dq25hcgT7>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

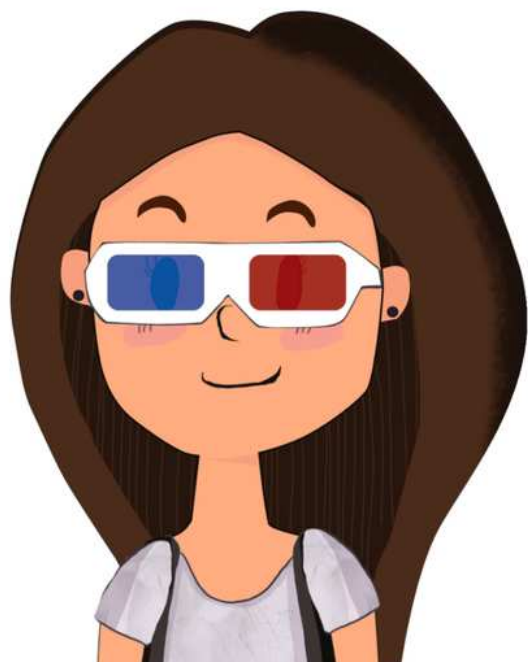
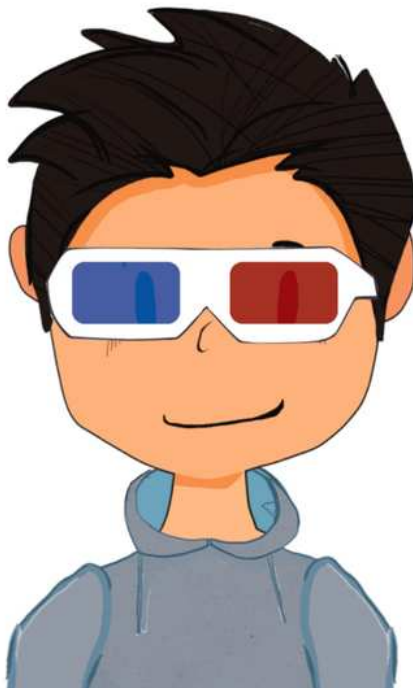
Zapamiętaj!

- Pole powierzchni całkowitej walca jest równe:

$$P_c = 2P_P + P_b = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot H = 2\pi r(r + h)$$

- Objętość walca jest równa:

$$V = \pi r^2 H$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje stojące na stole kubki w kształcie walca. Kreślone są krawędzie jednego kubka – powstaje walec, który następnie rozkłada się na siatkę walca.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje siatkę walca, która składa się w walec. Następnie walec zamienia się w kubek. Na stole stoją kubki w kształcie walca.

Przykład 1

Oblicz objętość walca powstałego w wyniku obrotu prostokąta o bokach 12 cm i 16 cm wokół dłuższego boku.

krok 6 z 6

Oblicz objętość walca powstałego w wyniku obrotu prostokąta o bokach 12 cm i 16 cm wokół dłuższego boku.

Dłuższy bok prostokąta zawiera się w osi obrotu.

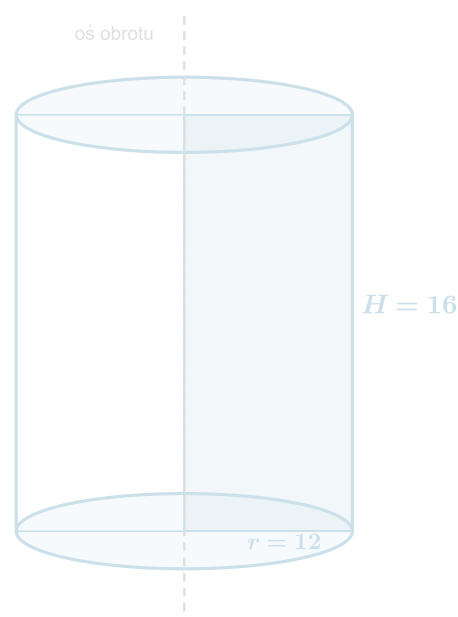
W wyniku opisanego obrotu powstał walec.

Wysokość walca jest równa $H = 16\text{ cm}$.

Promień podstawy walca jest równy $r = 12\text{ cm}$.

Wynika z tego, że objętość walca jest równa

$$V = \pi r^2 \cdot H = 12^2 \cdot 16 \cdot \pi = 2304\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dq25hcgT7>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0CC BY NC 3.0.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje baterię elektryczną. Kreślone są krawędzie – powstaje walec. Następnie przekroje skośne i poprzeczne dzielą walec na dwie bryły.

Przykład 2

Przekrój osiowy walca jest kwadratem, którego przekątna jest równa $24\sqrt{6}$. Oblicz objętość walca.

Przekrój osiowy walca jest kwadratem,
którego przekątna jest równa $24\sqrt{6}$.
Oblicz objętość walca.

krok 5 z 5

Przekrój osiowy walca jest kwadratem.
Jeden z jego boków jest średnicą walca, a drugi - wysokością.
Znając długość przekątnej, możemy obliczyć długość jego boku.

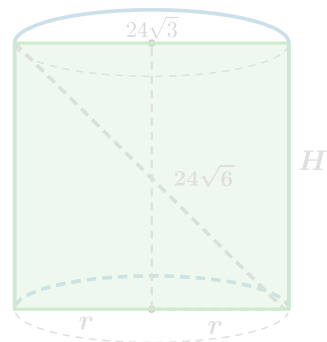
$$24\sqrt{6} = a\sqrt{2}, \quad \text{czyli} \quad a = 24\sqrt{3}.$$

Wynika z tego, że średnica walca jest równa $2r = 24\sqrt{3}$,
czyli $r = 12\sqrt{3}$.

Wysokość walca jest równa $H = 24\sqrt{3}$.

Zatem objętość walca jest równa

$$V = \pi r^2 \cdot H = (12\sqrt{3})^2 \cdot 24\sqrt{3} \pi = 10368\pi\sqrt{3}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dq25hcgT7>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 3

Objętość walca jest równa $729\pi \text{ cm}^3$, a średnica podstawy walca jest 2 razy dłuższa od jego wysokości. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

krok 7 z 7

Objętość walca jest równa $729\pi \text{ cm}^3$,
a średnica podstawy walca jest 2 razy dłuższa od jego wysokości.
Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Objętość walca jest równa $V = \pi r^2 \cdot H$.

Z treści zadania wynika że $729\pi = \pi r^2 \cdot H$

czyli $r^2 \cdot H = 729$.

Wiadomo również, że $2r = 2H$, czyli $H = r$.

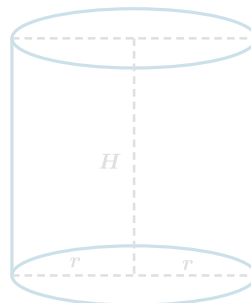
Po wstawieniu do wcześniej zapisanego równania otrzymamy:

$$r^2 \cdot r = 729 \quad \text{więc} \quad r^3 = 729, \quad \text{czyli} \quad r = 9 \text{ (cm)}.$$

Zatem wysokość walca $H = 9 \text{ (cm)}$.

Pole powierzchni całkowitej walca jest równe:

$$P_c = 2\pi \cdot r (r + H) = 2\pi \cdot 9 (9 + 9) = 324\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dq25hcgT7>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 4

Powierzchnia boczna walca jest kwadratem o przekątnej długości $8\sqrt{2} \text{ cm}$. Oblicz objętość tego walca.

Powierzchnia boczna walca jest kwadratem o przekątnej długości $8\sqrt{2}$ cm.

Oblicz objętość tego walca.

Przekątna kwadratu jest równa $d = 8\sqrt{2}$ cm, zatem bok kwadratu jest równy $a = 8$ cm.

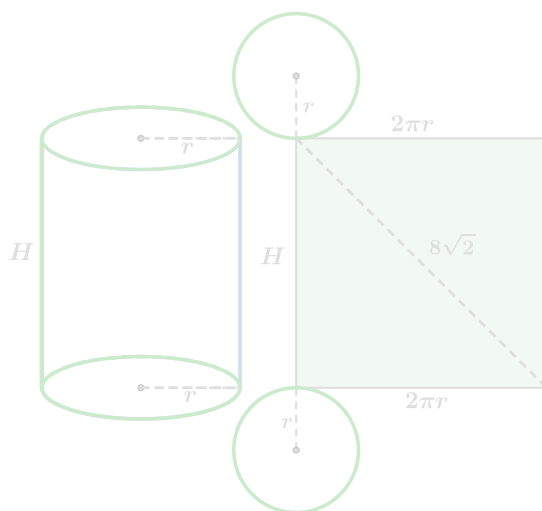
Jeden z boków kwadratu jest równy wysokości walca, zatem $H = 8$ cm.

Drugi z boków, po zwinięciu walca, stanowi obwód koła, które jest podstawą walca.

Wynika z tego, że $2\pi r = 8$, czyli $r = \frac{4}{\pi}$.

Obliczmy objętość walca:

$$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot 8 = \frac{128}{\pi} \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dq25hcgT7>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 5

Podstawą walca jest koło o średnicy $12\sqrt{3}$ dm. Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca.

Podstawą walca jest koło o średnicy $12\sqrt{3}$ dm. krok 4 z 5

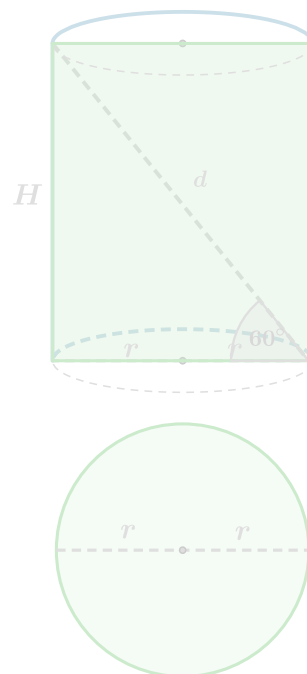
Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca.

Podstawą walca jest koło o średnicy $2r = 12\sqrt{3}$, zatem promień jest równy $r = 6\sqrt{3}$ (dm).

Z definicji funkcji w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\tan 60^\circ = \frac{H}{2r}, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{3} = \frac{H}{12\sqrt{3}}.$$

Wynika z tego, że $H = 36$ (dm).



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dq25hcgT7>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 1

Prostokąt o bokach 9 cm i 12 cm obraca się wokół dłuższego boku. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca, który powstanie w wyniku tego obrotu.

Ćwiczenie 2

Kwadrat o polu 256 cm^2 obraca się wokół boku. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca otrzymanego w wyniku tego obrotu.

Ćwiczenie 3

Walec o promieniu 5 cm powstał w wyniku obrotu prostokąta, którego przekątna jest równa 13 cm. Oblicz objętość walca.

Ćwiczenie 4

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość $6\sqrt{3}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy walca pod kątem 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.

Ćwiczenie 5

Oblicz objętość walca, którego wysokość jest równa 14 cm, a pole powierzchni bocznej $112\pi \text{ cm}^2$.

Ćwiczenie 6

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu 180 cm^2 . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.

Ćwiczenie 7

Pole podstawy walca jest równe $18\pi \text{ cm}^2$ i stanowi 30% pola powierzchni bocznej. Oblicz objętość tego walca.

Ćwiczenie 8

80% naczynia w kształcie walca o średnicy 8 cm i wysokości 15 cm jest wypełnione wodą. Ile sześciennych kostek o krawędzi 2 cm można wrzucić do tego naczynia, tak aby woda nie wylała się z niego?

Ćwiczenie 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

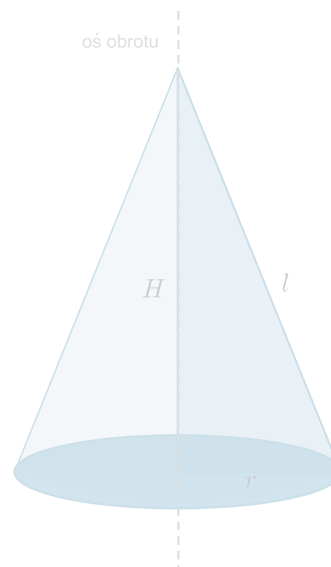
Bryły obrotowe - stożek

Definicja: Stożek

Stożek to bryła, która powstała w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.

Stożek

Stożek to bryła, która powstała w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Daj7psdP>

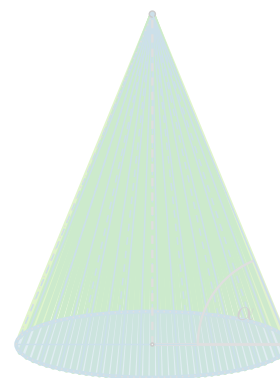
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Stożek

- | | |
|---|--|
| ☐ oś obrotu | ☒ tworząca stożka |
| ☒ podstawa stożka | ☒ wysokość stożka |
| ☒ promień podstawy stożka | ☒ powierzchnia boczna stożka |
| ☒ średnica stożka | ☐ przekrój osiowy stożka |
| ☒ wierzchołek stożka | ☐ kąt rozwarcia stożka |
| ☒ kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy | |

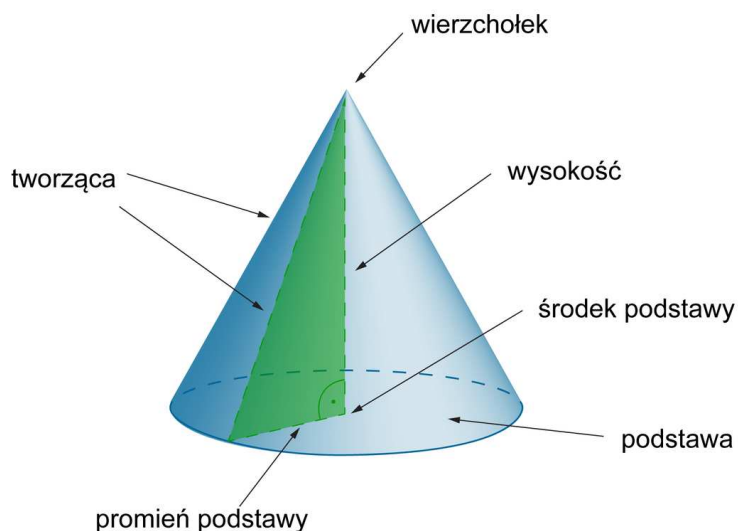
Tworzącą stożka

jest każdy odcinek łączący wierzchołek stożka z punktem na krawędzi podstawy.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Daj7psdP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapamiętaj!

- Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe:

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$

- Objętość stożka jest równa:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$

Siatka stożka



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje stojące na drodze pachołki drogowe w kształcie stożka. Kreślone są krawędzie jednego pachołka - powstaje stożek, który następnie rozkłada się na siatkę stożka.

Siatka stożka



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje siatkę stożka, która następnie składa się w stożek. Stożek zamienia się w pachołek drogowy. Na drodze stoją cztery pachołki.

Przykład 1

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 cm i 9 cm obraca się wokół dłuższego boku. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanego w ten sposób stożka.

krok 8 z 8

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 cm i 9 cm obraca się wokół dłuższego boku.
Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanego w ten sposób stożka.

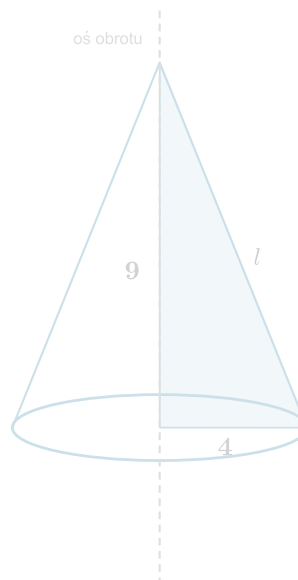
$$H = 9 \text{ cm}, \quad r = 4 \text{ cm}, \quad l = \sqrt{97} \text{ cm}.$$

Wynika z tego, że objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} 4^2 \cdot 9 \cdot \pi = 48\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Pole powierzchni całkowitej jest równe

$$P_c = \pi r (r + l) = \pi \cdot 4 (4 + \sqrt{97}) = 4\pi (4 + \sqrt{97}) \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Daj7psdP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 2

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym, którego przeciwprostokątna jest równa 8 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym, krok 5 z 5
którego przeciwprostokątna jest równa 8 cm.

Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym.

Przypustokątne trójkąta są jednocześnie tworzącymi stożka.

Wynika z tego, że przekrój osiowy jest trójkątem równoramiennym.

Przeciwprostokątna jest równa średnicy podstawy stożka.

Zatem $8 = 2r$, czyli $r = 4$ cm.

Z własności trójkąta prostokątnego równoramiennego wynika, że

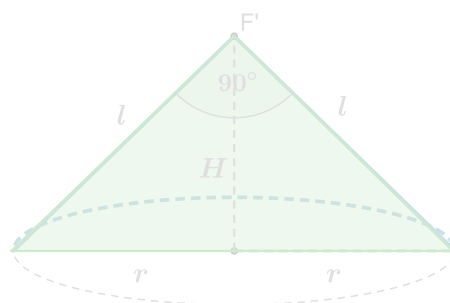
$H = r = 4$ cm oraz $l = r\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm.

Objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{64}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

a pole powierzchni bocznej

$$P_b = \pi r l = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Daj7psdP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 3

Pole podstawy stożka jest równe 48π cm², a jego tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α , takim, że $\tan \alpha = \frac{4}{7}$. Oblicz objętość stożka.

Pole podstawy stożka jest równe 48π cm², krok 5 z 5

a jego tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy

pod kątem α , takim, że $\tan \alpha = \frac{4}{7}$.

Oblicz objętość stożka.

Pole podstawy jest równe $P_p = 48\pi$ cm²,

czyli $\pi r^2 = 48\pi$, zatem $r = 4\sqrt{3}$ (cm).

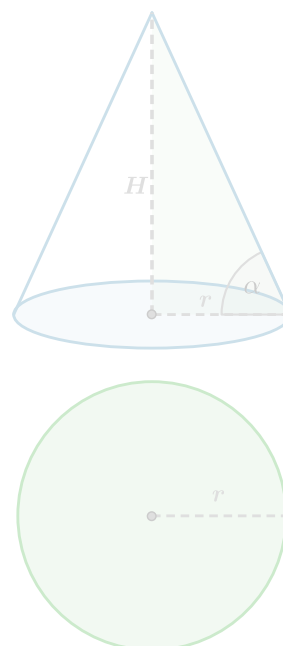
Z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym otrzymujemy

$$\tan \alpha = \frac{H}{r}, \text{ czyli } \frac{4}{7} = \frac{H}{4\sqrt{3}}.$$

Wynika z tego, że $H = \frac{16\sqrt{3}}{7}$ (cm).

Obliczmy objętość stożka

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi (4\sqrt{3})^2 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{7} = \frac{768\sqrt{3}}{21} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Daj7psdP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 4

Oblicz objętość stożka, którego powierzchnia boczna jest wycinkiem koła stanowiącym $\frac{2}{3}$ koła o promieniu 9 cm.

Oblicz objętość stożka, krok 7 z 7
którego powierzchnia boczna jest wycinkiem
koła stanowiącym $\frac{2}{3}$ koła o promieniu 9 cm.

$$r = 6 \text{ cm}$$

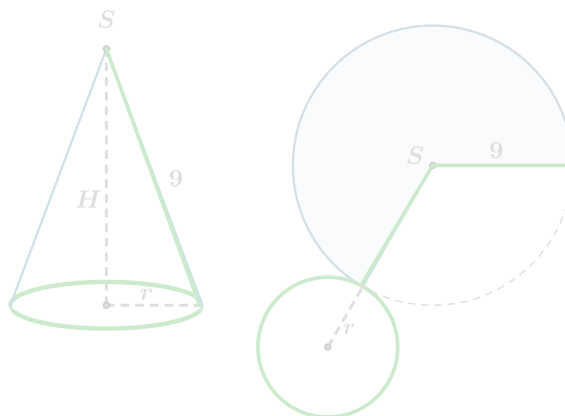
Promień wycinka koła jest jednocześnie
tworzącą stożka.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczymy wysokość stożka:

$$9^2 = 6^2 + H^2, \text{ czyli } H = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ (cm)}.$$

Objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{5} = 36\pi\sqrt{5} \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Daj7psdP>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 1

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu $48\sqrt{3} \text{ dm}^2$. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego stożka.

Ćwiczenie 2

Trójkąt o przeciwprostokątnej długości $8\sqrt{3} \text{ cm}$ obrócono wokół prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych. Kąt rozwarcia otrzymanego w ten sposób stożka jest równy 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Ćwiczenie 3

Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyźnie jest półkołem o promieniu 14 cm. Oblicz objętość stożka.

Ćwiczenie 4

Koło o średnicy 24 cm podzielono na dwa wycinki koła w ten sposób, że jeden z nich stanowi $\frac{1}{5}$ drugiego. Z obu wycinków utworzono powierzchnie boczne stożków. Niech V_1 oznacza objętość stożka utworzonego z większego wycinka, V_2 – objętość stożka utworzonego z mniejszego wycinka. Wyznacz stosunek $\frac{V_1}{V_2}$.

Ćwiczenie 5

Podstawą stożka jest koło o polu $12\pi \text{ cm}^2$. Pole powierzchni bocznej jest 2 razy większe od pola podstawy. Oblicz sinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

Ćwiczenie 6

Walec i stożek mają równe promienie podstawy r i wysokości H . Oblicz stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola powierzchni bocznej stożka.

Ćwiczenie 7

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm obraca się wokół przeciwprostokątnej. Oblicz objętość otrzymanej w ten sposób bryły.

Ćwiczenie 8

Stożek o promieniu podstawy 2 cm i wysokości 8 cm przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy przechodzącą przez środek wysokości stożka. Oblicz stosunek objętości brył na jakie został podzielony stożek.

Ćwiczenie 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Bryły w 3D

Przekrój kuli

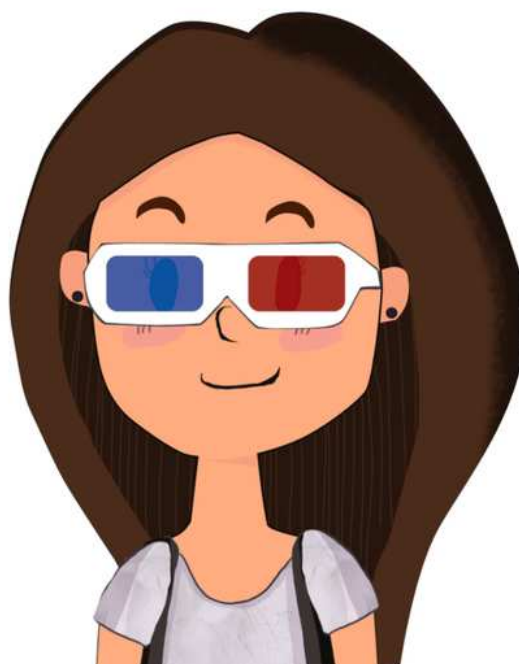
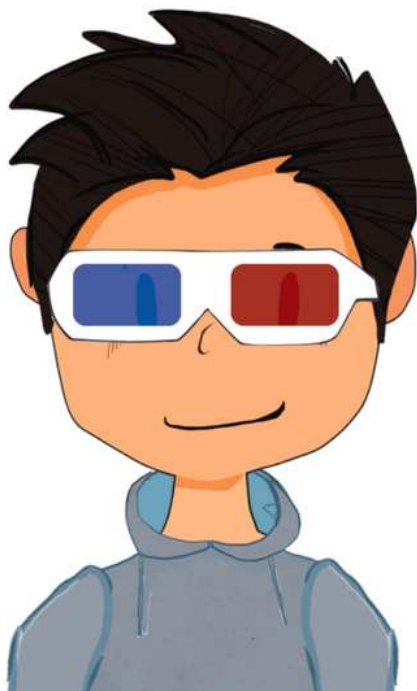


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje kulę ziemską, która zmienia się w kuli. Kula częściowo zanika, widoczna jest półkula i koło wielkie kuli.

Siatka sześcianu

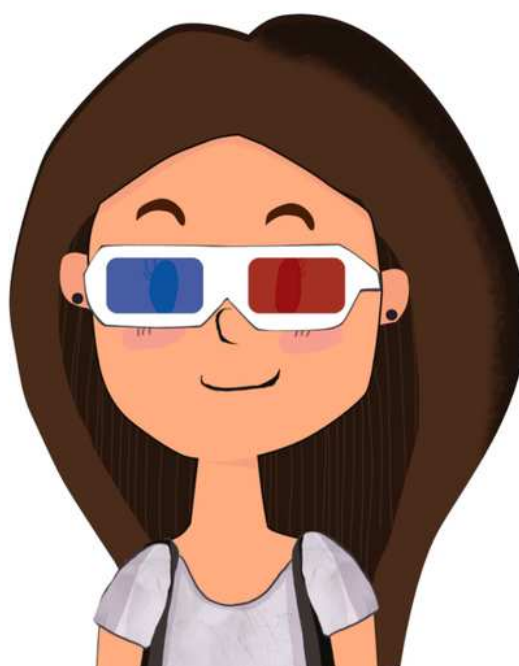
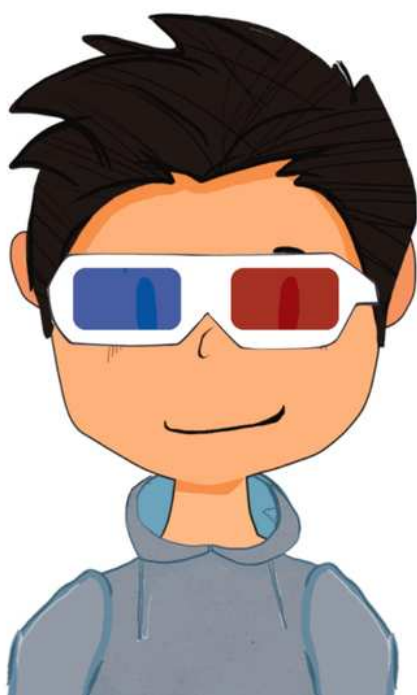


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje sześcián, który rozkłada się na siatkę sześciánu o krawędzi długości a . Zapis $P = 6$ razy a do kwadratu.

Siatka sześciánu



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje leżące na stole kostki do gry. Kreślone są krawędzie jednej kostki – powstaje sześcián. Dwa jednakowe sześciány rozkładają się na dwie różne siatki sześciánu.

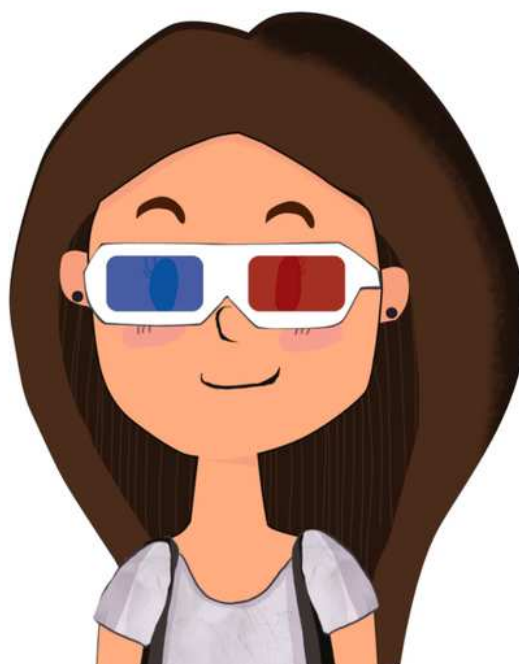
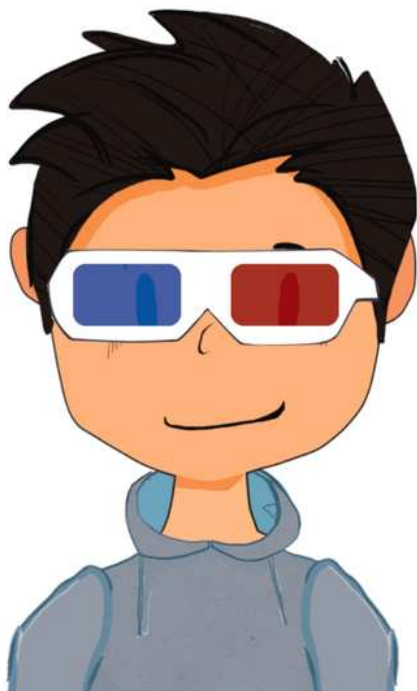
Siatka sześciánu



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki sześciánu, które składają się w jednakowe sześciány. Sześcián zamienia się w kostkę do gry, która leży z innymi kostkami na stole.

Sześcián

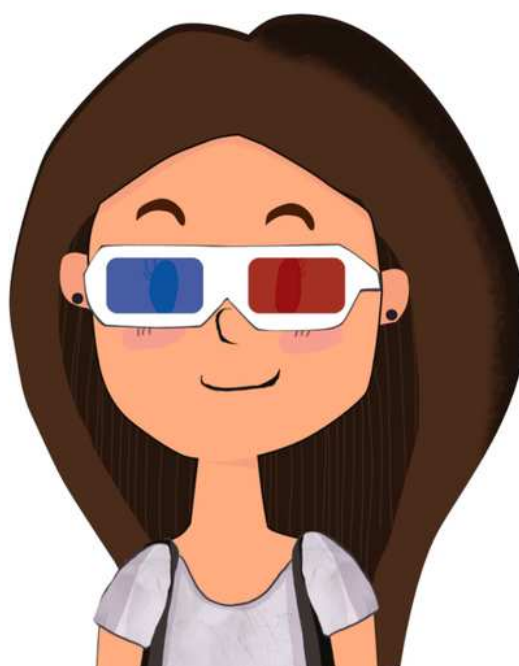
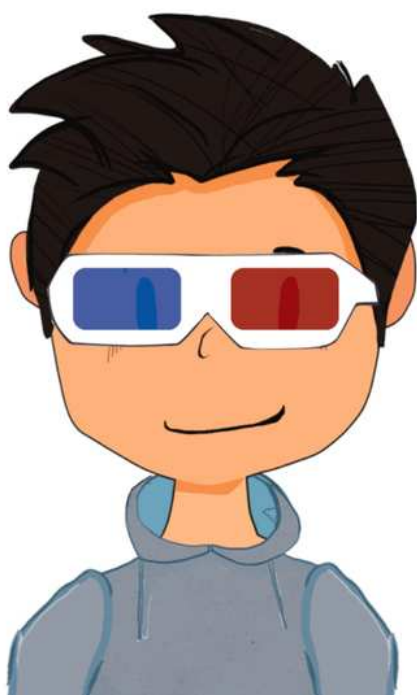


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje obracający się sześcián, który pozostawia na płaszczyźnie różne odbicia.

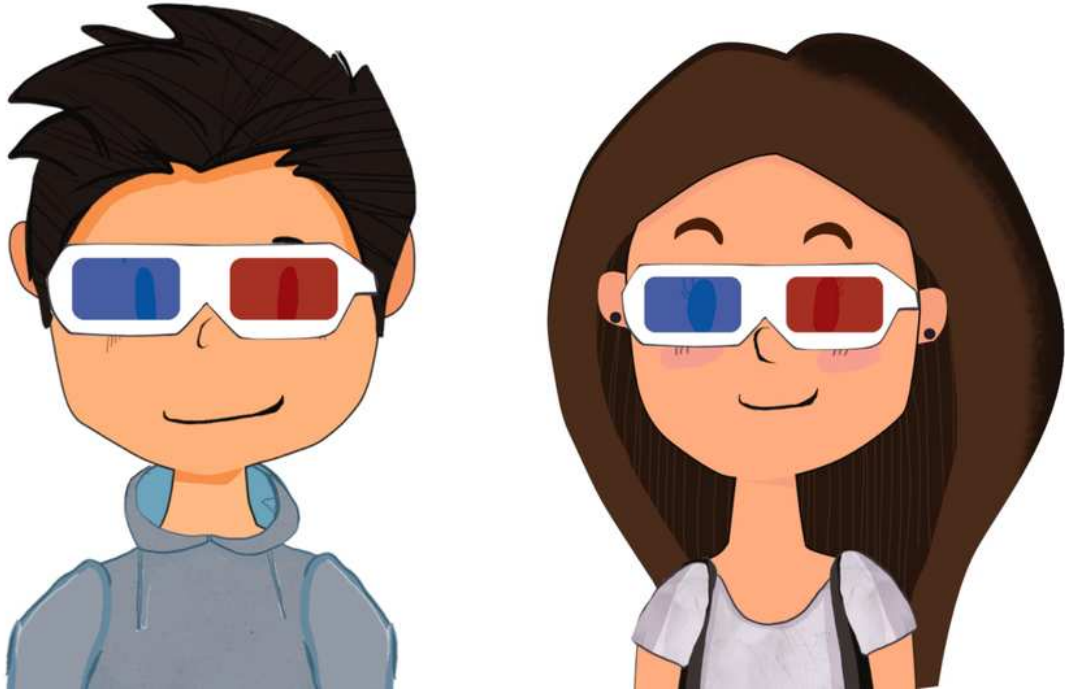
Siatka prostopadłościánu



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje kolumny. Kreślone są krawędzie jednej kolumny – powstaje prostopadłościan. Dwa jednakowe prostopadłościany rozkładają się na dwie różne siatki prostopadłościanu.

Siatka prostopadłościanu



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki prostopadłościanu, które składają się w jednakowe prostopadłościany. Prostopadłościan zmienia się w kolumnę, która stoi obok innych kolumn.

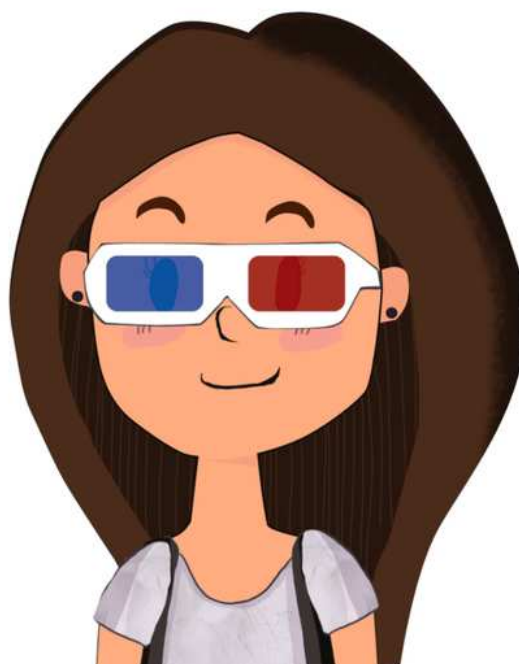
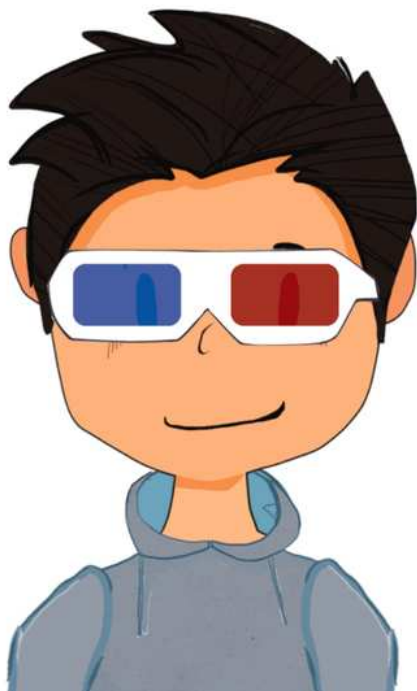
Siatka prostopadłościanu. Wzór na pole prostopadłościanu.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje prostopadłościan, który rozkłada się na siatkę prostopadłościanu. Zaznaczone są pola poszczególnych ścian: $P = a \text{ razy } b$, $P = b \text{ razy } c$, $P = a \text{ razy } c$. Zapis: $P = 2a \text{ razy } b + 2b \text{ razy } c + 2a \text{ razy } c$.

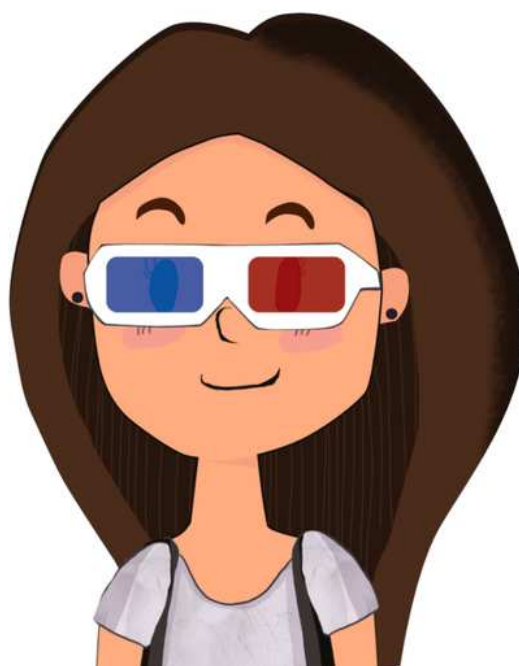
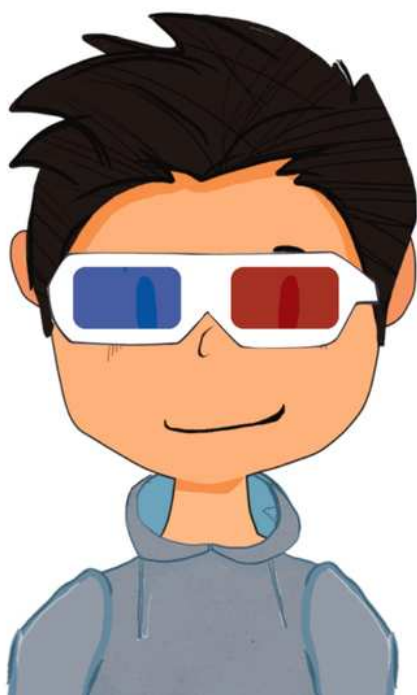
Siatka stożka



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje stojące na drodze pachółki drogowe w kształcie stożka. Kreślone są krawędzie jednego pachółka - powstaje stożek, który następnie rozkłada się na siatkę stożka.

Siatka stożka



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje siatkę stożka, która następnie składa się w stożek. Stożek zamienia się w pacholek drogowy. Na drodze stoją cztery pacholki.

Siatka graniastosłupa

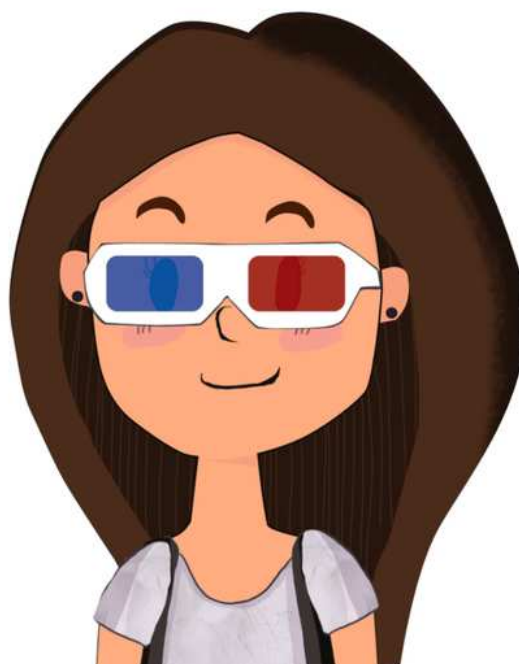
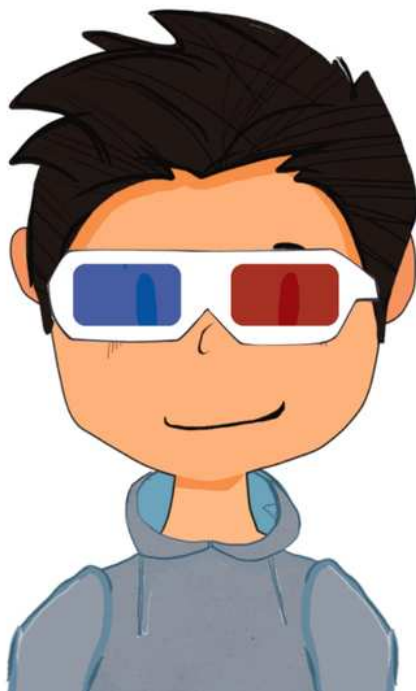


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje siatkę graniastosłupa o podstawie trójkąta, która składa się w graniastosłup. Graniastosłup zmienia się w drewniany klocek leżący wśród innych klocków.

Siatka graniastosłupa

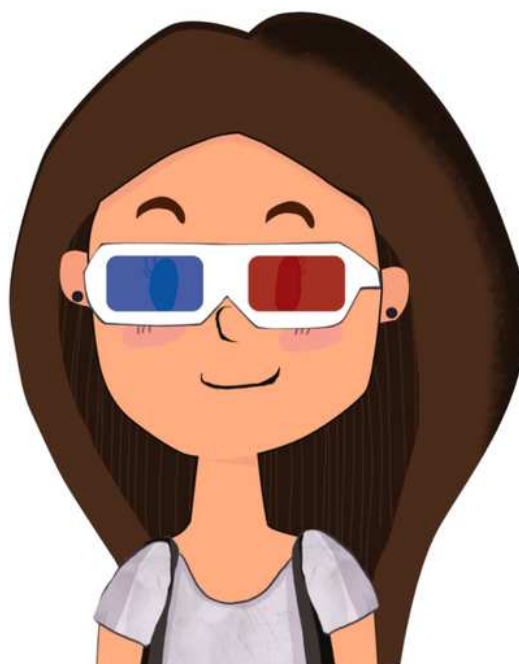
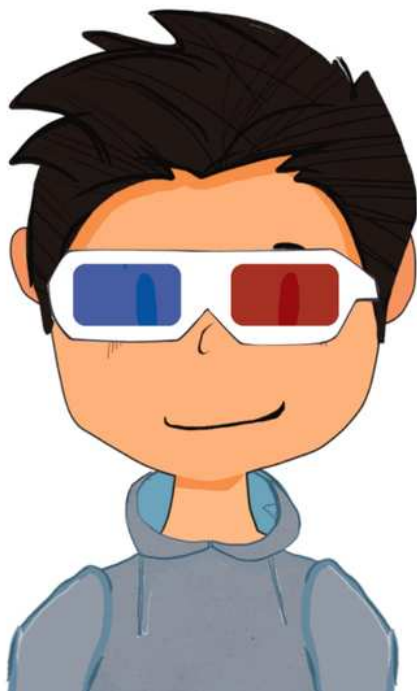


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje drewniane klocki. Kreślone są krawędzie jednego klocka – powstaje graniastosłup o podstawie trójkąta, który rozkłada się na siatkę graniastosłupa.

Siatka graniastosłupa

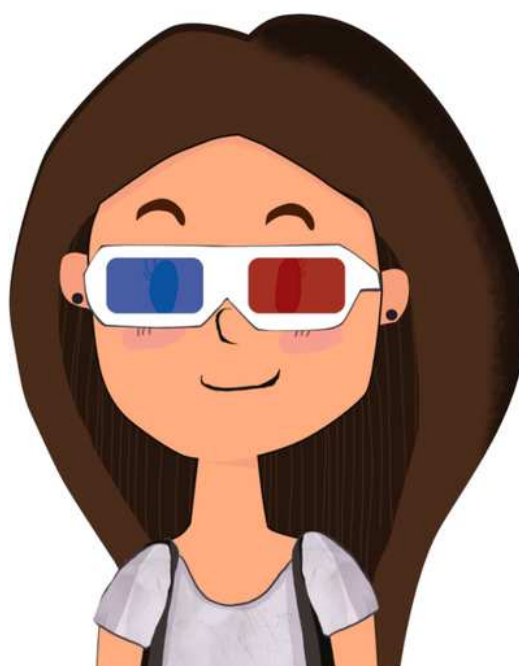
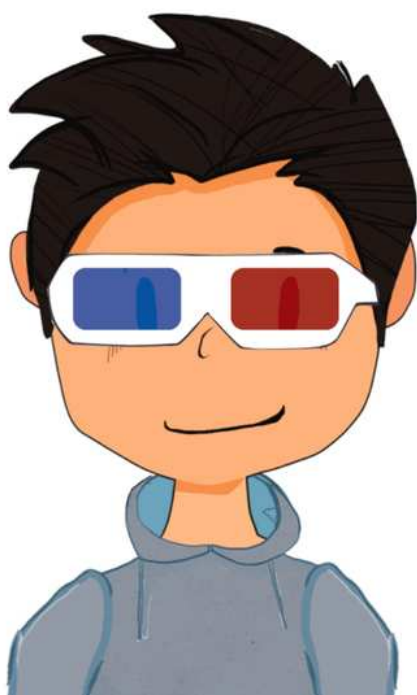


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje siatkę graniastosłupa o podstawie pięciokąta, która składa się w graniastosłup.

Siatka graniastosłupa



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje graniastosłup o podstawie pięciokąta foremnego, który rozkłada się w siatkę graniastosłupa.

Siatka graniastosłupa

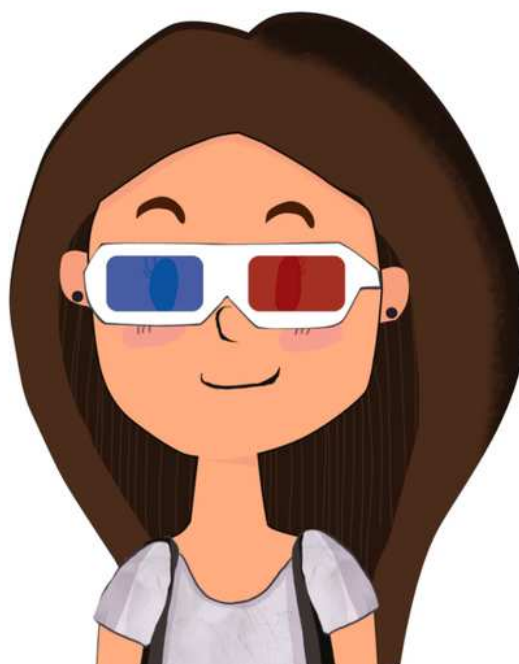
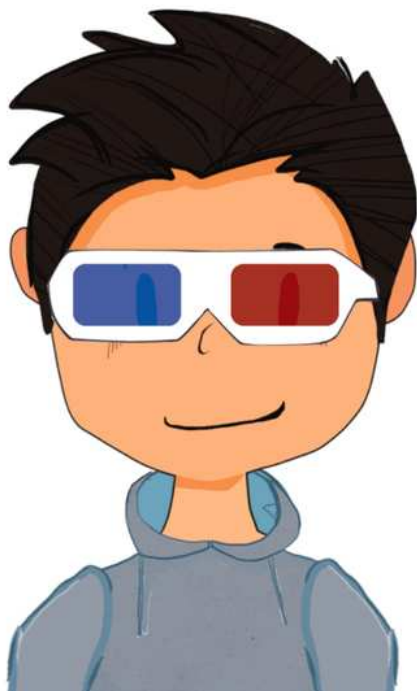


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje graniastosłup o podstawie sześciokąta, który rozkłada się na siatkę graniastosłupa.

Siatka graniastosłupa

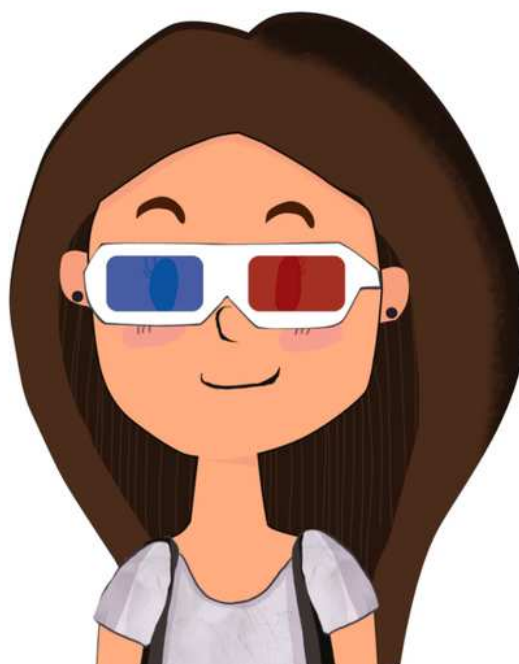
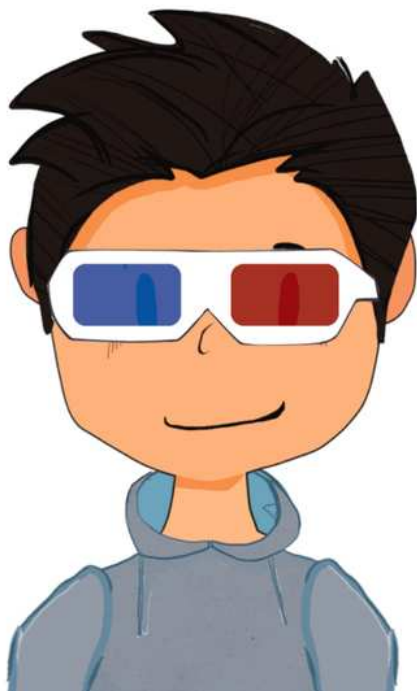


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje siatkę graniastosłupa o podstawie sześciokąta, która składa się w graniastosłup.

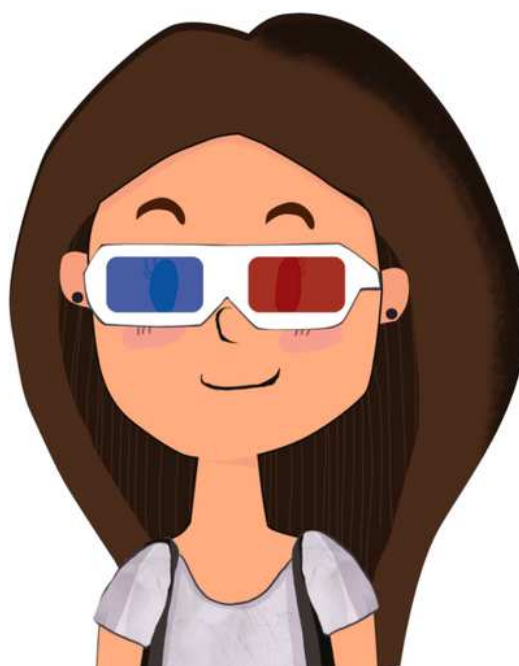
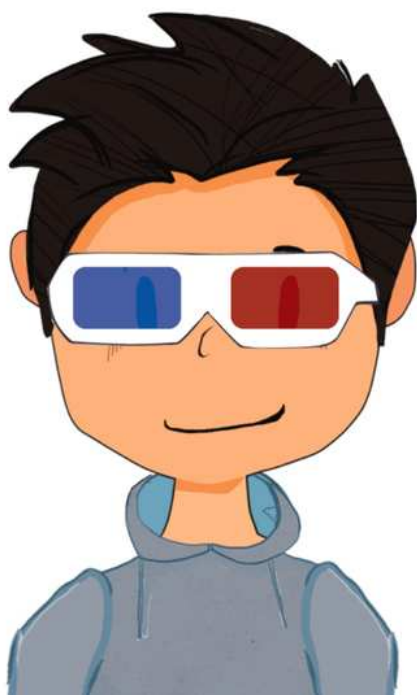
Siatka graniastosłupa



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje nakrętki na śruby. Kreślone są krawędzie jednej nakrętki – powstaje graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego. Dwa jednakowe graniastosłupy rozkładają się na dwie różne siatki graniastosłupa.

Siatka graniastosłupa



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki graniastosłupa, które składają się w jednakowe graniastosłupy. Graniastosłup zamienia się w nakrętkę leżącą między nakrętkami.

Siatka ostrosłupa



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje drewniane klocki w kształcie brył. Kreślone są krawędzie jednego klocka – powstaje ostrosłup. Następnie dwa jednakowe ostrosłupy rozkładają się na dwie różne siatki ostrosłupa.

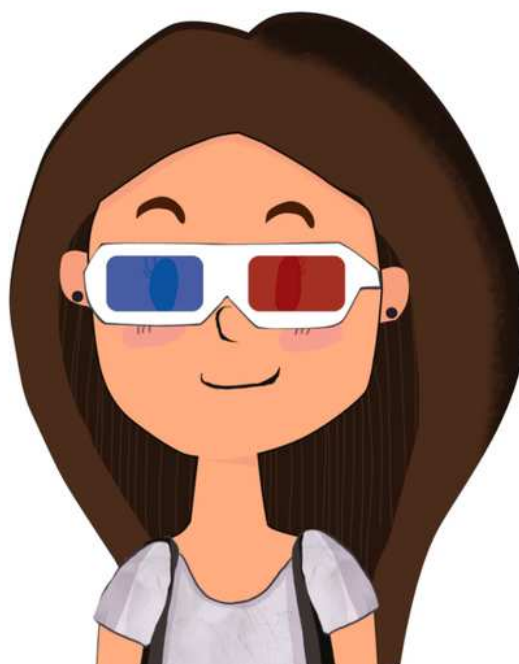
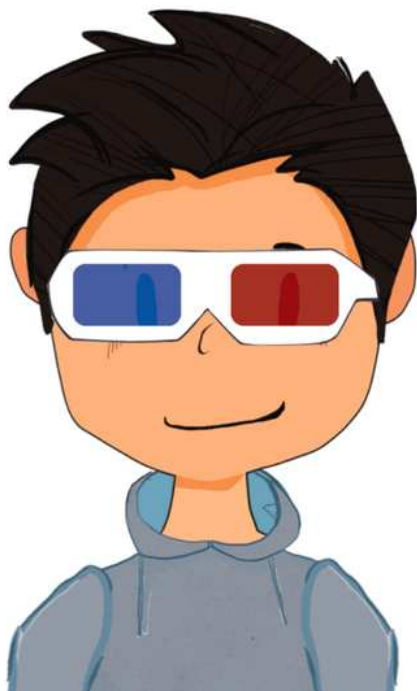
Siatka ostrosłupa



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, które składają się w jednakowe ostrosłupy. Ostrosłup zamienia się w drewniany klocek leżący między innymi klockami.

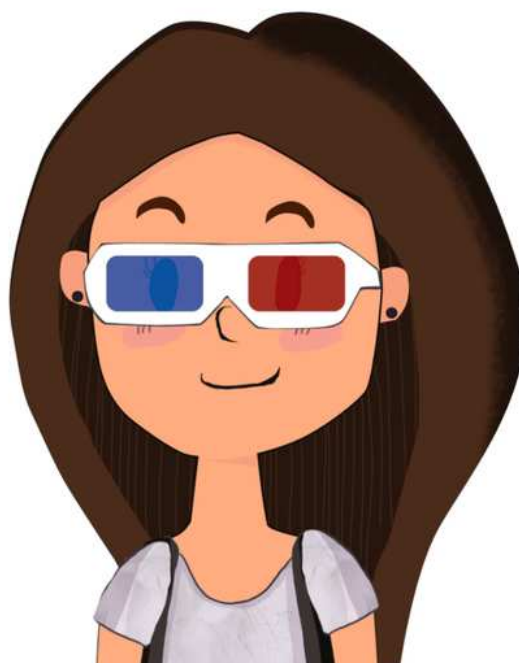
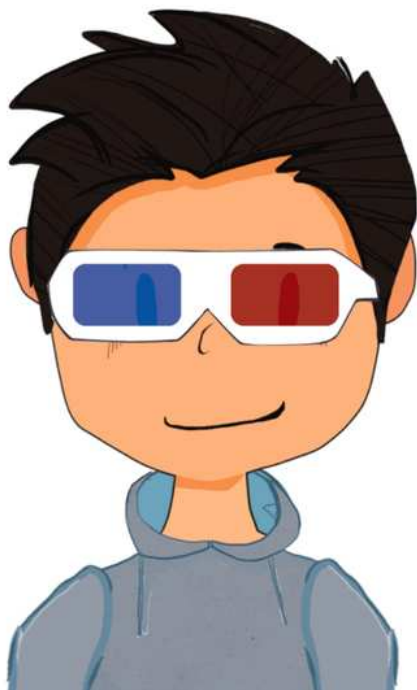
Siatka walca



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje stojące na stole kubki w kształcie walca. Kreślone są krawędzie jednego kubka – powstaje walec, który następnie rozkłada się na siatkę walca.

Siatka walca



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje siatkę walca, która składa się w walec. Następnie walec zamienia się w kubek. Na stole stoją kubki w kształcie walca.

Animacja do sprawdzenia

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje budynek. Kreślone są krawędzie budynku – powstaje prostopadłościan. Następnie przekroje skośne dzielą prostopadłościan na dwie bryły.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje prostopadłościan i ostrosłup trójkątny, które obracają się.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje budynek. Kreślone są krawędzie budynku – powstaje sześcián. Następnie przekroje skośne i poprzeczne dzielą sześcián na dwie bryły.

Walec



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje baterię elektryczną. Kreślone są krawędzie – powstaje walec. Następnie przekroje skośne i poprzeczne dzielą walec na dwie bryły.

Walec



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje klocek, który zamienia się w walec. Widoczne są różne przekroje walca.

Stożek

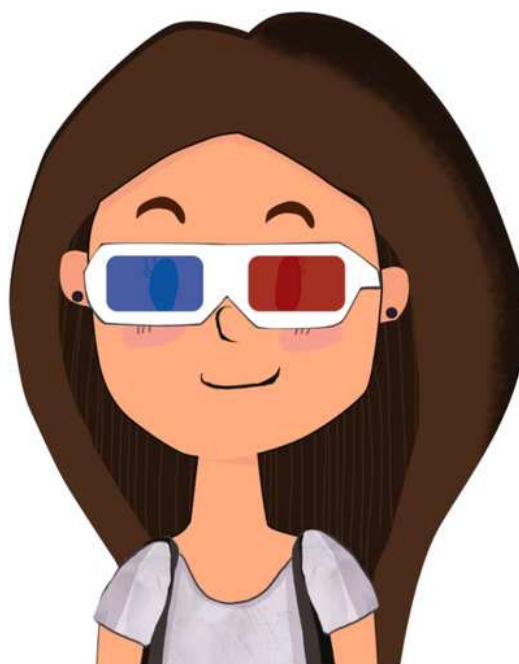
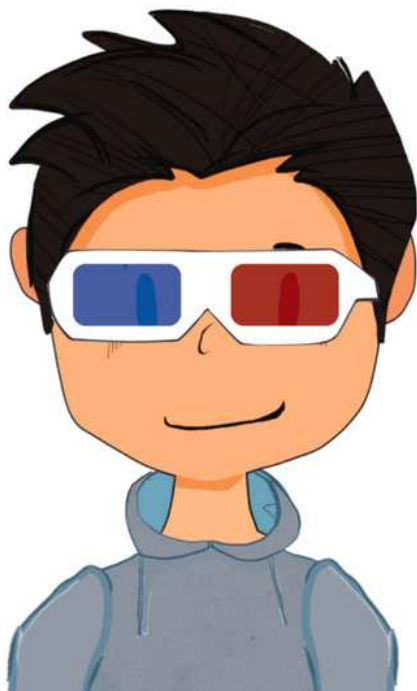


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

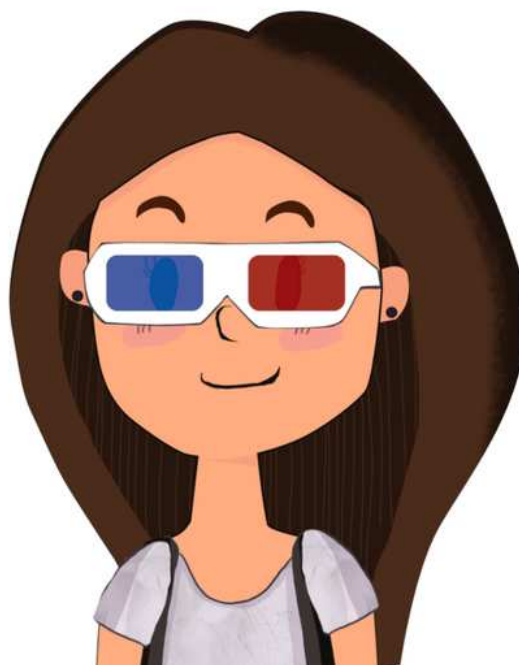
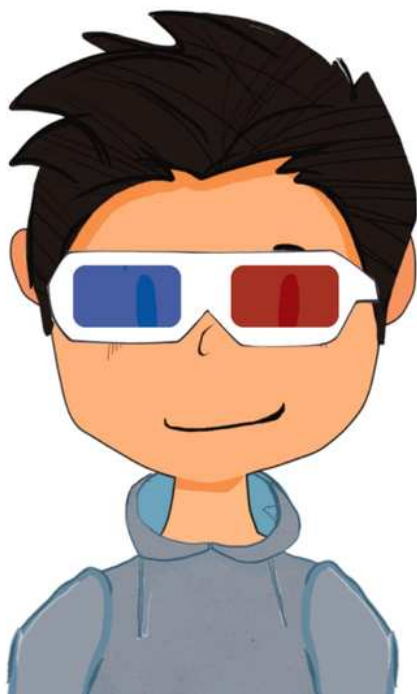
Animacja 3D pokazuje czajnik, który zamienia się w stożek. Następnie przekroje poprzeczne i skośne dzielą stożek na dwie bryły.

Siatka sześcianu



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje leżące na stole kostki do gry. Kreślone są krawędzie jednej kostki – powstaje sześcián. Dwa jednakowe sześciány rozkładają się na dwie różne siatki sześciánu.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje krążące jednakowe sześciány, które łączą się w prostopadłościan złożony z dwudziestu czterech sześciánów.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje krążące jednakowe sześciiany, które łączą się w duże sześciiany – jeden złożony z ośmiu sześcianów oraz drugi złożony z dwudziestu siedmiu sześcianów.

Średnia, mediana, dominanta

Próbując poznać fragment otaczającego nas świata możemy zastosować metody ilościowe albo jakościowe.

Przeprowadzając badania ilościowe, mamy do czynienia ze zbiorami danych. Jeżeli tych danych jest kilka, to możemy stwierdzić, która jest największa, która najmniejsza, która występuje najczęściej itp. Jednak, żeby wyciągnąć wniosek o jakimś zjawisku, potrzebujemy tych danych dużo więcej. Im więcej danych zbierzemy, tym trafniejsze będzie nasze wnioskowanie. Oczywiście najlepiej byłoby mieć wszystkie informacje, co zwykle jest niemożliwe lub bardzo kosztowne. Dlatego najczęściej bierzemy pod uwagę jedynie niektóre dane z tzw. próby. Na przykład producent spodni męskich przeznaczonych na rynek polski powinien dysponować informacją o zapotrzebowaniu na poszczególne rozmiary spodni. Dobrze przeprowadzone badania ilościowe pozwolą z dużą trafnością odpowiedzieć na to pytanie.

Przykład 1

Zapytaliśmy uczniów pewnej szkoły, ile godzin przeznaczają tygodniowo na naukę. Każdą otrzymaną odpowiedź zanotowaliśmy, zapisując też informację o płci ucznia i o klasie. Otrzymane dane zestawiliśmy w tabeli.

Tabela. Dane

Nr badanego ucznia	Płeć	Klasa	Liczba godzin tygodniowo przeznaczonych na naukę
1.	k	Ia	9
2.	m	IIb	13
3.	m	Ic	10
...	...	...	...

Nasza tabela składa się z 384 wierszy. Bezpośrednia obserwacja takiej tabeli niewiele daje. Danych jest zbyt wiele, żeby je przyswoić i wyciągnąć z nich wnioski. Dane te wymagają pewnego zorganizowania w zależności od tego, co chcemy z nich wywnioskować. Gdy chcemy odpowiedzieć na pytanie, czy dziewczęta poświęcają tygodniowo na naukę więcej czasu niż chłopcy, to musimy pogrupować nasze dane ze względu na płeć. Gdy interesuje nas, której klasy uczniowie poświęcają najwięcej czasu na naukę, pogrupujemy je ze względu na klasę.

Oczywiście samo pogrupowanie danych jeszcze nie rozwiązuje problemu. Aby porównać interesującą nas wielkość, w każdej z wyodrębnionych grup, obliczamy pewną liczbę, reprezentującą tę wielkość. Tego typu liczby nazywamy **parametrami danych**

statystycznych, czy też statystykami.

Zacznijmy od takich parametrów, które w pewien sposób wyznaczają „środek” danej próby, czyli są tzw. miarami tendencji centralnej. Należą do nich różnego rodzaju średnie, mediana i dominanta.

Definicja: Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Przykład 2

W celu ustalenia średniej ceny sprzedaży pewnej książki zbadano jej cenę w ośmiu księgarniach. Ceny te były równe:

34,00 zł; 36,90 zł; 29,99 zł; 30,00 zł; 32,35 zł; 36,00 zł; 38,90 zł; 31,00 zł. Średnia cena tej książki jest więc równa:

$$\bar{x} = \frac{34 + 36,90 + 29,99 + 30 + 32,35 + 36 + 38,90 + 31}{8} = \frac{269,14}{8} = 33,64 \text{ (zł)}$$

Średniej często używa się, żeby stworzyć jakiś wzorzec. Jeżeli obliczę, na podstawie rachunków z ostatniego roku, że średnia miesięczna opłata w moim mieszkaniu za energię elektryczną wynosi 102 zł, to mogę przewidywać, że w kolejnych miesiącach też zapłacę około 100 zł miesięcznie, przy założeniu, że warunki nie zmienią się (nie kupię nowego sprzętu elektrycznego, nie zmieni się cena prądu itp). Średnia jest wielkością, z którą wygodnie jest porównywać konkretne dane. Jeżeli z badań przeprowadzonych na grupie 100 tys. licealistów wynika, że średnio poświęcają na naukę 63 minuty dziennie, to możesz oszacować, czy uczysz się więcej, czy mniej niż przeciętny licealista.

Przykład 3

Średnia cena pięciu filmów zakupionych przez pana Kowalskiego jest równa 24 zł. Po dokupieniu szóstego filmu, średnia cena wzrosła do 26 zł. Ile kosztował szósty z filmów? Za pięć filmów zapłacono $24 \cdot 5 \text{ zł} = 120 \text{ zł}$. Oznaczmy cenę szóstego filmu przez x . Wtedy średnia cena zakupu filmu jest równa $\frac{120+x}{6}$ zł. Cenę tę mamy podaną, jest ona równa 26 zł. Pozostaje rozwiązać równanie

$$\frac{120+x}{6} = 26.$$

Stąd $120 + x = 156$, czyli $x = 36 \text{ zł}$.

Zauważ, że jeżeli średnia arytmetyczna pewnych liczb jest równa $\bar{x}$ i dodasz do nich liczbę $a > \bar{x}$, to po dodaniu średnia nowego zestawu liczb zwiększy się. Jeżeli dodasz liczbę $a < \bar{x}$, to średnia nowego zestawu liczb zmniejszy się. Jeżeli dodamy $a = \bar{x}$, to średnia nie ulegnie zmianie.

Przykład 4

W pewnej szkole są trzy klasy trzecie. Średni wynik próbnej matury uczniów klasy IIIa, liczącej 30 osób, jest równy 20 punktów, średni wynik klasy IIIb, liczącej 20 uczniów, jest równy 40 punktów, a średni wynik klasy IIIc, liczącej 25 uczniów, to 30 punktów. Ile jest równy średni wynik próbnej matury w całej szkole?

Zacniemy od zsumowania liczby punktów uzyskanych z tej matury przez wszystkich uczniów w szkole. Klasa IIIa: $30 \bullet 20 = 600$ punktów.

- Klasa IIIb: $20 \bullet 40 = 800$ punktów.
- Klasa IIIc: $25 \bullet 30 = 750$ punktów.

W sumie w całej szkole uczniowie zdobyli 2150 punktów. Ponieważ uczniów w klasach trzecich tej szkoły jest $30 + 20 + 25 = 75$, więc szukana średnia jest równa $\frac{2150}{75} \approx 28,67$. Zauważ, że średnia ta nie jest średnią arytmetyczną podanych średnich w poszczególnych klasach, czyli nie jest ona równa:

$$\frac{20+40+30}{3} = 30.$$

Tak jest, gdyż liczby osób w klasach są różne. Średni wynik klasy III a w większym stopniu wpływa na obliczony średni wynik szkoły niż wynik każdej z pozostałych dwóch klas, ponieważ klasa IIIa jest najliczniejsza. Spośród wszystkich 75 uczniów klas trzecich tej szkoły 30 to uczniowie klasy IIIa, więc możemy przyjąć, że mamy 30 uczniów, z których każdy ma wynik 20 punktów. Analogicznie możemy przyjąć, że mamy 20 uczniów z wynikiem średnim 40 punktów i 25 uczniów z wynikiem 30 punktów. Średni wynik jest więc równy:

$$\bar{x}_w = \frac{\overset{30 \text{ składników}}{20+20+\dots+20} + \overset{20 \text{ składników}}{40+40+\dots+40} + \overset{25 \text{ składników}}{30+30+\dots+30}}{30+20+25} = \frac{20 \bullet 30 + 40 \bullet 20 + 30 \bullet 25}{30+20+25} = \frac{2150}{75} \approx 28,67.$$

Liczebności, z jakimi występowały wyniki 20, 40 i 30, a więc liczby 30, 20 i 25, są wagami tych wyników, a obliczona średnia to średnia ważona.

Definicja: Średnia ważona

Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$, którym przyporządkowane są odpowiednio dodatnie wagi $w_1, w_2, \dots, w_n$, nazywamy liczbę $\bar{x}_w = \frac{x_1 \bullet w_1 + x_2 \bullet w_2 + \dots + x_n \bullet w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$.

Ważne!

Uwaga

Niekiedy wygodniej jest zapisać wzór w postaci:

$$\bar{x}_w = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \bullet x_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \bullet x_2 + \dots + \frac{w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \bullet x_n$$

Wtedy przyjmujemy, że wagami, z jakimi występują liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$, są ułamki:

$$u_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}, u_2 = \frac{w_2}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}, \dots u_n = \frac{w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

Ułamki te są dodatnie i ich suma jest równa 1. Zatem

$$\bar{x}_w = u_1 \bullet x_1 + u_2 \bullet x_2 + \dots + u_n \bullet x_n,$$

gdzie $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1$.

Jeżeli liczymy średnie z dwóch równolicznych grup danych, to średnia ze wszystkich liczb jest średnią arytmetyczną średniej policzonej w pierwszej grupie i średniej policzonej w drugiej grupie. Jeżeli jednak grupy nie są równoliczne, to średnia wszystkich liczb najczęściej nie jest średnią z policzonych wcześniej średnich w każdej grupie.

Przykład 5

Aby zaliczyć przedmiot „Matematyka” na pewnym kierunku studiów, student musi uzyskać 3 oceny: z ćwiczeń, laboratorium i egzaminu, przy czym każda z ocen musi być pozytywna (co najmniej równa 3). Wówczas ocena z przedmiotu „Matematyka” jest średnią ważoną tych trzech ocen: ocena z ćwiczeń ma wagę 3, z laboratorium – wagę 1, a ocena z egzaminu – wagę 4. W tabeli zestawiono oceny częściowe Tomka i Michała. Jaką ocenę otrzyma każdy z nich na zaliczenie?

Tabela. Dane

	ćwiczenia	laboratorium	egzamin
Tomek	3	5	3,5
Michał	3,5	3	5

Średnia ważona ocen Tomka jest równa $\bar{x}_w = \frac{3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 3,5 \cdot 4}{3 + 1 + 4} = \frac{28}{8} = 3,5$.

Średnia ważona ocen Michała jest równa $\bar{x}_w = \frac{3,5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4}{3 + 1 + 4} = \frac{33,5}{8} = 4,19$.

Zwróć uwagę, że mimo iż obaj chłopcy częściowe oceny mieli takie same, czyli 3, 3,5 oraz 5 na koniec dostaną inną ocenę. Tak jest dlatego, gdyż Tomek ma najwyższą ocenę z laboratorium, czyli tę o najniższej wadze, za to Michał najwyższą ocenę ma z egzaminu, czyli tę o najwyższej wadze.

Średnia arytmetyczna ma pewne wady. Bardzo duży wpływ na nią mają wartości skrajne, czyli te największe i najmniejsze, zwłaszcza jeżeli są wyraźnie większe albo mniejsze od pozostałych. W takich przypadkach średnia nie oddaje prawdziwego poziomu interesującej nas wielkości.

Przykład 6

Chcemy rozpocząć pracę w pewnej firmie. Dowiadujemy się, że średnia pensja w tej firmie to 1380 zł. Czy należy się spodziewać, że będziemy zarabiać około 1300 – 1400 zł? Otóż niekoniecznie. Gdyby w tej firmie pracowało 9 osób, z których 8 to szeregowi pracownicy o zarobkach odpowiednio:

720 zł, 800 zł, 850 zł, 850 zł, 900 zł, 900 zł, 950 zł i 950 zł oraz 1 prezes, którego zarobki to 5500 zł, to średnia pensja w tej firmie jest równa 1380 zł. Należy przypuszczać,

że nowo zatrudniony pracownik w takiej firmie nie będzie zarabiał więcej niż najwięcej zarabiający aktualnie pracownik szeregowy, a więc 950 zł.

W takich przypadkach, gdy wyniki skrajne znacznie odbiegają od pozostałych i w efekcie zaburzają średnią, lepiej posłużyć się inną miarą tendencji centralnej. Możemy np. obliczyć medianę.

Definicja: Mediana

Medianą (wartością środkową) uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n liczb $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$ jest:

- dla nieparzystej liczby n środkowy wyraz ciągu, czyli wyraz $x_{\frac{n+1}{2}}$,
- dla parzystej liczby n średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu, czyli $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$.

Przykład 7

Policzmy medianę zarobków w firmie z przykładu 6. Pensje już są ustawione w ciąg niemalejący

$$720 \leq 800 \leq 850 \leq 850 \leq 900 \leq 900 \leq 950 \leq 950 \leq 5500.$$

Medianę liczymy z 9 liczb, czyli środkową jest stojąca na pozycji piątej. Mediana jest więc równa 900. Wielkość ta dużo lepiej, niż średnia arytmetyczna oddaje realia zarobków szeregowych pracowników w rozważanej firmie.

Przykład 8

Średnia arytmetyczna zestawu danych: 4, 5, 8, 3, 3, 11, 12, x jest równa 7. Oblicz medianę tego zestawu danych.

Suma danych liczb jest równa: $4 + 5 + 8 + 3 + 3 + 11 + 12 + x = 46 + x$. Ponieważ średnia arytmetyczna tych danych jest równa 7, otrzymujemy równanie $\frac{46+x}{8} = 7$, stąd $46 + x = 56$. Mamy więc $x = 10$. Ustawiamy dane liczby w niemalejący ciąg

$$3 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 8 \leq 10 \leq 11 \leq 12$$

Liczba wyrazów ciągu jest równa 8, a więc jest parzysta. Stąd mediana jest równa średniej arytmetycznej wyrazów stojących na dwóch środkowych pozycjach. W tym przypadku na czwartej i piątej. Jest więc równa $\frac{5+8}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$.

- Innym sposobem na zmniejszenie wrażliwości średniej na wyniki skrajne jest odrzucenie pewnej liczby największych i najmniejszych danych i policzenie średniej z pozostałych danych. Taka średnia nosi nazwę **średniej ucinanej (obciętej)**. Spotykamy ją w liczeniu noty końcowej przyznawanej przez sędziów w wielu

dyscyplinach sportowych, np. w skokach narciarskich, jeździe figurowej na lodzie, czy gimnastyce artystycznej.

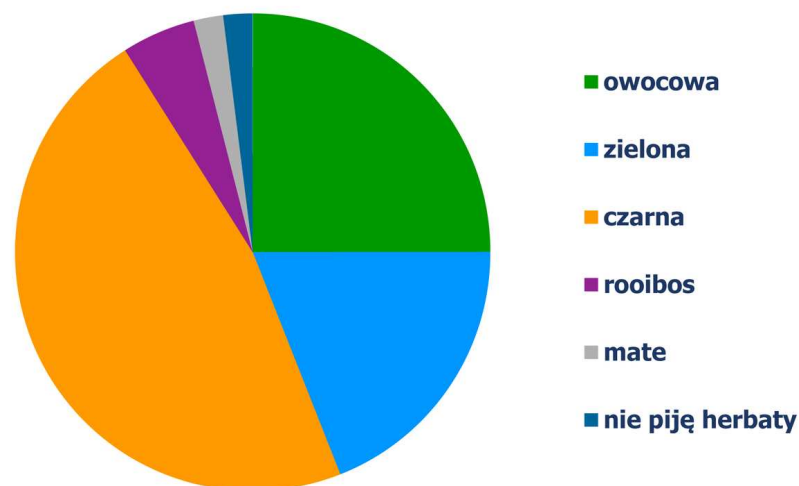
- Sposobem na znalezienie „środka” danej próby jest podanie tzw. dominanty. Przydaje się ona szczególnie w tych przypadkach, gdy opisywane wielkości nie mają wartości liczbowej, czyli nie można policzyć dla nich średniej czy mediany.

Definicja: Dominanta

Dominantą (modą, wartością najczęstszą) nazywamy tę wartość, która występuje w próbie najczęściej.

Przykład 9

W sondzie ulicznej stu losowo wybranym osobom zadano pytanie: jaką herbatę piją najczęściej? Wyniki badania przedstawiono na diagramie.

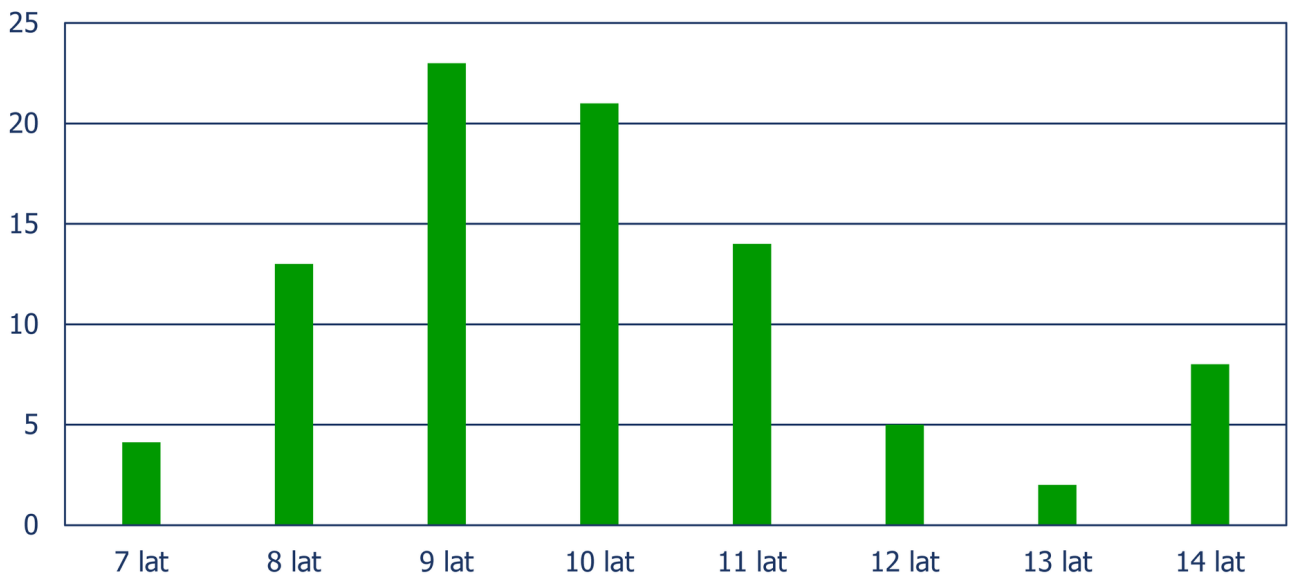


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dominantą tego badania jest herbata czarna.

Przykład 10

W pewnym domu kultury prowadzone są zajęcia plastyczne, w których bierze udział 90 dzieci. Porównaj ze sobą średnią wieku, medianę i dominantę uczestników tych zajęć.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Średnia wieku uczestników jest równa:

$$\bar{x}_w = \frac{7 \cdot 4 + 8 \cdot 13 + 9 \cdot 23 + 10 \cdot 21 + 11 \cdot 14 + 12 \cdot 5 + 13 \cdot 2 + 14 \cdot 8}{90} = \frac{901}{90} = 10,0(1)$$

Dominantą jest wiek 9 lat. Medianą będzie średnia arytmetyczna wieku stojącego na 45 i 46 pozycji w niemalejącym ciągu wieku uczestników. Zauważmy, że jeżeli zsumujemy liczby siedmio-, ośmio- i dziewięciolatków, otrzymamy 40 osób, czyli od pozycji 41 do pozycji 61 będzie stała wartość 10 lat, więc mediana jest równa 10.

Średnie, mediana, dominanta, czyli statystyki wyznaczające środek zestawu danych. Zadania

Ćwiczenie 1

Średnia arytmetyczna liczb: x , 12, 10, 5, 8, 8 jest równa 8. Wtedy mediana jest równa

☐ 8

☐ 11

☐ 6

☐ 9

Ćwiczenie 2

Mediana zestawu danych: 4, 12, 14, a , 5, 7 jest równa 9. Wówczas

☐ $a = 8$

☐ $a = 9$

☐ $a = 11$

☐ $a = 6$

Ćwiczenie 3

Rzucono kością sześć razy i otrzymano wyniki: 2, 3, 6, 1, 3, 2. Wtedy

☐ nie istnieje mediana tego zestawu danych

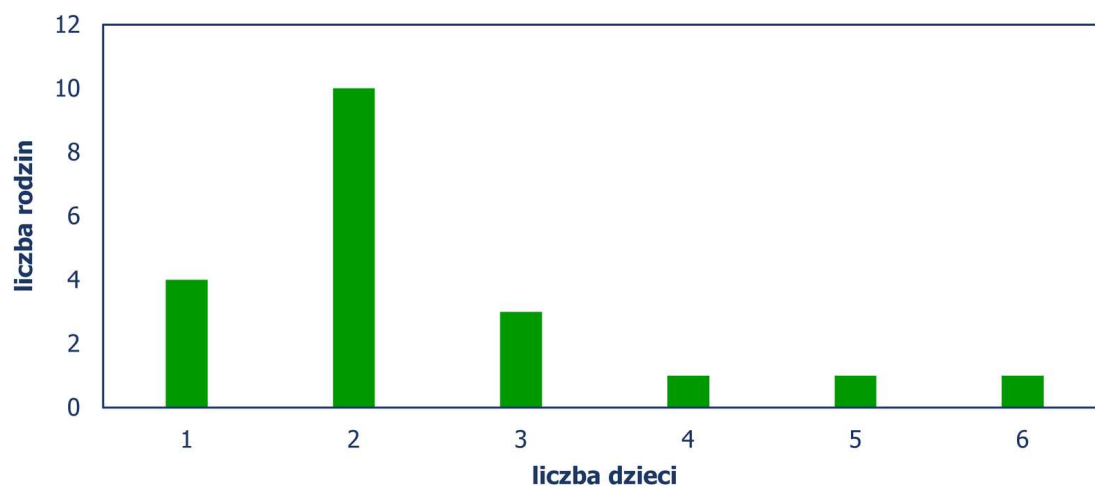
☐ średnia arytmetyczna jest większa niż mediana

☐ mediana i średnia arytmetyczna są sobie równe

☐ mediana jest większa niż średnia arytmetyczna

Ćwiczenie 4

W pewnej grupie rodzin zbadano liczbę dzieci i dane przedstawiono na wykresie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Mediana przedstawionych na wykresie danych jest równa

☐ 10

☐ 2

☐ 2,4

☐ 2,5

Ćwiczenie 5

Mediana liczb: 4, 6, 10, x , 8, 5, 9 wynosi 6. Wtedy liczba x spełnia warunek

☐ $x \in (6,8)$

☐ $x > 6$

☐ $x = 7$

☐ $x \leq 6$

Ćwiczenie 6

Średnia ważona liczb: x , 5, 8 z wagami odpowiednio: 5, 3, 2 jest równa 8,1. Wtedy liczba x jest równa

☐ 10

☐ 14

☐ 8

☐ 12

Ćwiczenie 7

Do zestawu liczb 2, 10, 5, 7 dopisujemy kolejną.

Przeciągnij liczby z dolnej sekcji do górnej.

liczby, które zwiększą średnią arytmetyczną zestawu

191064,57

5,756,5

liczby, które zmniejszą średnią arytmetyczną zestawu

liczby, które nie zmieniają średniej arytmetycznej zestawu

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Połącz w pary zestawy danych z ich średnimi arytmetycznymi.

8	4,6,8,10,12
4	5,6,12,13,14
10	5,5,5,5,5
5	2,3,5,5,5
6	5,5,5,7,8

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

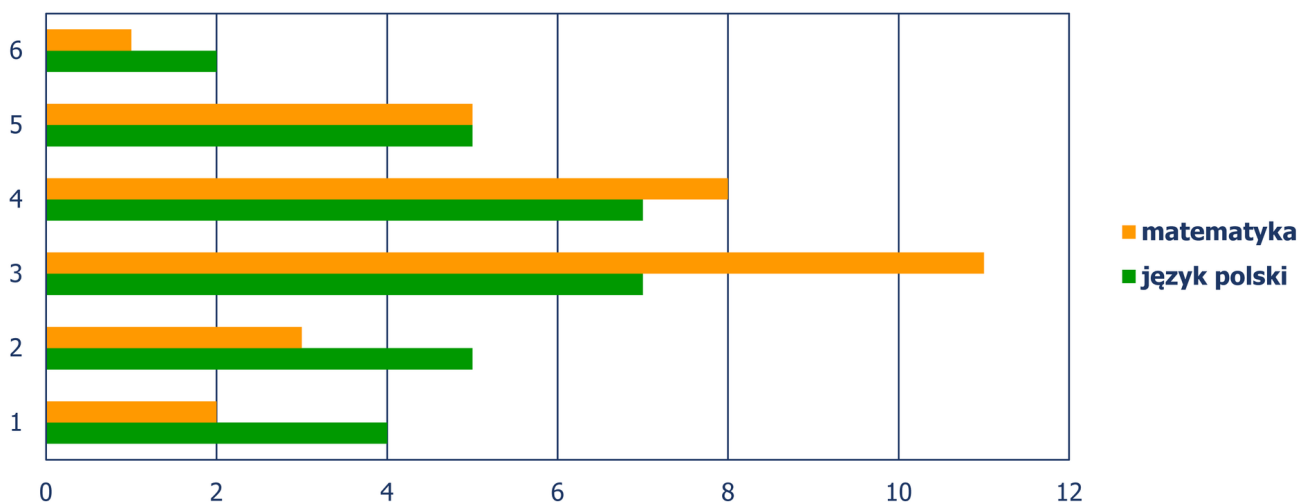
Połącz w pary zestawy danych z ich medianą.

5	1,20, 10,1
6	1,4,10,12
6,5	8,5,1,9
7	5,6, 10,6
5,5	5,5,5,5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

Wyniki sprawdzianu z matematyki i z języka polskiego w klasie III c są przedstawione na diagramie



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

1. Ilu uczniów ze sprawdzianu z matematyki otrzymało ocenę wyższą niż średnia ocen?
2. Ilu uczniów ze sprawdzianu z języka polskiego otrzymało ocenę niższą niż mediana ocen?

Ćwiczenie 11

W tabeli zestawiono oceny z matematyki na koniec roku uczniów pewnej klasy.

Tabela. Dane

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	0	3	12	10	x	1

Oblicz liczbę piątek, jeżeli średnia ocen z matematyki w tej klasie jest równa 3,5.

Ćwiczenie 12

W sklepie przygotowano mieszankę trzech rodzajów cukierków składającą się z 14 kg cukierków w cenie 12 zł za kg, 9 kg cukierków w cenie 14 zł za kg oraz 7 kg cukierków w cenie 18 zł za kg. Ile powinien kosztować 1 kg mieszanki?

Ćwiczenie 13

Średni staż pracy 10 robotników w pewnym zakładzie jest równy 7 lat. Jeżeli dodać do badanych brygadystę, to średni wiek pracy zwiększy się do 9 lat. Ile lat pracuje w tym zakładzie brygadzysta?

Ćwiczenie 14

Średnia wieku uczestników wycieczki wynosiła 14 lat. Jeżeli doliczymy do tej średniej wiek opiekuna, który ma 40 lat, to średnia zwiększy się do 15 lat. Ilu było uczestników wycieczki?

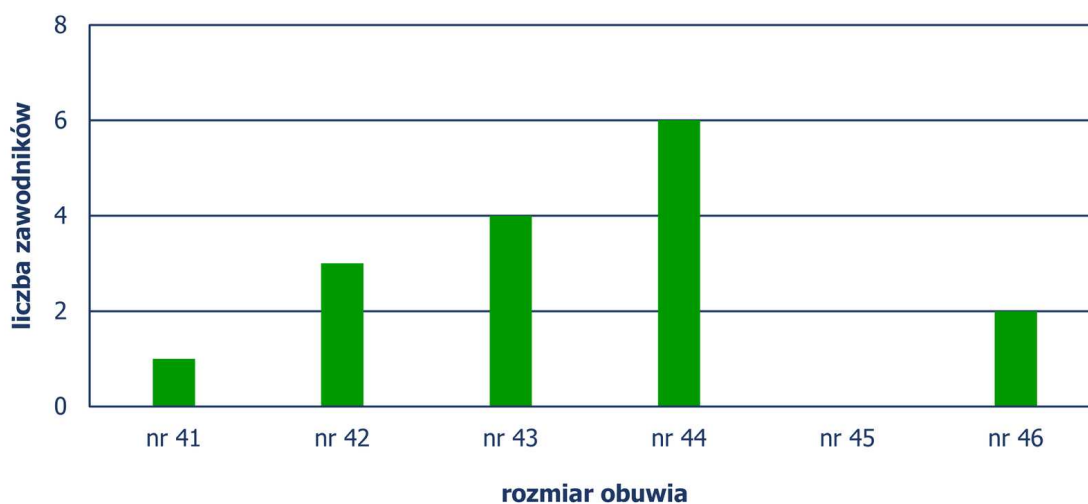
Ćwiczenie 15

W pewnej firmie średnia pensja jest równa 2000 zł. O ile procent zwiększy się średnia pensja, jeżeli każdy z pracowników dostanie podwyżkę?

1. o 500 zł
2. o 10 %

Ćwiczenie 16

W celu zakupu obuwia dla zawodników drużyny piłkarskiej sprawdzono rozmiary obuwia poszczególnych zawodników i dane umieszczono na diagramie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz medianę, modę i średnią arytmetyczną rozmiaru.

Ćwiczenie 17

W pewnej szkole dwie klasy trzecie napisały próbną maturę z matematyki. W klasie IIIa, liczącej 30 uczniów, średni wynik z tej matury wyniósł 60 %, a w klasie III b, liczącej 20 uczniów średni wynik z tej matury wyniósł 80 %. Jaki jest średni wynik z próbnej matury w tej szkole?

Ćwiczenie 18

Poniżej przedstawiono uporządkowane niemalejąco zestawy danych, których mediana jest równa 5. Połącz je w pary z ich średnimi.

5	3, x, 6, 7
4	1, x, 6
4,5	1, 3, x, 7
6	3, x, 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19

Średnia arytmetyczna trzech liczb: a , b , c jest równa 8. Oblicz, ile wynosi średnia arytmetyczna podanych liczb:

1. $3a$, $3b$, $3c$

2. $a + 1$, $b + 2$, $c + 3$

3. a , b , c , 6

Ćwiczenie 20

Trzech uczniów napisało maturę z matematyki, zdobywając średnio 40 punktów na 50 możliwych. Mediana ich wyników jest równa 50 punktów. Ile punktów zdobyli poszczególni uczniowie na maturze z matematyki?

Ćwiczenie 21

Małgosia na koniec roku szkolnego, uzyskała średnią ocen 4,4. Spośród dziesięciu przedmiotów otrzymała tylko jedną 3, a poza tym same 4 i 5. Oblicz, ile 5 na świadectwie miała Małgosia.

Miary rozproszenia

Przykład 1

Właściciel dwóch sklepów z odzieżą, położonych w różnych miejscach miasta, próbuje ustalić, które bluzki sprzedają się najlepiej w każdym z jego sklepów, przy czym bierze pod uwagę jedynie cenę bluzki. Chce w ten sposób ustalić, jaki towar powinien zamówić. Zanotował, że podczas ostatniego dnia w pierwszym sklepie sprzedano kolejno bluzki w cenach (zaokrąglonych do pełnych dziesiątek złotych):

10 zł, 80 zł, 20 zł, 20 zł, 90 zł, 10 zł, 90 zł, 80 zł. W tym samym czasie w drugim sklepie sprzedano kolejno bluzki w cenach (zaokrąglonych do pełnych dziesiątek złotych): 50 zł, 50 zł, 40 zł, 60 zł, 50 zł, 40 zł, 60 zł, 50 zł, 50 zł, 50 zł.

Ceny te, po uporządkowaniu w kolejności niemalejącej, zapisał w następującej tabeli:

Tabela. Dane

1 sklep	10 zł	10 zł	20 zł	20 zł	80 zł	80 zł	90 zł	90 zł		
2 sklep	40 zł	40 zł	50 zł	50 zł	50 zł	50 zł	50 zł	50 zł	60 zł	60 zł

Zauważmy, że średnia cena zakupionej bluzki oraz mediana są takie same w obu sklepach.

W pierwszym sklepie

$$\bar{x} = \frac{10+10+20+20+80+80+90+90}{8} = \frac{400}{8} = 50$$

oraz mediana jest równa

$$\frac{20+80}{2} = 50.$$

W drugim sklepie

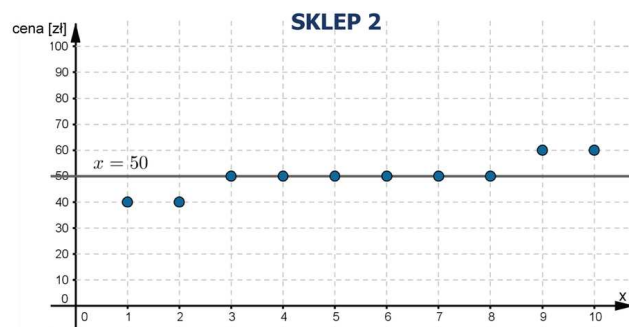
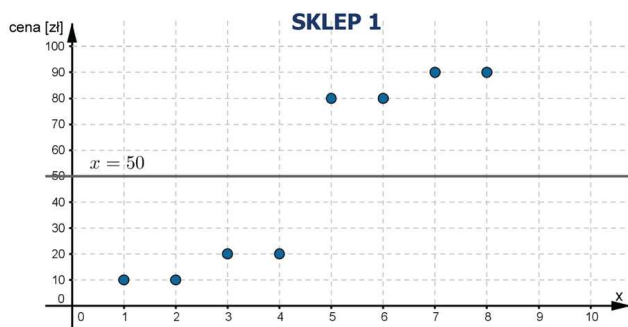
$$\bar{x} = \frac{40+40+50+50+50+50+50+50+60+60}{10} = \frac{500}{10} = 50$$

oraz mediana jest równa

$$\frac{50+50}{2} = 50.$$

Na podstawie tych danych można wysnuć wnioski, że w obu sklepach sprzedaż wygląda podobnie.

Zilustrujmy jednak te dane na wykresach.



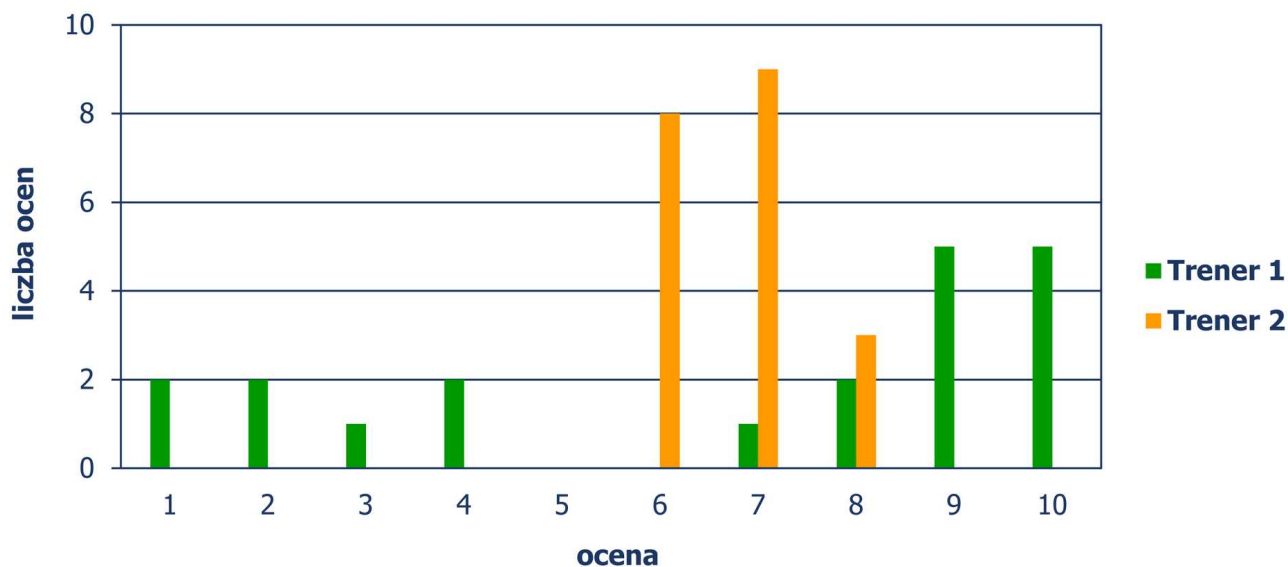
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na pierwszym wykresie dane znajdują się w sporej odległości od średniej $x = 50$, na drugim skupiają się wokół niej. W pierwszym zestawie danych są kwoty bardzo małe i bardzo duże w stosunku do średniej. Może to oznaczać, że do sklepu przychodzą zarówno zamożni klienci, jak i wydający na ubrania minimum pieniędzy. W drugim sklepie większość danych jest bliska średniej i medianie. Może to oznaczać, że klienci drugiego sklepu to ludzie średnio zamożni, którzy wybierają towar przeciętny, nie za drogi i nie za tani.

Właściciel sklepów przeprowadził podobne badanie przez kilka kolejnych dni i wnioski powtarzały się. Zdecydował się więc do pierwszego sklepu zamówić bluzki bardzo tanie i droższe, zaś do drugiego takie, których cena jest bliska 50 zł.

Przykład 2

Pewna firma zajmuje się prowadzeniem szkoleń. Po każdym ze szkoleń uczestnicy oceniają trenera prowadzącego szkolenie. Ocena ta jest liczbą całkowitą od 1 (najniższa ocena) do 10. Jedno ze szkoleń, w którym wzięło udział 20 uczestników, prowadzone było przez dwóch trenerów. Na poniższym wykresie przedstawiono otrzymane przez nich oceny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczmy średnią ocenę, jaką otrzymał każdy z trenerów.

$$\text{Trener 1: } \bar{x}_1 = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 5}{20} = \frac{135}{20} = 6,75.$$

Trener 2: $\bar{x}_2 = \frac{6 \cdot 8 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 3}{20} = \frac{135}{20} = 6,75$.

Średnie oceny są takie same. Wykres natomiast wskazuje na inne rozkłady poszczególnych ocen jednostkowych. Trener 1 otrzymał oceny prawie z całej skali. Są one rozproszone w stosunku do oceny średniej, a więc część uczestników szkolenia oceniła go bardzo wysoko, a część bardzo nisko. Trener 2 otrzymał jedynie oceny 6, 7 i 8, a więc skupione wokół średniej. Może nie jest idealny (nie otrzymał 10), ale ludziom się na ogół podobał i nie wzbudzał negatywnych odczuć.

Oczywiście, jeżeli zestaw danych jest większy to trudniej zaobserwować jego strukturę. Podobnie jak w przypadku tendencji centralnej, tak i w tym przypadku posłużymy się pewnymi statystykami. Do oceny koncentracji badanych danych służą miary rozproszenia. Najprostszą miarą rozproszenia jest rozstęp, czyli różnica pomiędzy największą i najmniejszą wartością.

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Dużą zaletą tej charakterystyki jest łatwość jej wyznaczania. Jednak nie informuje nas ona, jak w przedziale $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$ o długości R są rozłożone poszczególne dane. Czy np. są skupione wokół jednego punktu, czy rozrzucone w tym przedziale. Rozstęp mówi tylko o tym, jaką długość ma najkrótszy przedział zawierający wszystkie dane.

Przykład 3

Obliczmy rozstęp dla każdej z wielkości występujących w poprzednich dwóch przykładach.

Dla pierwszego sklepu $R = 90 - 10 = 80$, a dla drugiego $R = 60 - 40 = 20$. Zauważymy więc, że różnica w cenie najdroższej i najtańszej bluzki w pierwszym sklepie wynosi 80 zł, zaś w drugim 20 zł, czyli jest cztery razy mniejsza. Zatem w drugim sklepie ceny są bardziej skupione.

W drugim przykładzie dla pierwszego trenera $R = 10 - 1 = 9$, a dla drugiego $R = 8 - 6 = 2$. Tutaj także rozstęp wyników drugiego trenera jest mniejszy niż pierwszego.

Najczęściej jednak potrzebujemy dokładniejszej analizy rozproszenia danych. Zauważmy, że dla tego samego rozstępu dane mogą układać się bardzo różnie. Na przykład rozstęp w zestawie danych: 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 5 jest równy 4 i jest taki sam, jak w zestawie: 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5. Jednak w pierwszym zestawie, poza danymi skrajnymi, występuje wielokrotnie ta sama wartość 3, a w drugim zestawie występują wszystkie wartości całkowite od 1 do 5 i prawie każda tak samo często. Spróbujemy skonstruować taki wskaźnik, który pozwoli nam odróżnić te dwie sytuacje.

Zajmiemy się więc badaniem odległości każdej danej od średniej. Przypomnijmy, że odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej to wartość bezwzględna różnicy tych liczb. Zatem odchylenie liczby x_i od średniej $\bar{x}$, to

$$|x_i - \bar{x}|.$$

Obliczmy odchylenia średnich cen bluzek z przykładu pierwszego w każdym z dwóch sklepów. Wyniki zapiszmy w tabeli.

Tabela. Dane

I sklep		II sklep	
Cena bluzki x_i	Odchylenie od średniej $ x_i - \bar{x} = x_i - 50 $	Cena bluzki x_i	Odchylenie od średniej $ x_i - \bar{x} = x_i - 50 $
10	40	40	10
10	40	40	10
20	30	50	0
20	30	50	0
80	30	50	0
80	30	50	0
90	40	60	10
90	40	60	10

Obliczmy teraz średnią arytmetyczną znalezionych odchyłeń w każdym ze sklepów.

W pierwszym sklepie: $\frac{40+40+30+30+30+30+40+40}{8} = \frac{280}{8} = 35$.

W drugim sklepie: $\frac{10+10+10+10}{8} = \frac{40}{8} = 5$.

Obliczone przez nas wielkości to tak zwane odchylenia przeciętne.

Definicja: Odchylenie przeciętne

Odchyleniem przeciętnym liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę

$$\frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Zatem w pierwszym sklepie odchylenie przeciętne jest wyższe niż w drugim, co potwierdza naszą wcześniejszą obserwację, że w pierwszym sklepie ceny leżą dalej od średniej, a w drugim znajdują się bliżej średniej.

W statystyce częściej od odchylenia przeciętnego wykorzystuje się tzw. odchylenie standardowe.

Definicja: Odchylenie standardowe

Odchyleniem standardowym σ liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \dots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n}}$$

Kwadrat tej wielkości nazywamy wariancją i oznaczamy symbolem σ^2 , czyli

$$\sigma^2 = \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \dots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n}$$

Wariancja i odchylenie standardowe niosą dokładnie te same informacje. Wygodniej używać odchylenia standardowego, ponieważ wariancja jest podawana w jednostkach kwadratowych, a odchylenie standardowe dokładnie w tych samych jednostkach, co analizowane dane.

Obliczanie odchylenia standardowego, czy też wariancji jest uciążliwe w sytuacji, gdy $\bar{x}$ jest liczbą niecałkowitą i ma albo długie rozwinięcie dziesiętne, albo nawet nieskończone. Podamy teraz wzór, który sprawia, że obliczenia są znacznie wygodniejsze.

Twierdzenie: Wariancja liczb

Wariancja liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest równa

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \left(\bar{x}\right)^2$$

Dowód

Przekształcając wzór z definicji wariancji, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \dots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n} = \\ &= \frac{x_1^2 - 2x_1 \cdot \bar{x} + \left(\bar{x}\right)^2 + x_2^2 - 2x_2 \cdot \bar{x} + \left(\bar{x}\right)^2 + \dots + x_n^2 - 2x_n \cdot \bar{x} + \left(\bar{x}\right)^2}{n} = \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2\bar{x} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{n \cdot \left(\bar{x}\right)^2}{n} = \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2 \cdot \left(\bar{x}\right)^2 + \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \left(\bar{x}\right)^2 \end{aligned}$$

Przykład 4

W tabeli przedstawiono kwoty rachunków za telefon, jakie zapłaciła Małgosia w kolejnych miesiącach.

Tabela. Dane

styczeń	luty	marzec	kwiecień	maj	czerwiec
---------	------	--------	----------	-----	----------

63 zł	41 zł	35 zł	67 zł	60 zł	52 zł
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Obliczymy wariancję i odchylenie standardowe tych wydatków z dokładnością do 1 zł.

Średnia wydatków na telefon Małgosi jest równa $\bar{x} = \frac{63+41+35+67+60+52}{6} = \frac{318}{6} = 53(\text{zł})$

W kolejnych miesiącach odchylenie od średniej jest równe:

Tabela. Dane

	styczeń	luty	marzec	kwiecień	maj	czerwiec
x_i	63 zł	41 zł	35 zł	67 zł	60 zł	52 zł
$ x_i - \bar{x} $	10	12	18	14	7	1

Wariancja jest więc równa:

$$\sigma^2 = \frac{10^2+12^2+18^2+14^2+7^2+1^2}{6} = \frac{100+144+324+196+49+1}{6} = \frac{814}{6} = 135, \left(6\right) \approx 136$$

a odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{136} \approx 12.$$

Przykład 5

Wyniki pewnego badania umieszczono w tabeli.

Tabela. Dane

Wynik	4	5	6	7	8
Częstość	5	2	4	6	3

Obliczymy wariancję i odchylenie standardowe w tym badaniu.

Zacniemy od policzenia średniej

$$\bar{x} = \frac{5 \bullet 4 + 2 \bullet 5 + 4 \bullet 6 + 6 \bullet 7 + 3 \bullet 8}{5+2+4+6+3} = \frac{120}{20} = 6.$$

- sposób I

Obliczymy wariancję, korzystając ze wzoru podanego w twierdzeniu. W tym celu obliczymy średnią kwadratów otrzymanych wyników

$$\frac{5 \bullet 4^2 + 2 \bullet 5^2 + 4 \bullet 6^2 + 6 \bullet 7^2 + 3 \bullet 8^2}{5+2+4+6+3} = \frac{760}{20} = 38.$$

Stąd wariancja jest równa $\sigma^2 = 38 - \left(\bar{x}\right)^2 = 38 - 36 = 2$ i odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{2}.$$

- sposób II

Obliczymy wariancję, posługując się definicją. Odchylenia poszczególnych wyników od średniej zamieścimy w tabeli.

Tabela. Dane

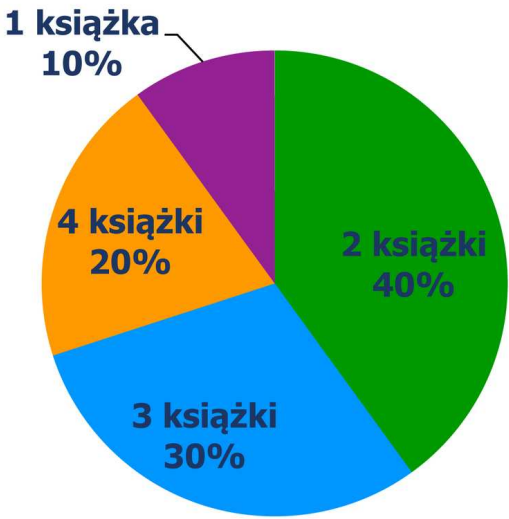
wynik x_i	4	5	6	7	8
odchylenie $\left x_i - \bar{x}\right $	$ 4 - 6 = 2$	$ 5 - 6 = 1$	$ 6 - 6 = 0$	$ 7 - 6 = 1$	$ 8 - 6 = 2$
częstość	5	2	4	6	3

Podstawiając wyniki do wzoru na wariancję, otrzymujemy:

$$\sigma^2 = \frac{5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 0^2 + 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2}{5 + 2 + 4 + 6 + 3} = \frac{40}{20} = 2$$

Przykład 6

W pewnej szkole przeprowadzono ankietę, w której zadano uczniom pytanie „Ile książek przeczytałeś/łaś w ciągu ostatnich dwóch tygodni?”. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczymy wariancję i odchylenie standardowe otrzymanych wyników. Dla otrzymanych wyników możemy przyjąć następujące wagi

Tabela. Dane

1 książka	2 książki	3 książki	4 książki	Suma wag
0,1	0,4	0,3	0,2	1

Średnia ważona otrzymanych wyników jest równa

$$\overline{x}_w = 0,1 \bullet 1 + 0,4 \bullet 2 + 0,3 \bullet 3 + 0,2 \bullet 4 = 0,1 + 0,8 + 0,9 + 0,8 = 2,6.$$

Licząc wariancję, posłużymy się wzorem z twierdzenia

$$\sigma^2 = \frac{0,1 \cdot 1^2 + 0,4 \cdot 2^2 + 0,3 \cdot 3^2 + 0,2 \cdot 4^2}{1} - (2,6)^2 = 0,1 + 1,6 + 2,7 + 3,2 - 6,76 = 0,84.$$

Wtedy odchylenie standardowe jest równe $\sigma \approx 0,92$.

Przykład 7

Michał przeprowadził doświadczenie, w którym mierzył m.in. czas ruchu pewnego ciała. Wykonał doświadczenie 10 razy i otrzymał następujące wyniki w sekundach:

Tabela. Dane

doświadczenie	1	2	3	4	5	6	7	8	9
wynik	10,23	10,45	9,98	9,67	10,05	10,14	9,48	9,92	10,

Wyznacz średni czas ruchu ciała oraz odchylenie standardowe w tym doświadczeniu. Ile wyników jest większych od średniego lub mniejszych od średniego czasu o więcej niż jedno odchylenie standardowe?

Ćwiczenie 1

Odchylenie standardowe zestawu liczb: 5 , 7, 11, 13 jest równe

☐ 9

☐ $\sqrt{10}$

☐ 10

☐ 8

Ćwiczenie 2

Wariancja zestawu liczb: 4, 7, 9, 20 jest równa

☐ 36,5

☐ 10

☐ 146

☐ 12

Ćwiczenie 3

Jeżeli odchylenie standardowe pewnego zestawu danych jest równe $4\sqrt{2}$, to wariancja jest równa

☐ 32

☐ $2^4\sqrt{2}$

☐ $2\sqrt{2}$

☐ 8

Ćwiczenie 4

Największe odchylenie standardowe ma zestaw liczb

☐ 10,12,14, 12

☐ 15,15,15,15

☐ 1,2, 4,6, 7

☐ 1, 2, 9,10,11

Ćwiczenie 5

przedstawiono wyniki, jakie osiągnęło dwóch skoczków narciarskich podczas przygotowań do zawodów.

1. Który z nich ma wyższą średnią długość skoków?
2. Który ze skoczków skacze bardziej stabilnie?

Tabela. Dane

	1 skok	2 skok	3 skok	4 skok	5 skok	6 skok	7 skok	8 skok
1 zawodnik	115	119	116	125	123	122	115	125
2 zawodnik	120	115	116	121	123	124	115	118

Ćwiczenie 6

Połącz w pary te zestawy danych, które mają jednakowe odchylenie standardowe.

5,3,4,6

15,13,11,9

5,2,7,4

15,12,13,14

12,14,16,18

11,13,14,16

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Połącz w pary te zestawy danych, które mają jednakowe odchylenie standardowe.

5,3,4,6

15,12,13,14

5,2,7,4

11,13,14,16

12,14,16,18

15,13,11,9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

Uporządkuj zestawy danych w kolejności wzrastającej wariancji.

6, 6, 5, 7



3, 1, 7, 5



1, 10, 4, 12



9, 4, 1, 6



8, 8, 8, 8



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11

Uporządkuj podane liczby rosnąco.

$\frac{23}{25}$



$\frac{2}{3}$



0,88



$\frac{3}{5}$



0,8



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12

Uporządkuj podane liczby malejąco.

3, 23



32, 3



3, 223



$29\frac{1}{3}$



$\frac{323}{11}$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

W pewnym badaniu statystycznym otrzymano następujące wyniki: 15, 12, 17, 10, 13, 8, 10, 16. Ile z tych wyników różni się od średniej o więcej niż jedno odchylenie standardowe?

Ćwiczenie 14

Tomek każdego dnia rano, jadąc do szkoły, porównywał czas przyjazdu tramwaju z informacją umieszczoną na przystanku. Przez kolejne dni informację notował w zeszycie. Odchylenie dodatnie oznacza, że tramwaj przyjechał później, a odchylenie ujemne, że przyjechał wcześniej. Jakie było odchylenie przeciętne przyjazdu tramwaju?

Tabela. Dane

poniedziałek	wtorek	środa	czwartek	piątek
−3,5 min	2 min	1,5 min	−1 min	2 min

Ćwiczenie 15

Przeciągnij z dolnej sekcji do górnej takie trzy liczby, dla których średnia jest równa 7 i odchylenie standardowe jest większe od 2,3.

4

7

10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16

Magda, przygotowując się do matury, postanowiła sprawdzić, ile godzin dziennie przeznaczą na naukę. W tym celu przez dwa tygodnie codziennie zapisywała wyniki w tabeli, a następnie zaznaczyła je na wykresie. Oblicz średnią liczbę czasu poświęconego na naukę i odchylenie standardowe w pierwszym tygodniu, w drugim oraz w całym okresie dwóch tygodni.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

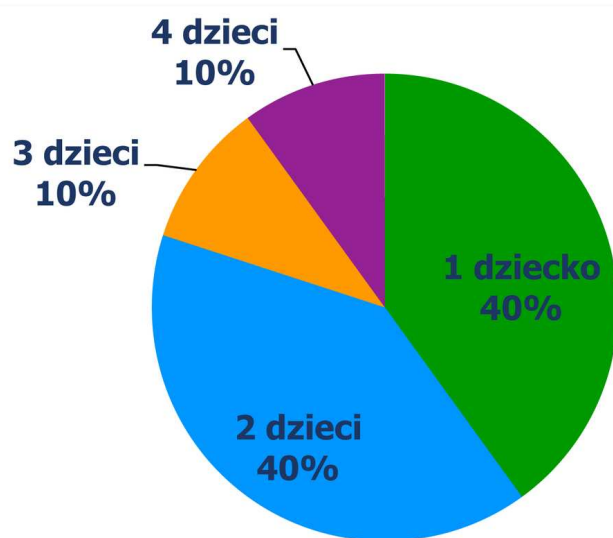
Ćwiczenie 17

Odpowiedz na pytania.

1. Jaka jest wariancja i jakie jest odchylenie standardowe zestawu liczb: 2, 4, 6, 8, 10? Jak zmienia się wariancja i odchylenie standardowe, jeżeli każdą z podanych liczb zwiększymy dwa razy?
2. Średnia arytmetyczna zestawu pięciu liczb: a, b, c, d, e jest równa $\bar{x}$, a odchylenie standardowe σ . Jak zmienia się te dwa wskaźniki, gdy każdą z liczb tego zestawu zwiększymy trzy razy?

Ćwiczenie 18

W pewnej szkole przeprowadzono badanie dotyczące liczby dzieci w rodzinach uczniów. Wyniki przedstawiono na diagramie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe otrzymanych wyników.

Ćwiczenie 19

Na lekcji fizyki przeprowadzono doświadczenie, podczas którego mierzono temperaturę pewnej próbki umieszczonej w określonych warunkach. Wyniki zapisano w tabeli.

Tabela. Dane

nr próbki	1	2	3	4	5	6	7	8	
temperatura	23,12	23,71	22,93	23,34	23,19	23,45	23,65	23,74	2.

Oblicz średnią temperaturę oraz wariancję i odchylenie standardowe w tym badaniu. Każdy z otrzymanych wyników podaj z dokładnością do 0,01.

Liczba elementów zbioru skończonego

Liczba elementów zbioru skończonego

W poniższych przykładach zajmiemy się obliczaniem liczby elementów pewnych zbiorów skończonych.

Zauważmy na wstępie, że w zbiorze, do którego należą wszystkie kolejne liczby naturalne od 1 do n , jest n elementów.

Przykład 1

Do klasy pierwszej przyjęto 35 uczniów. Zatem w dzienniku lekcyjnym powinni być oni wpisani w porządku alfabetycznym, otrzymując numery: 1, 2, 3, ..., 34, 35.

Przykład 2

W zbiorze $A = \{1, 2, 3, \dots, 1674, 1675\}$ kolejnych liczb naturalnych od 1 do 1675 jest 1675 elementów.

Uwaga. Liczbę elementów zbioru A będziemy oznaczać symbolem $|A|$. Wobec tego liczbę elementów zbioru A z powyższego przykładu zapiszemy symbolicznie: $|A| = 1675$.

Przykład 3

Ustalimy, ile jest elementów w zbiorze $\{12, 13, 14, \dots, 26, 27\}$ kolejnych liczb naturalnych od 12 do 27.

- sposób I

Można wypisać wszystkie elementy tego zbioru i po prostu policzyć, ile ich jest.

Warto zauważyć, że numerując dla porządku kolejne elementy tego zbioru

(1) – 12

(2) – 13

(3) – 14

ustawiamy je w ciąg, w którym numer elementu jest niezmiennie o 11 mniejszy od tego elementu.

Takie numerowanie zakończy się więc przyporządkowaniem liczbie 27 numeru 16 (bo $27 - 11 = 16$), co oznacza, że w zbiorze $\{12, 13, 14, \dots, 26, 27\}$ jest 16 elementów.

Uwaga. Ciąg, którego własności wykorzystaliśmy przy obliczaniu elementów danego zbioru jest ciągiem arytmetycznym, o pierwszym wyrazie 12 i różnicy 1. Można go więc opisać wzorem ogólnym $n + 11$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots, 16$.

- sposób II

Zauważmy, że zbiór $\{1, 2, 3, \dots, 26, 27\}$, liczący 27 elementów, możemy podzielić na dwa rozłączne podzbiory:

liczb mniejszych od 12:

$\{1, 2, 3, \dots, 11\}$, który ma 11 elementów

oraz liczb od 12 do 27:

$\{12, 13, 14, \dots, 26, 27\}$.

Oznacza to, że zbiór $\{12, 13, 14, \dots, 26, 27\}$ ma $27 - 11 = 16$ elementów.

Zasada równoliczności

W sposobie *I* w poprzednim przykładzie, aby stwierdzić, że w zbiorze $\{12, 13, 14, \dots, 26, 27\}$ jest 16 elementów, ponumerowaliśmy elementy tego zbioru od 1 do 16, co oznacza, że ustaliliśmy wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między elementami zbiorów $\{12, 13, 14, \dots, 26, 27\}$ oraz $\{1, 2, 3, \dots, 15, 16\}$.

Zastosowaliśmy w ten sposób **zasadę równoliczności**.

Zasada równoliczności

Dwa zbiory A i B są równoliczne (mają tyle samo elementów), jeżeli ich elementy można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie, to znaczy, że każdemu elementowi zbioru A przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru B oraz każdemu elementowi zbioru B przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru A .

Przykład 4

Korzystając z pomysłów z poprzedniego przykładu, wykażemy, że w zbiorze kolejnych liczb naturalnych od k do l :

$$\{k, k+1, k+2, \dots, l-1, l\}$$

jest $l - k + 1$ elementów.

- sposób *I*

Ustawiamy kolejne elementy zbioru $\{k, k+1, k+2, \dots, l-1, l\}$ w taki ciąg (a_n) , że $a_1 = k$, $a_2 = k+1$, i tak dalej co 1, do ostatniego wyrazu równego l . W tym ciągu numer wyrazu jest więc niezmiennie o $k-1$ mniejszy od tego wyrazu, zatem jego ostatni wyraz to $a_{l-(k-1)} = l$. Wobec tego taki ciąg (a_n) jest określony dla $n = 1, 2, \dots, l - k + 1$, czyli ma $l - k + 1$ wyrazów.

Uwaga. Ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazie pierwszym $a_1 = k$ i różnicy 1 jest określony wzorem ogólnym $a_n = k + n - 1$. Gdy $a_n = l$, to $k + n - 1 = l$, stąd $n = l - k + 1$.

- sposób II

Zauważmy, że zbiór $\{1, 2, \dots, l-1, l\}$, liczący l elementów, możemy podzielić na dwa rozłączne podzbiory:

liczb mniejszych od k :

$\{1, 2, \dots, k-2, k-1\}$, który ma $k-1$ elementów

oraz liczb od k do l :

$\{k, k+1, k+2, \dots, l-1, l\}$.

Oznacza to, że zbiór $\{k, k+1, k+2, \dots, l-1, l\}$ ma $l - (k-1) = l - k + 1$ elementów.

Przykład 5

Sprawdzimy, czy zbiory:

$$A = \{20, 21, 22, \dots, 73, 74\},$$

$$B = \{136, 137, 138, \dots, 189, 190\},$$

$$C = \{1, 2, 3, \dots, 54, 55\}$$

są równoliczne.

Zbiór C ma 55 elementów, liczba elementów zbioru A to $|A| = 74 - (20 - 1) = 55$, a liczba elementów zbioru B to $|B| = 190 - (136 - 1) = 55$. Zatem zbiory A , B i C są równoliczne.

Reguła dodawania

W przykładzie 3, w sposobie II, aby stwierdzić, że w zbiorze $\{12, 13, 14, \dots, 26, 27\}$ jest 16 elementów, podzieliliśmy zbiór $\{1, 2, 3, \dots, 26, 27\}$ na dwa podzbiory: $\{1, 2, 3, \dots, 10, 11\}$ oraz $\{12, 13, 14, \dots, 26, 27\}$. Skorzystaliśmy z tego, że usuwając ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 26, 27\}$, który ma 27 elementów, podzbiór jedenastoelementowy $\{1, 2, 3, \dots, 10, 11\}$, dostaliśmy podzbiór $\{12, 13, 14, \dots, 26, 27\}$, który ma 16 elementów.

Założmy teraz, że w wyniku podziału (rozbicia) zbioru otrzymaliśmy dwa podzbiory A i B . Wtedy ten zbiór jest sumą dwóch zbiorów rozłącznych A i B . Tak otrzymany zbiór opisujemy, używając symbolu sumy zbiorów: $A \cup B$.

Rozumując podobnie jak powyżej, możemy stwierdzić, że liczba $|A \cup B|$ elementów zbioru $A \cup B$ jest sumą liczb $|A|$ i $|B|$, które opisują liczby elementów jego podzbiorów A i B , otrzymanych w wyniku tego podziału: $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Przykład 6

Obliczymy, ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych, które dzielą się przez 3.

Wszystkich liczb dwucyfrowych, czyli liczb ze zbioru $\{10, 11, 12, \dots, 98, 99\}$, jest $99 - 9 = 90$.

Zauważmy teraz, że wśród trzech kolejnych liczb naturalnych jest dokładnie jedna podzielna przez 3, jest dokładnie jedna, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 oraz jest dokładnie jedna, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

Ponieważ $\frac{1}{3} \cdot 90 = 30$, więc zbiór liczb dwucyfrowych możemy rozbić na 30 podzbiorów trzelementowych

$$\{10, 11, 12\}, \{13, 14, 15\}, \{16, 17, 18\}, \dots, \{97, 98, 99\}$$

takich, że w każdym z nich znajdzie się dokładnie jedna liczba podzielna przez 3. Oznacza to, że jest 30 wszystkich liczb dwucyfrowych, które dzielą się przez 3.

Przykład 7

Korzystając z wniosków zapisanych w poprzednim przykładzie, wykażemy, że w każdym ze zbiorów: liczb dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1 oraz liczb dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2, jest 30 elementów.

Korzystamy z rozbicia zbioru $\{10, 11, 12, \dots, 98, 99\}$ liczb dwucyfrowych na trzy podzbiory:

$A_0 = \{12, 15, \dots, 99\}$ – zbiór liczb podzielnych przez 3,

$A_1 = \{10, 13, \dots, 97\}$ – zbiór liczb, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1,

$A_2 = \{11, 14, \dots, 98\}$ – zbiór liczb, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2.

Podzbiory te są parami rozłączne (bo rozdzielaliśmy ich elementy ze względu na resztę z dzielenia przez 3) oraz równoliczne (jednoznaczne przyporządkowanie między ich elementami gwarantuje podział na trzydzieści podzbiorów trzelementowych – wykorzystaliśmy ten podział w przykładzie 6).

Podsumowując:

- jest 90 wszystkich liczb dwucyfrowych, czyli liczb w zbiorze $A_0 \cup A_1 \cup A_2$:

$$|A_0 \cup A_1 \cup A_2| = 90$$

- zbiór liczb dwucyfrowych można rozbić na trzy podzbiory A_0, A_1, A_2 , które są parami rozłączne, stąd

$$|A_0 \cup A_1 \cup A_2| = |A_0| + |A_1| + |A_2|$$

- otrzymane podzbiory są równoliczne, a więc

$$|A_0| = |A_1| = |A_2|$$

Wynika z tego, że każdy z tych podzbiorów ma 30 elementów:

$$|A_0| = |A_1| = |A_2| = \frac{1}{3} \cdot 90 = 30$$

Uwaga. Powyżej stwierdziliśmy, że zbiory A_0, A_1, A_2 są parami rozłączne. Oznacza to, że każda z par zbiorów: A_0 i A_1 , A_1 i A_2 oraz A_0 i A_2 nie ma elementu wspólnego. Używając symbolu iloczynu (części wspólnej) zbiorów oraz symbolu zbioru pustego ($\emptyset$), następująco zapisujemy fakt, że zbiory A_0, A_1, A_2 są parami rozłączne:

$$A_0 \cap A_1 = \emptyset \text{ i } A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ i } A_0 \cap A_2 = \emptyset.$$

Przykład 8

Obliczymy, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 7.

- sposób I

Każdą liczbę podzielną przez 7 możemy zapisać w postaci $7n$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Wystarczy zatem obliczyć, ile jest wszystkich całkowitych n , które spełniają układ nierówności

$$7n \geq 100 \text{ i } 7n \leq 999.$$

Ponieważ $7n \geq 100$ dla $n \geq \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}$ oraz $7n \leq 999$ dla $n \leq \frac{999}{7} = 142\frac{5}{7}$, więc $n = 15, 16, 17, \dots, 141, 142$.

Wynika z tego, że najmniejszą liczbą trzycyfrową, która dzieli się przez 7, jest $15 \cdot 7 = 105$, a największą $142 \cdot 7 = 994$.

W zbiorze $\{15, 16, 17, \dots, 141, 142\}$ jest $142 - 15 + 1 = 128$ elementów, więc dokładnie tyle jest liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 7.

- sposób II

Wszystkich liczb trzycyfrowych, czyli liczb ze zbioru $\{100, 101, 102, \dots, 998, 999\}$, jest $999 - 100 + 1 = 900$.

Zauważmy teraz, że wśród siedmiu kolejnych liczb naturalnych jest dokładnie po jednej liczbie dla każdej z możliwych reszt z dzielenia przez 7: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ponieważ $900 = 128 \cdot 7 + 4$, więc jeżeli ze zbioru liczb trzycyfrowych wyjmiemy podzbiór czteroelementowy $\{100, 101, 102, 103\}$, to pozostały podzbiór, liczący 896 elementów, możemy rozbić na 128 podzbiorów siedmioelementowych – w każdym z nich znajdzie się dokładnie jedna liczba podzielna przez 7:

$$\{104, 105, 106, 107, 108, 109, 110\}, \dots, \{993, 994, 995, 996, 997, 998, 999\}.$$

Sprawdzamy, że żadna z liczb ze zbioru $\{100, 101, 102, 103\}$ nie dzieli się przez 7, zatem jest dokładnie 128 liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 7.

- sposób III

Zbiór $\{100, 101, 102, \dots, 998, 999\}$ wszystkich liczb trzycyfrowych jest podzbiorem zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 998, 999\}$ wszystkich liczb naturalnych od 1 do 999.

Ponieważ $999 = 142 \cdot 7 + 5$, więc jeżeli ze zbioru liczb naturalnych od 1 do 999 wyjmiemy podzbiór pięcioelementowy $\{995, 996, 997, 998, 999\}$, to pozostałe 994 liczby możemy rozdzielić do 142 podzbiorów siedmioelementowych:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}, \dots, \{988, 989, 990, 991, 992, 993, 994\}.$$

W każdym z nich jako ostatnia zapisana jest jedyna w takim podzborze liczba podzielna przez 7. Zatem bez sprawdzania możemy stwierdzić, że wśród liczb ze zbioru $\{995, 996, 997, 998, 999\}$ nie ma liczby

podzielnej przez 7.

Skoro $99 = 14 \cdot 7 + 1$, więc jeżeli ze zbioru liczb naturalnych od 1 do 99 wyjmiemy liczbę 99, to pozostałe 98 liczb możemy rozdzielić do 14 podzbiorów siedmioelementowych:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}, \dots, \{92, 93, 94, 95, 96, 97, 98\}.$$

Oznacza to, że w zbiorze liczb naturalnych od 1 do 99 jest dokładnie 14 liczb podzielnych przez 7.

Wobec tego w zbiorze liczb naturalnych od 100 do 999 jest ich $142 - 14 = 128$.

Uwaga. Zauważmy, że wykorzystane w rozwiązaniu liczby 142 i 14 otrzymaliśmy, przybliżając z niedomiarem ułamki odpowiednio $\frac{999}{7} = 142\frac{5}{7}$ oraz $\frac{99}{7} = 14\frac{2}{7}$.

Dowolnej liczbie rzeczywistej x można jednoznacznie przypisać jej część całkowitą (zwaną też cechą lub podłogą tej liczby), która oznacza największą liczbę całkowitą, która nie jest większa od x . Część całkowita liczby x oznaczana jest symbolem $\lfloor x \rfloor$.

Stosując to oznaczenie, zapiszemy, że liczb trzycyfrowych podzielnych przez 7 jest

$$\left\lfloor \frac{999}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{7} \right\rfloor = \left\lfloor 142\frac{5}{7} \right\rfloor - \left\lfloor 14\frac{2}{7} \right\rfloor = 142 - 14 = 128.$$

Rozumując w podobny sposób jak w ostatnim sposobie rozwiązania, stwierdzimy np., że

- wszystkich liczb czterocyfrowych podzielnych przez 11 jest

$$\left\lfloor \frac{9999}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{11} \right\rfloor = \lfloor 909 \rfloor - \left\lfloor 90\frac{9}{11} \right\rfloor = 909 - 90 = 819,$$

- wszystkich liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 17 jest

$$\left\lfloor \frac{99999}{17} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9999}{17} \right\rfloor = \left\lfloor 5882\frac{5}{17} \right\rfloor - \left\lfloor 588\frac{3}{17} \right\rfloor = 5882 - 588 = 5294,$$

- a wszystkich liczb sześciocyfrowych podzielnych przez 29 jest

$$\left\lfloor \frac{999999}{29} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99999}{29} \right\rfloor = \left\lfloor 34482\frac{21}{29} \right\rfloor - \left\lfloor 3448\frac{7}{29} \right\rfloor = 34482 - 3448 = 31034.$$

Podamy teraz wzór, pozwalający obliczyć liczbę elementów sumy n zbiorów rozłącznych.

Do jego uzasadnienia wystarczy przeprowadzić podobne rozumowanie, jak stosowane w poprzednich przykładach.

Własność: Liczba elementów sumy n zbiorów rozłącznych

Jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Regułę, która jest zapisana w powyższym wzorze, nazywamy regułą dodawania.

Przykład 9

Obliczymy, ile jest liczb dwucyfrowych, które są podzielne przez 2 lub są podzielne przez 5.

Oznaczmy:

A_2 - zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 2,

A_5 - zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5.

Mamy obliczyć, ile jest liczb dwucyfrowych, które są podzielne przez 2 lub przez 5, czyli wartość

$$|A_2 \cup A_5|.$$

Zauważmy, że:

- wśród dwóch kolejnych liczb naturalnych jest dokładnie jedna parzysta i dokładnie jedna nieparzysta. Ponieważ da się rozbić zbiór liczb dwucyfrowych na takie podzbiory dwuelementowe, że w każdym z nich znajdzie się dokładnie jedna liczba podzielna przez 2, więc $|A_2| = \frac{1}{2} \cdot 90 = 45$.
- wśród pięciu kolejnych liczb naturalnych jest dokładnie jedna podzielna przez 5. Ponieważ da się rozbić zbiór liczb dwucyfrowych na takie podzbiory pięcioelementowe, że w każdym z nich znajdzie się dokładnie jedna liczba podzielna przez 5, więc $|A_5| = \frac{1}{5} \cdot 90 = 18$.

Zbiory A_2 oraz A_5 nie są jednak rozłączne – wśród liczb dwucyfrowych są takie, które dzielą się zarówno przez 2, jak i przez 5, taką jest np. 10. Ponieważ liczba całkowita dzieli się przez 2 i przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez 10, więc musimy jeszcze obliczyć, ile jest liczb dwucyfrowych podzielnych przez 10.

Liczb tych jest 9, co można sprawdzić, wypisując je wszystkie lub zauważając, że takich liczb jest $\frac{1}{10} \cdot 90 = 9$.

Przedstawimy teraz trzy pomysły na dokończenie rozwiązania przykładu 9.

- sposób I

Zbiór $A_2 \cup A_5$ rozbijemy na trzy rozłączne podzbiory:

- zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 2 i przez 5.

Jest to zbiór liczb podzielnych przez 10, zatem takich liczb jest 9.

- zbiór tych liczb dwucyfrowych, które dzielą się przez 2 i nie dzielą się przez 5.

Zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 2 możemy rozbić na dwa podzbiory: podzbiór liczb podzielnych przez 5 i podzbiór liczb niepodzielnych przez 5. Wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 2 jest 45, tych spośród nich, które są dodatkowo podzielne przez 5, jest 9, zatem liczb dwucyfrowych, które dzielą się przez 2 i nie dzielą się przez 5, jest $45 - 9 = 36$.

- zbiór tych liczb dwucyfrowych, które dzielą się przez 5 i nie dzielą się przez 2.

Zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5 możemy rozbić na dwa podzbiory: podzbiór liczb parzystych i podzbiór liczb nieparzystych. Wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5, jest 18, tych spośród nich, które są dodatkowo podzielne przez 2, jest 9, zatem liczb dwucyfrowych, które dzielą się przez 5 i nie dzielą się przez 2, jest $18 - 9 = 9$.

Ostatecznie stwierdzamy, że wszystkich liczb dwucyfrowych, które są podzielne przez 2 lub przez 5, jest

$$|A_2 \cup A_5| = 9 + 36 + 9 = 54.$$

- sposób II

Obliczając liczbę tych liczb dwucyfrowych, które dzielą się przez 2 i nie dzielą się przez 5, można zauważyć, że zbiór parzystych liczb dwucyfrowych da się rozbić na pięć podzbiorów ze względu na resztę z dzielenia przez 5. Obliczymy wtedy, że szukane przez nas liczby są elementami 4 z tych 5 podzbiorów, zatem ich liczba to

$$\frac{4}{5} \cdot 45 = 36$$

Analogiczny pomysł można zastosować do ustalenia, ile jest liczb dwucyfrowych, które są podzielne przez 2 lub przez 5.

Rozbijemy mianowicie zbiór liczb dwucyfrowych na 10 podzbiorów ze względu na resztę z dzielenia przez 10. W każdym z tych podzbiorów jest $\frac{1}{10} \cdot 90 = 9$ elementów. Wyróżnimy wśród tych podzbiorów

dwie grupy:

(1) podzbiory, w których znajdują się liczby dające przy dzieleniu przez 10 jedną z reszt: 0, 2, 4, 5, 6 lub 8,

(2) podzbiory, w których znajdują się liczby dające przy dzieleniu przez 10 jedną z reszt: 1, 3, 7, 9.

Zauważmy, że każda z liczb, która znalazła się w dowolnym z podzbiorów grupy (1) dzieli się przez 2 lub przez 5, a każda z liczb, które są w dowolnym z podzbiorów grupy (2) jest liczbą niepodzielną ani przez 2, ani przez 5.

Zatem

$$|A_2 \cup A_5| = \frac{6}{10} \cdot 90 = 54.$$

- sposób III

Obliczyliśmy wcześniej, że liczb dwucyfrowych podzielnych przez 2 jest $|A_2| = 45$, liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5 jest $|A_5| = 18$, liczb dwucyfrowych podzielnych jednocześnie przez 2 i przez 5 jest $|A_2 \cap A_5| = 9$.

Każda liczba należąca do tego ostatniego zbioru jest również elementem każdego ze zbiorów A_2 oraz A_5 . Wypisując zatem wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez 2 oraz wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez 5, wypiszemy dokładnie dwa razy każdą z liczb podzielnych przez 10, a każdą inną – dokładnie raz. Oznacza to, że jeśli od sumy $|A_2| + |A_5| = 45 + 18 = 63$ odejmiemy liczbę $|A_2 \cap A_5| = 9$, to ustalimy, ile jest liczb dwucyfrowych podzielnych przez 2 lub 5:

$$|A_2 \cup A_5| = |A_2| + |A_5| - |A_2 \cap A_5| = 45 + 18 - 9 = 54.$$

Rozumując podobnie jak w ostatnim sposobie rozwiązania przykładu 9, możemy stwierdzić, że dla dowolnych dwóch zbiorów A i B liczba $|A \cup B|$ elementów należących do zbioru A lub do zbioru B jest równa sumie liczb $|A|$ i $|B|$, pomniejszonej o liczbę $|A \cap B|$ elementów należących jednocześnie do zbioru A i do zbioru B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Przykład 10

W konkursie matematycznym uczestniczyło 132 uczniów. Siedmiu spośród nich nie rozwiązało żadnego z dwóch pierwszych zadań, 98 uczestników rozwiązało zadanie pierwsze, a 55 z nich rozwiązało zadanie drugie. Ustalimy, ilu jest uczestników tego konkursu, którzy rozwiązyli oba zadania: pierwsze i drugie. Z treści zadania wynika, że liczba uczestników konkursu, którzy rozwiązyli zadanie pierwsze lub zadanie drugie, jest równa

$$132 - 7 = 125.$$

Przyjmijmy teraz następujące oznaczenia: uczestników konkursu, którzy rozwiązyli zadania pierwsze, przypiszemy do zbioru A , a tych uczestników, którzy rozwiązyli zadania drugie – do zbioru B .

Wiemy, że $|A \cup B| = 125$, $|A| = 98$ i $|B| = 55$.

Ponieważ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, więc $125 = 98 + 55 - |A \cap B|$, stąd

$|A \cap B| = 98 + 55 - 125 = 28$, co oznacza, że 28 uczestników tego konkursu rozwiązało oba zadania: pierwsze i drugie.

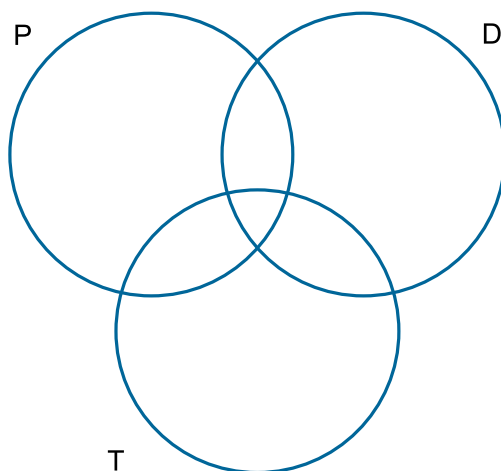
Przykład 11

W konkursie matematycznym, w którym uczestnicy mieli do rozwiązania trzy zadania, uczestniczyło 49 uczniów. Zadanie pierwsze rozwiązało 34 uczniów, zadanie drugie – 27, zadanie trzecie – 18. Ponadto: zadanie pierwsze i drugie rozwiązało 19 uczniów, zadanie drugie i trzecie – 10 uczniów, zadanie pierwsze i trzecie – 13 uczniów, a 8 uczniów rozwiązało wszystkie trzy zadania.

Ustalimy, ilu jest uczestników tego konkursu, którzy nie rozwiązyali żadnego z trzech zadań.

Oznaczamy literami P , D , T zbiory uczniów, którzy rozwiązyali odpowiednio pierwsze, drugie i trzecie zadanie.

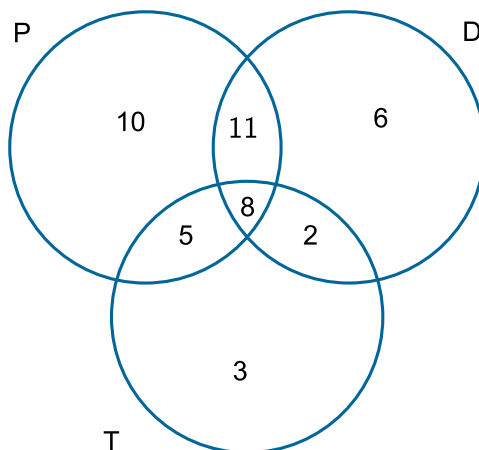
Przedstawimy rozwiązanie, korzystając z poniższego diagramu:



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wpisujemy w odpowiednie miejsce diagramu liczbę uczestników, którzy:

- rozwiązyali wszystkie trzy zadania (jest ich 8),
- rozwiązyali zadania 1 i 2, ale nie rozwiązyali zadania 3 (jest ich $19 - 8 = 11$),
- rozwiązyali zadania 1 i 3, ale nie rozwiązyali zadania 2 (jest ich $13 - 8 = 5$),
- rozwiązyali zadania 2 i 3, ale nie rozwiązyali zadania 1 (jest ich $10 - 8 = 2$),
- rozwiązyali tylko zadanie 1 (jest ich $34 - (11 + 8 + 5) = 10$),
- rozwiązyali tylko zadanie 2 (jest ich $27 - (11 + 8 + 2) = 6$),
- rozwiązyali tylko zadanie 3 (jest ich $18 - (5 + 8 + 2) = 3$).



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

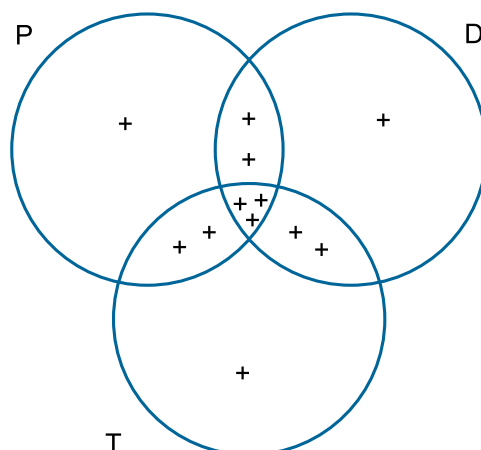
Wobec tego wszystkich uczestników tego konkursu, którzy rozwiązyali co najmniej jedno zadanie, było

$$8 + 11 + 5 + 2 + 10 + 6 + 3 = 45.$$

Zatem 4 uczestników konkursu nie rozwiązało żadnego z trzech zadań. To zadanie można też rozwiązać, rozumując w następujący sposób. Wybieramy po kolei wszystkie elementy zbiorów: najpierw P , potem D i następnie T – jest ich razem

$$|P| + |D| + |T| = 34 + 27 + 18 = 79.$$

Na diagramie zaznaczamy „+” w każdym miejscu, z którego wzięliśmy wszystkie elementy

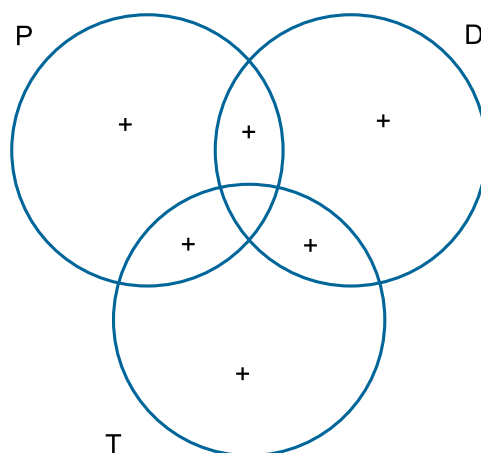


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważamy, że elementy należące do części wspólnej każdych dwóch zbiorów obliczyliśmy za dużo razy – poprawiamy wynik, odejmując od niego liczby $|P \cap D|$, $|D \cap T|$ i $|P \cap T|$:

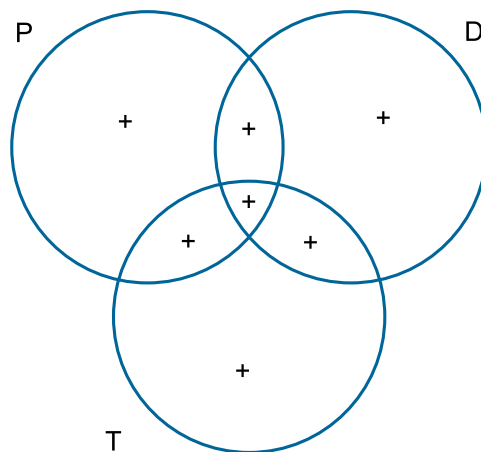
$$|P| + |D| + |T| - (|P \cap D| + |D \cap T| + |P \cap T|) = (34 + 27 + 18) - (19 + 10 + 13) = 79 - 42 = 37$$

Na diagramie zabieramy „+” z każdego miejsca, z którego elementy usunęliśmy.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem pozostaje jeszcze tylko dodać elementy części wspólnej wszystkich trzech zbiorów tak, żeby każdy element sumy był policzony dokładnie raz.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ $|P \cap D \cap T| = 8$, więc otrzymujemy, że liczba elementów zbioru $P \cup D \cup T$, czyli liczba uczestników konkursu, którzy rozwiązali co najmniej jedno zadanie, jest równa

$$|P \cup D \cup T| = |P| + |D| + |T| - (|P \cap D| + |D \cap T| + |P \cap T|) + |P \cap D \cap T| = 79 - 42 + 8 = 45$$

.Oznacza to, że 4 uczestników konkursu nie rozwiązało żadnego z trzech zadań.

Wskazówka

Znamy już wzór na liczbę elementów sumy dwóch zbiorów

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Korzystając z powyższego sposobu rozwiązania, możemy zapisać wzór na liczbę elementów sumy $A \cup B \cup C$ trzech zbiorów A , B i C :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

Obydwa zapisane powyżej wzory są szczególnymi przypadkami zastosowania tzw. zasady włączeń i wyłączeń.

Ćwiczenie 1

Wszystkich liczb trzycyfrowych większych od 200 i mniejszych od 500 jest

☐ 298

☐ 301

☐ 300

☐ 299

Ćwiczenie 2

W klasie IIIa jest 33 uczniów. Na wycieczkę do Gdańska pojechało 25 z nich, a na wycieczkę do Rzeszowa pojechało ich 28, przy czym dokładnie trzech uczniów tej klasy nie pojechało na żadną z tych dwóch wycieczek. Ile uczniów tej klasy było na obu wycieczkach: w Gdańsku i w Rzeszowie?

☐ 28

☐ 25

☐ 23

☐ 30

Ćwiczenie 3

Ile jest elementów zbioru $\{11, 15, 19, \dots, 95, 99\}$ wszystkich liczb dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 3?

☐ 24

☐ 22

☐ 25

☐ 23

Ćwiczenie 4

Kasia znalazła książkę, z której ktoś wyrwał kartki. Kiedy Kasia otworzyła książkę w zniszczonej części, z lewej strony odczytała numer 98, a z prawej – 353. Ile kartek zostało wyrwanych z tej książki w tym miejscu?

☐ 128

☐ 127

☐ 254

☐ 255

Ćwiczenie 5

Wszystkich liczb dwucyfrowych, które są podzielne przez 9 lub przez 10, jest

☐ 19

☐ 18

☐ 10

☐ 20

Ćwiczenie 6

Oblicz, ile jest elementów w zbiorze:

1. A – liczb naturalnych od 27 do 62: $A = \{27, 28, 29, \dots, 61, 62\}$
2. B – dwucyfrowych liczb nieparzystych: $B = \{11, 13, 15, \dots, 97, 99\}$
3. C – liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6: $C = \{12, 18, 24, \dots, 90, 96\}$
4. D – liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5: $D = \{100, 105, 110, \dots, 990, 995\}$

Ćwiczenie 7

Oblicz, ile jest elementów w zbiorze:

1. A_1 – liczb trzycyfrowych, które przy dzieleniu przez 10 dają resztę 1: $A_1 = \{101, 111, \dots, 991\}$
2. A_3 – liczb trzycyfrowych, które przy dzieleniu przez 10 dają resztę 3: $A_3 = \{103, 113, \dots, 993\}$
3. A_6 – liczb trzycyfrowych, które przy dzieleniu przez 10 dają resztę 6: $A_6 = \{106, 116, \dots, 996\}$
4. A_8 – liczb trzycyfrowych, które przy dzieleniu przez 10 dają resztę 8: $A_8 = \{108, 118, \dots, 998\}$

Ćwiczenie 8

Piotruś pomagał dziadkowi porządkować książki. Zdejmując z górnej półki opasły tom starej encyklopedii, nie zdołał utrzymać książki w ręku, a ta, upadając, rozerwała się. Podnosząc część, która oddzieliła się od reszty książki, Piotruś zauważył, że na jej pierwszej stronie jest numer 306, a na ostatniej numer wyrażający się liczbą nieparzystą zapisaną za pomocą tych samych cyfr. Ile kartek liczyła ta wyrwana część encyklopedii? Odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 9

Bieg uliczny ukończyło 2015 osób. Liczba zawodników, którzy przybiegli za Markiem, jest 18 razy większa od liczby tych startujących, którzy przybiegli przed nim, natomiast Jola ukończyła zawody dokładnie w połowie stawki. Ile osób zajęło w tym biegu miejsca między Markiem a Jolą?

Ćwiczenie 10

Oblicz, ile jest:

1. wszystkich liczb dwucyfrowych, które dzielą się przez 20.
2. wszystkich liczb dwucyfrowych, które dzielą się przez 4.
3. wszystkich liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 25.
4. wszystkich liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 8.

Ćwiczenie 11

Oblicz, ile jest:

1. wszystkich liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 11.
2. wszystkich liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 17.
3. wszystkich liczb czterocyfrowych, które dzielą się przez 19.
4. wszystkich liczb czterocyfrowych, które dzielą się przez 23.

Ćwiczenie 12

Oblicz, ile jest liczb

1. dwucyfrowych, które są podzielne przez 2 lub są podzielne przez 10
2. dwucyfrowych, które są podzielne przez 3 lub są podzielne przez 9
3. trzycyfrowych, które są podzielne przez 5 lub są podzielne przez 15
4. trzycyfrowych, które są podzielne przez 25 lub są podzielne przez 75

Ćwiczenie 13

Wiadomo, że wśród 100 uczestników pewnego międzynarodowego konkursu matematycznego 80 zna język angielski, 50 zna język francuski, 40 zna język niemiecki, a 21 zna język rosyjski. Wykaż, że pewien uczestnik tego konkursu, który zna język angielski, zna również:

1. język francuski
2. język niemiecki
3. język rosyjski

Ćwiczenie 14

W klasie III b jest 33 uczniów, z czego 19 to chłopcy. Wiadomo, że 15 uczniów tej klasy chodzi na zajęcia kółka matematycznego. Wykaż, że w zajęciach tego kółka bierze udział co najmniej jeden chłopiec.

Ćwiczenie 15

Na piątkowe zajęcia w domu kultury zapisało się 51 osób. W tym dniu odbywają się tam tylko zajęcia koła plastycznego (od 15.00 do 17.00), na które zapisało się 38 osób, oraz zajęcia koła teatralnego (17.30 do 19.00), na które zapisało się 16 osób. Ile osób planuje uczęszczać w piątki na zajęcia obu tych kół?

Ćwiczenie 16

Oblicz, ile jest liczb

1. dwucyfrowych, które są podzielne przez 2 lub są podzielne przez 9
2. dwucyfrowych, które są podzielne przez 3 lub są podzielne przez 10
3. trzycyfrowych, które są podzielne przez 6 lub są podzielne przez 75
4. trzycyfrowych, które są podzielne przez 25 lub są podzielne przez 60

Ćwiczenie 17

Każdy z 70 uczestników warsztatów matematycznych miał określić, co chciałby robić we wtorek po kolacji. Do wyboru były zajęcia w sali gimnastycznej oraz gry i zabawy w świetlicy. 56 osób zgłosiło chęć udziału na zajęciach w sali gimnastycznej, 38 – w grach i zabawach w świetlicy, przy czym 26 osób zgłosiło się i na zajęcia w sali gimnastycznej, i na zajęcia w świetlicy. Ilu uczestników tych warsztatów postanowiło po kolacji zostać w pokoju?

Ćwiczenie 18

Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 999, 1000\}$ wszystkich liczb naturalnych od 1 do 1000 usunięto najpierw wszystkie liczby podzielne przez 4, a następnie spośród reszty usunięto wszystkie liczby podzielne przez 5. Ile liczb pozostało?

Ćwiczenie 19

Do pracy w samorządzie szkolnym zgłosiło się trzech kandydatów: A , B i C . Za pomocą głosowania na szkolnej stronie internetowej przeprowadzono sondaż na temat popularności tych kandydatów. W stosownym formularzu należało dokonać wyboru, do którego zachęcano następująco: „Spośród kandydatów A , B , C wybierz tych, którzy według Ciebie zasługują na wybór do samorządu szkolnego”.

Opiekun strony internetowej przygotował raport, w którym podał, że:

- w sondażu oddano 370 głosów,
- na kandydata A oddano 200 głosów,
- na kandydata B oddano 211 głosów,
- na kandydata C oddano 134 głosy,
- kandydata A i kandydata B wskazało 68 głosujących,
- kandydata B i kandydata C wskazało 73 głosujących,
- kandydata A i kandydata C wskazało 86 głosujących,
- wszystkich trzech kandydatów wskazało 56 głosujących.

Wykaż, że w tym raporcie jest błąd.

Ćwiczenie 20

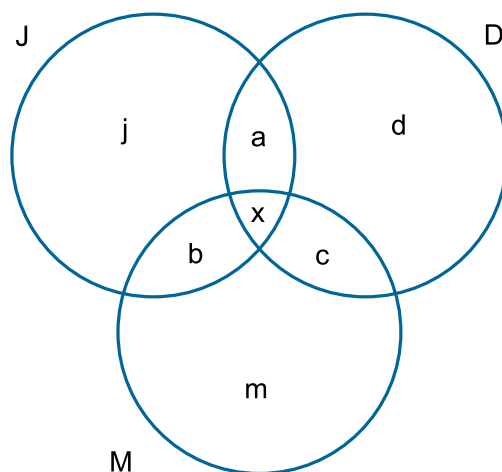
Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 2 lub przez 3, lub przez 5.

Ćwiczenie 21

Wiadomo, że wśród 20 laureatów pewnego międzynarodowego konkursu matematycznego 15 zna język angielski, 14 zna język francuski, a 12 zna język niemiecki. Wykaż, że pewien laureat tego konkursu zna każdy z tych trzech języków.

Ćwiczenie 22

Jarek, Darek i Marek, przygotowując się do sprawdzianu z matematyki, rozwiązali wspólnymi siłami wszystkie 90 zadań poleconych przez nauczyciela. Jarek rozwiązał 70 zadań, Darek – 60, a Marek – 40. Chłopcy uznali, że zadania, które rozwiązyali wszyscy, były łatwe, ale zadania rozwiązywane tylko przez jedną osobę były trudne. Wykaż, że zadań trudnych było o 10 więcej niż zadań łatwych.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Reguła mnożenia, reguła dodawania

Reguła mnożenia

Przykład 1

W pudełku jest 11 kul, ponumerowanych od 1 do 11. Z tego pudełka losujemy jedną kulę, zapisujemy jej numer i wrzucamy wylosowaną kulę z powrotem do pudełka. Następnie operację losowania powtarzamy, zapisując wynik drugiego losowania.

Obliczymy, ile jest wszystkich możliwych wyników takiego doświadczenia.

Pojedynczy wynik takiego doświadczenia zapisujemy, notując dwie liczby: najpierw wynik pierwszego losowania – w_1 , a następnie wynik drugiego losowania – w_2 .

Wszystkie możliwe wyniki doświadczenia możemy przedstawić np. za pomocą tabeli.

Tabela. Dane

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)	(1, 9)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)	(2, 9)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)	(3, 9)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)	(4, 9)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)	(5, 9)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	(6, 7)	(6, 8)	(6, 9)
7	(7, 1)	(7, 2)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)	(7, 6)	(7, 7)	(7, 8)	(7, 9)
8	(8, 1)	(8, 2)	(8, 3)	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)	(8, 7)	(8, 8)	(8, 9)
9	(9, 1)	(9, 2)	(9, 3)	(9, 4)	(9, 5)	(9, 6)	(9, 7)	(9, 8)	(9, 9)
10	(10, 1)	(10, 2)	(10, 3)	(10, 4)	(10, 5)	(10, 6)	(10, 7)	(10, 8)	(10, 9)
11	(11, 1)	(11, 2)	(11, 3)	(11, 4)	(11, 5)	(11, 6)	(11, 7)	(11, 8)	(11, 9)

Każdy wynik doświadczenia został w powyższej tabeli utożsamiony z przyporządkowaną mu parą liczb (w_1, w_2) . Jeżeli np. w pierwszym losowaniu otrzymamy 3, a w drugim 8, to wynik tego losowania zapiszemy jako $(3, 8)$. Z kolei zapisanie pary $(11, 2)$ to informacja, że za pierwszym razem wylosowano 11, a za drugim – 2.

Ponieważ rozpatrywane doświadczenie losowe to wykonanie jedna po drugiej dwóch czynności, polegających za każdym razem na wyborze jednego elementu z jedenastoelementowego zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$, to wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia jest $11 \bullet 11 = 121$.

Przykład 2

Ustalimy, ile dodatnich dzielników całkowitych ma każda z liczb: 72, 360 oraz 1410.

Skorzystamy z zapisu każdej z tych liczb w postaci rozkładu na czynniki pierwsze.

Ponieważ $72 = 2^3 \cdot 3^2$, więc każdy dodatni czynnik całkowity liczby 72 jest liczbą postaci $2^n \cdot 3^m$, przy czym n jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, natomiast m jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. Zauważmy, że wybór dzielnika liczby 72 polega na wykonaniu dwóch czynności: wyborze wykładnika dla czynnika 2 – co można zrobić na 4 sposoby, a następnie na wyborze wykładnika dla czynnika 3 – co można

zrobić na 3 sposoby.

Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że 72 ma $4 \cdot 3 = 12$ dzielników, które przedstawia poniższa tabela.

Tabela. Dane

	3^0	3^1	3^2
2^0	$2^0 \cdot 3^0 = 1$	$2^0 \cdot 3^1 = 3$	$2^0 \cdot 3^2 = 9$
2^1	$2^1 \cdot 3^0 = 2$	$2^1 \cdot 3^1 = 6$	$2^1 \cdot 3^2 = 18$
2^2	$2^2 \cdot 3^0 = 4$	$2^2 \cdot 3^1 = 12$	$2^2 \cdot 3^2 = 36$
2^3	$2^3 \cdot 3^0 = 8$	$2^3 \cdot 3^1 = 24$	$2^3 \cdot 3^2 = 72$

Ponieważ $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, więc każdy dodatni czynnik całkowity liczby 360 jest liczbą postaci $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k$, przy czym n jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, m jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, natomiast k jest liczbą ze zbioru $\{0, 1\}$. Zauważmy, że wybór dzielnika liczby 360 polega na wykonaniu trzech czynności, z których pierwsza może skończyć się na jeden z 4 sposobów, druga – na jeden z 3 sposobów, a trzecia – na jeden z 2 sposobów.

Jeżeli najpierw rozpatrzmy wszystkie przypadki związane z wykonaniem dwóch pierwszych czynności (jest ich 12), a następnie wykonamy trzecią czynność, to dostaniemy 24 możliwości.

Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że 360 ma $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ dodatnie dzielniki całkowite, które przedstawia poniższa tabela.

Tabela. Dane

	$2^0 \cdot 3^0$	$2^1 \cdot 3^0$	$2^2 \cdot 3^0$	$2^3 \cdot 3^0$	$2^0 \cdot 3^1$	$2^1 \cdot 3^1$	$2^2 \cdot 3^1$	$2^3 \cdot 3^1$	$2^0 \cdot 3^2$	$2^1 \cdot 3^2$
5^0	1	2	4	8	3	6	12	24	9	18
5^1	5	10	20	40	15	30	60	120	45	90

Ponieważ $1410 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 47$, więc każdy dodatni czynnik całkowity liczby 1410 jest liczbą postaci $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k \cdot 47^l$, przy czym każda z liczb n, m, k, l wybierana jest ze zbioru $\{0, 1\}$. Zauważmy, że wybór dzielnika liczby 1410 polega na wykonaniu czterech czynności, z których każda może skończyć się na jeden z 2 sposobów.

Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że 1410 ma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ dzielników.

Reguła mnożenia

Rozumując podobnie jak w przedstawionych powyżej przykładach, stwierdzimy, że:

- liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei dwóch czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z n sposobów, druga – na jeden z m sposobów, jest równa mn ,
- liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei trzech czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z n sposobów, druga – na jeden z m sposobów, a trzecia – na jeden z k sposobów, jest równa kmn .

Zasada, którą w podobnych przypadkach stosujemy, nazywa się **regułą mnożenia**.

Twierdzenie: Reguła mnożenia

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2

sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_n$$

Powołując się na regułę mnożenia, można pokazać, że liczba n , która w rozkładzie na czynniki pierwsze daje się zapisać w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi, a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są dodatnimi liczbami całkowitymi, ma

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$$

dodatnich dzielników całkowitych.

Przykład 3

Ustalimy, ile jest wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na:

1. siedmiokrotnym rzucie symetryczną monetą.

W pojedynczym rzucie symetryczną monetą możemy otrzymać jeden z dwóch wyników: „orzeł” lub „reszka”. Doświadczenie polega więc na siedmiokrotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem może skończyć się na jeden z 2 sposobów. Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczba wszystkich wyników jest równa

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128.$$

2. pięciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry.

W pojedynczym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry możemy otrzymać jeden z sześciu wyników: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek. Doświadczenie polega więc na pięciokrotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem może skończyć się na jeden z 6 sposobów. Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczba wszystkich wyników jest równa

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$$

3. zapisaniu liczby trzycyfrowej, utworzonej wyłącznie za pomocą cyfr ze zbioru

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (cyfry mogą się powtarzać).

Wybierając każdą cyfrę takiej liczby, możemy otrzymać jeden z ośmiu wyników. Oznacza to, że doświadczenie polega na trzykrotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem może skończyć się na jeden z 8 sposobów. Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczba wszystkich wyników jest równa

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 = 512$$

4. rozmieszczeniu 4 różnych notatników w 7 różnych teczkach.

Wyboru teczki dla każdego z czterech notatników możemy dokonać na 7 sposobów.

Doświadczenie polega więc na czterokrotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem może skończyć się na jeden z 7 sposobów. Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczba wszystkich wyników jest równa

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401$$

Wariacje z powtórzeniami

W doświadczeniach rozpatrywanych w poprzednim przykładzie mieliśmy do czynienia z tym samym schematem: każde z nich polegało na k -krotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem mogła się skończyć na jeden z n sposobów. Korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczba wszystkich wyników w doświadczeniu tego typu jest równa

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ czynników}} = n^k$$

Doświadczenie polegające na k -krotnym powtórzeniu czynności, która za każdym razem mogła się skończyć na jeden z n sposobów, nazywa się zwyczajowo k -wyrazową wariacją z powtórzeniami zbioru n -elementowego.

Modelem dla tego typu doświadczenia jest k -wyrazowy ciąg o elementach wybieranych dowolnie ze zbioru n -elementowego (czyli z powtórzeniami – dowolny element zbioru może wystąpić wielokrotnie w ciągu).

Na podstawie spostrzeżenia poczynionego powyżej formułujemy twierdzenie.

Własność: liczba k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego

Liczba wszystkich k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego jest równa n^k .

Przykład 4

Stosując twierdzenie o liczbie wariacji z powtórzeniami, obliczymy, że:

1. liczba wszystkich możliwych wyników trzykrotnego rzutu kostką sześcienną to $6^3 = 216$,
2. liczba wszystkich możliwych wyników pięciokrotnego rzutu monetą to $2^5 = 32$,
3. liczba wszystkich możliwych liczb 4-cyfrowych utworzonych z cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ to $5^4 = 625$,
4. liczba wszystkich możliwych sposobów umieszczenia 10 różnych długopisów w 4 różnych szufladach to $4^{10} = 1048576$,
5. liczba wszystkich możliwych sposobów umieszczenia 7 różnych kul w 6 różnych pudełkach (zakładamy, że w każdym pudełku zmieści się co najmniej 7 takich kul) to $6^7 = 279936$.

Przykład 5

Obliczymy sumę wszystkich liczb dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 (cyfry mogą się powtarzać).

Wszystkich liczb dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest dokładnie tyle, ile dwuelementowych ciągów (c_1, c_2) , gdzie c_1 oraz c_2 to liczby wybrane ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, z powtórzeniami. Jest ich zatem $5 \cdot 5 = 25$.

Sumę tych wszystkich liczb obliczymy dwoma sposobami.

- sposób I

Wypisujemy wszystkie liczby w tabeli, przy czym elementy c_1, c_2 pary (c_1, c_2) to dla konkretnej liczby odpowiednio cyfra dziesiątek oraz cyfra jedności.

Tabela. Dane

	1	2	3	4	5
1	11	12	13	14	15
2	21	22	23	24	25
3	31	32	33	34	35

4	41	42	43	44	45
5	51	52	53	54	55

Sumujemy liczby dwucyfrowe w kolejnych wierszach. Zauważamy przy tym, że:

- wszystkie liczby występujące w tym samym wierszu mają tę samą cyfrę dziesiątek,
- cyfry jedności tych liczb są różnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Tabela. Dane

	1	2	3	4	5	
1	11	12	13	14	15	suma: $5 \cdot 10 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$
2	21	22	23	24	25	suma: $5 \cdot 20 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$
3	31	32	33	34	35	suma: $5 \cdot 30 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$
4	41	42	43	44	45	suma: $5 \cdot 40 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$
5	51	52	53	54	55	suma: $5 \cdot 50 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$
					razem	$5 \cdot 10 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 30 + 5 \cdot 40 + 5 \cdot 50 + 5 \cdot (1 + 2 + 3 +$

Na koniec dodajemy wszystkie otrzymane sumy i otrzymujemy

$$5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

Oznacza to, że suma wszystkich liczb dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest równa

$$5 \cdot 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 5 \cdot (10 + 1) \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 5 \cdot 11 \cdot 15 :$$

- sposób II

Oznaczmy przez S sumę wszystkich liczb dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5.

Podobnie jak poprzednio wypisujemy wszystkie liczby w tabeli, przy czym do każdej z nich dopisujemy teraz drugą liczbę dwucyfrową, w następujący sposób: do liczby opisanej przez parę (c_1, c_2) dopisujemy liczbę opisaną przez parę $(6 - c_1, 6 - c_2)$.

Tabela. Dane

	1	2	3	4	5
1	11, 55	12, 54	13, 53	14, 52	15, 51
2	21, 45	22, 44	23, 43	24, 42	25, 41
3	31, 35	32, 34	33, 33	34, 32	35, 31
4	41, 25	42, 24	43, 23	44, 22	45, 21
5	51, 15	52, 14	53, 13	54, 12	55, 11

Zauważmy, że:

- istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie: liczby wyznaczonej przez parę (c_1, c_2) do liczby wyznaczonej przez parę $(6 - c_1, 6 - c_2)$, a ponadto suma takich dwóch liczb jest

w każdym przypadku równa 66,

- każda z liczb dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest przyporządkowana do dokładnie jednej pary $(6 - c_1, 6 - c_2)$, gdzie c_1 oraz c_2 to liczby wybrane ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Oznacza to, że dodając wszystkie liczby dwucyfrowe wpisane w ten sposób do tabeli:

- dodamy sumy par liczb wpisanych w 25 komórkach tabeli, czyli 25 razy liczbę 66,
- dokładnie dwa razy obliczymy każdy składnik sumy S .

Stąd

$$2S = 25 \cdot 66$$

a więc

$$S = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 66 = 25 \cdot 33 = 825$$

Przykład 6

Obliczymy sumę S wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 (cyfry mogą się powtarzać).

Wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest dokładnie tyle, ile trzelementowych ciągów (c_1, c_2, c_3) , gdzie c_1, c_2 oraz c_3 to liczby wybrane ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, z powtórzeniami. Tych liczb jest zatem $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Ich sumę obliczymy dwoma sposobami.

- sposób *I*

Sumujemy otrzymane liczby trzycyfrowe, dzieląc je na 5 grup ze względu na cyfrę setek. Zauważamy, że jest 25 liczb w każdej takiej grupie. Przy czym dla ustalonej cyfry setek dopisane do niej cyfry tworzą wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe zapisane wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5. Zatem:

- sumując wszystkie liczby z cyfrą setek równą 1, otrzymamy

$$25 \cdot 100 + 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

- sumując wszystkie liczby z cyfrą setek równą 2, otrzymamy

$$25 \cdot 200 + 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

- sumując wszystkie liczby z cyfrą setek równą 3, otrzymamy

$$25 \cdot 300 + 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

- sumując wszystkie liczby z cyfrą setek równą 4, otrzymamy

$$25 \cdot 400 + 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

- sumując wszystkie liczby z cyfrą setek równą 5, otrzymamy

$$25 \cdot 500 + 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5).$$

Oznacza to, że

$$S = 25 \cdot (100 + 200 + 300 + 400 + 500) + 5 \cdot 5 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + 5 \cdot 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\ = 25 \cdot 111 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 25 \cdot 111 \cdot 15 = 41625$$

Zauważmy, że w tej sumie otrzymaliśmy 25 razy każdą liczbę z ustaloną cyfrą na kolejnych miejscach zapisu dziesiętnego: jako cyfrę setek, jako cyfrę dziesiątek oraz jako cyfrę jedności. Mając to na uwadze, można było od razu zapisać sumę S w postaci

$$S = 25 \cdot (100 + 200 + 300 + 400 + 500) + 25 \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) + 25 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

- sposób II

Wypisujemy wszystkie liczby trzycyfrowe zapisane wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 i do każdej z nich dopisujemy teraz drugą liczbę trzycyfrową, w następujący sposób: do liczby opisanej przez trójkę (c_1, c_2, c_3) dopisujemy liczbę opisaną przez trójkę $(6 - c_1, 6 - c_2, 6 - c_3)$.

Zauważmy, że

- istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie: liczby wyznaczonej przez trójkę (c_1, c_2, c_3) do liczby wyznaczonej przez trójkę $(6 - c_1, 6 - c_2, 6 - c_3)$, a ponadto suma takich dwóch liczb jest w każdym przypadku równa 666,
- każda z liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest przyporządkowana do dokładnie jednej trójki $(6 - c_1, 6 - c_2, 6 - c_3)$, gdzie c_1, c_2 oraz c_3 to liczby wybrane ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Oznacza to, że dodając wszystkie wypisane w ten sposób liczby trzycyfrowe:

- dodamy sumy par liczb wpisanych w 125 przypadkach, czyli 125 razy liczbę 666,
- dokładnie dwa razy obliczymy każdy składnik sumy S .

Stąd

$$2S = 125 \cdot 666$$

a więc

$$S = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot 666 = 125 \cdot 333 = 41625$$

Zastosowanie reguły mnożenia oraz reguły dodawania

Przykład 7

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Obliczymy, ile jest wszystkich wyników doświadczenia, polegającego na tym, że

1. suma liczb wyrzuconych oczek jest parzysta.

W poniższej tabeli przedstawiamy wszystkie możliwe wyniki dwukrotnego rzutu kostką.

Zaznaczamy te, dla których suma liczb wyrzuconych oczek jest parzysta.

Tabela. Dane

	1	2	3	4	5	6	
1	x		x		x		3 możliwości
2		x		x		x	3 możliwości
3	x		x		x		3 możliwości
4		x		x		x	3 możliwości
5	x		x		x		3 możliwości
6		x		x		x	3 możliwości
					Razem:		$(3 + 3 + 3) + (3 + 3 + 3) = 3 \bullet 3 + 3 \bullet 3 = 18$

Zatem wszystkich takich wyników jest 18.

Zauważmy przy okazji, że warto od razu podzielić wyniki pojedynczego rzutu ze względu na parzystość liczby wyrzuconych oczek:

Tabela. Dane

wynik pojedynczego rzutu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	wyniki nieparzyste $\{1, 3, 5\}$	wyniki parzyste $\{2, 4, 6\}$
6 możliwości	3 możliwości	3 możliwości

Przy zliczaniu konkretnych możliwości skorzystamy z tego podziału oraz zastosujemy dwie poznane zasady: regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zauważmy, że aby suma liczb wyrzuconych oczek była parzysta, musimy w obu rzutach otrzymać liczby oczek tej samej parzystości. Oznacza to, że:

- do każdej z 3 nieparzystych liczb oczek wyrzuconych za pierwszym razem musimy za drugim razem wyrzucić jedną z 3 nieparzystych liczb oczek, co daje łącznie $3 \bullet 3 = 9$ możliwości,
- do każdej z 3 parzystych liczb oczek wyrzuconych za pierwszym razem musimy za drugim razem wyrzucić jedną z 3 parzystych liczb oczek, co daje łącznie $3 \bullet 3 = 9$ możliwości.

Wobec tego w sumie otrzymujemy $3 \bullet 3 + 3 \bullet 3 = 18$ wyników, dla których suma liczb wyrzuconych oczek jest parzysta.

1. Iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą nieparzystą.

Aby iloczyn liczb wyrzuconych oczek był nieparzysty, w obu rzutach musimy otrzymać liczbę nieparzystą. Zatem do każdej z 3 nieparzystych liczb oczek wyrzuconych za pierwszym razem musimy za drugim razem wyrzucić jedną z 3 nieparzystych liczb oczek, co daje łącznie $3 \bullet 3 = 9$ możliwości.

2. Iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest parzysty.

Aby iloczyn liczb wyrzuconych oczek był parzysty, w co najmniej jednym z rzutów musimy otrzymać parzystą liczbę oczek. Oznacza to, że:

- do każdej z 3 parzystych liczb oczek wyrzuconych za pierwszym razem możemy za drugim razem wyrzucić dowolną liczbę oczek, co daje łącznie $3 \bullet 6 = 18$ możliwości,
- do każdej z 3 nieparzystych liczb oczek wyrzuconych za pierwszym razem możemy za drugim razem wyrzucić jedną z 3 parzystych liczb oczek, co daje łącznie $3 \bullet 3 = 9$ możliwości.

Wobec tego w sumie otrzymujemy $3 \bullet 6 + 3 \bullet 3 = 27$ wyników, dla których iloczyn liczb

wyrzuconych oczek jest parzysty.

Zauważmy przy okazji, że zbiór wszystkich wyników dwukrotnego rzutu kostką można rozbić na dwa podzbiory:

A – tych wyników, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest nieparzysty,

B – tych wyników, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest parzysty.

Wtedy

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

przy czym $|A \cup B| = 6 \cdot 6 = 36$ (tyle jest wszystkich możliwych wyników dwukrotnego rzutu kostką) oraz $|A| = 3 \cdot 3 = 9$ (tyle jest wyników dwukrotnego rzutu kostką, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest nieparzysty). Zatem

$$36 = 9 + |B|$$

stąd

$$|B| = 36 - 9 = 27$$

1. Iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest podzielny przez 6.

Tym razem zaznaczamy w tabeli te wyniki, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest podzielny przez 6.

Tabela. Dane

w_1/w_2	1	2	3	4	5	6	
1						x	1 możliwość
2			x				2 możliwości
3		x		x		x	3 możliwości
4			x			x	2 możliwości
5						x	1 możliwość
6	x	x	x	x	x	x	6 możliwości
					Razem:		$1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 6 = 2 \bullet 1 + 2 \bullet 2 + 1 \bullet 3 + 1 \bullet 6 =$

Zatem wszystkich takich wyników jest 15.

Podsumowując zauważmy, że można wyniki pojedynczego rzutu podzielić na przypadki ze względu na to, jaką resztę z dzielenia przez 6 daje wyrzucona liczba oczek.

Wtedy:

- jeżeli za pierwszym razem wyrzucimy 6 oczek, to liczba oczek wyrzuconych za drugim razem jest dowolna, co daje łącznie $1 \bullet 6 = 6$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wyrzucimy 2 lub 4 oczka, to za drugim razem musimy wyrzucić 3 lub 6 oczek (czyli liczbę oczek, która dzieli się przez 3), co daje łącznie $2 \bullet 2 = 4$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wyrzucimy 3 oczka, to za drugim razem musimy wyrzucić 2, 4 lub 6 oczek (czyli liczbę oczek, która dzieli się przez 2), co daje łącznie $1 \bullet 3 = 3$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wyrzucimy 1 lub 5 oczek, to za drugim razem musimy wyrzucić 6 oczek (czyli liczbę oczek, która dzieli się przez 6), co daje łącznie $2 \bullet 1 = 2$ możliwości.

Zatem wszystkich takich wyników jest $1 \bullet 6 + 2 \bullet 2 + 1 \bullet 3 + 2 \bullet 1 = 15$.

Przykład 8

W pudełku jest 17 kul, ponumerowanych od 1 do 17. Z tego pudełka losujemy dwa razy po jednej kuli, przy czym po losowaniu wrzucamy wylosowaną kulę z powrotem do pudełka.

Inaczej mówiąc: ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 16, 17\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie, ze zwracaniem.

Obliczmy, ile jest wszystkich wyników doświadczenia.

1. Suma wylosowanych liczb jest parzysta.

Dzielimy wyniki pojedynczego losowania ze względu na parzystość wylosowanej liczby:

Tabela. Dane

wynik pojedynczego losowania $\{1, 2, 3, \dots, 16, 17\}$	wyniki nieparzyste $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$	wyniki parzyste $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
17 możliwości	9 możliwości	8 możliwości

Zauważmy, że aby suma wylosowanych liczb była parzysta, musimy w obu rzutach otrzymać liczby tej samej parzystości. Oznacza to, że:

- do każdej z 9 liczb nieparzystych wylosowanych za pierwszym razem musimy za drugim razem ponownie wylosować jedną z 9 liczb nieparzystych, co daje łącznie $9 \bullet 9 = 81$ możliwości,
 - do każdej z 8 liczb parzystych wylosowanych za pierwszym razem musimy za drugim razem ponownie wylosować jedną z 8 liczb parzystych, co daje łącznie $8 \bullet 8 = 64$ możliwości.
- Wobec tego łącznie otrzymujemy $9 \bullet 9 + 8 \bullet 8 = 81 + 64 = 145$ wyników, dla których suma wylosowanych liczb jest parzysta.

1. Iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.

Zbiór wszystkich wyników dwukrotnego losowania ze zwracaniem ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 16, 17\}$ można rozbić na dwa podzbiory:

A – tych wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest nieparzysty,

B – tych wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.

Wtedy

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

przy czym $|A \cup B| = 17 \cdot 17 = 289$ (tyle jest wszystkich możliwych wyników takiego losowania) oraz $|A| = 9 \cdot 9 = 81$ (tyle jest wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest nieparzysty).

Zatem $|B| = 289 - 81 = 208$, co oznacza, że jest 208 wyników tego doświadczenia, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.

2. Iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6?

• sposób I

Posłużymy się metodą tabeli.

Rozpatrzmy najpierw wzorcową tabelę, w której opisane są przypadki odpowiadające wszystkim możliwym wynikom losowania ze względu na resztę z dzielenia przez 6.

Zaznaczamy w niej te, dla których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest podzielny przez 6.

Tabela. Dane

w_1/w_2	reszta 1	reszta 2	reszta 3	reszta 4	reszta 5	reszta 0
reszta 1						x

reszta 2			x			x
reszta 3		x		x		x
reszta 4			x			x
reszta 5						x
reszta 0	x	x	x	x	x	x

Wszystkich takich wyników jest 15. Dzielimy teraz wyniki obu losowań na trzy podzbiory: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ oraz $\{13, 14, 15, 16, 17\}$. W zbiorczej tabeli zliczamy wszystkie możliwości w 9 przypadkach, dla każdego z nich odczytując liczbę możliwości ze wzorcowej tabeli.

Tabela. Dane

w_1/w_2	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$\{13, 14, 15, 16, 17\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	15 możliwości	15 możliwości	$15 - 6 = 9$ możliwości
$\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	15 możliwości	15 możliwości	$15 - 6 = 9$ możliwości
$\{13, 14, 15, 16, 17\}$	$15 - 6 = 9$ możliwości	$15 - 6 = 9$ możliwości	4 możliwości

Mamy więc:

- 4 przypadki, które dają 15 wyników z iloczynem liczb podzielnych przez 6,
- 4 przypadki, które dają 9 wyników z iloczynem liczb podzielnych przez 6,
- oraz 1 przypadek, który daje 4 wyniki z iloczynem liczb podzielnych przez 6.

Łącznie otrzymujemy $4 \bullet 15 + 4 \bullet 9 + 1 \bullet 4 = 60 + 36 + 4 = 100$ wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6.

Uwaga. Można też było rozbudować zbiorczą tabelę do postaci.

Tabela. Dane

w_1/w_2	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$\{13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	15 możliwości	15 możliwości	15 możliwości
$\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	15 możliwości	15 możliwości	15 możliwości
$\{13, 14, 15, 16, 17, 18\}$	15 możliwości	15 możliwości	15 możliwości

Zauważmy, że wśród wszystkich wyznaczonych w niej $9 \bullet 15 = 135$ możliwości niepotrzebne nam są wszystkie te, w których przynajmniej raz wylosowano liczbę 18. Tych niepotrzebnych przypadków jest $18 + 18 - 1 = 35$, a więc jest $135 - 35 = 100$ wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6.

- sposób II

Podzielimy wyniki pojedynczego losowania na przypadki ze względu na to, jaką resztę z dzielenia przez 6 daje wylosowana liczba, przy czym grupujemy je jak poniżej:

Tabela. Dane

wynik pojedynczego losowania $\{1, 2, 3, \dots, 16, 17\}$	wyniki podzielne przez 6 $\{6, 12\}$	wyniki podzielne przez 3 i niepodzielne przez 6 $\{3, 9, 15\}$	wyniki podzielne przez 2 i niepodzielne przez 6 $\{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$	pozostałe $\{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$
17 możliwości	2 możliwości	3 możliwości	6 możliwości	6 możliwości

Obliczamy, odwołując się do tych przypadków:

- jeżeli za pierwszym razem wylosujemy jedną z liczb: 6 lub 12, to liczba wylosowana za drugim razem jest dowolna, co daje łącznie $2 \bullet 17 = 34$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wylosujemy jedną z liczb: 3, 9 lub 15, to za drugim razem musimy wylosować liczbę parzystą, co daje łącznie $3 \bullet (2 + 6) = 24$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wylosujemy jedną z liczb: 2, 4, 8, 10, 14 lub 16, to za drugim razem musimy wylosować liczbę podzielną przez 3, co daje łącznie $6(2 + 3) = 30$ możliwości,
- jeżeli za pierwszym razem wylosujemy jedną z liczb: 1, 5, 7, 11, 13 lub 17, to za drugim razem musimy wylosować liczbę podzielną przez 6, co daje łącznie $6 \bullet 2 = 12$ możliwości.

Łącznie otrzymujemy $2 \bullet 17 + 3 \bullet 8 + 6 \bullet 5 + 6 \bullet 2 = 34 + 24 + 30 + 12 = 100$ wyników, dla których iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6.

Przykład 9

Obliczymy, ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie:

1. cyfra jedności jest parzysta.

W zapisie każdej z takich liczb na miejscu cyfry tysięcy może wystąpić dowolna cyfra różna od zera (9 możliwości), na miejscu cyfry setek – dowolna cyfra (10 możliwości), na miejscu cyfry dziesiątek – dowolna cyfra (10 możliwości), a na miejscu cyfry jedności musi wystąpić jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6 lub 8 (5 możliwości). Do obliczenia wszystkich możliwości stosujemy regułę mnożenia:

$$9 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 5 = 4500.$$

Uwaga. Czterocyfrowa liczba naturalna ma na miejscu cyfry jedności cyfrę parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy jest liczbą parzystą. Ponieważ czterocyfrowych liczb parzystych jest $\frac{1}{2} \cdot 9000 = 4500$, więc dokładnie tyle jest czterocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie cyfra jedności jest parzysta.

2. cyfra tysięcy jest parzysta.

W zapisie każdej z takich liczb na miejscu cyfry tysięcy może wystąpić jedna z cyfr: 2, 4, 6 lub 8 (4 możliwości), a na każdym z miejsc: cyfry setek, cyfry dziesiątek oraz cyfry jedności należy wstawić dowolnie wybraną cyfrę (za każdym razem mamy 10 możliwości).

Do obliczenia wszystkich możliwości stosujemy regułę mnożenia:

$$4 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 = 4000.$$

3. dokładnie jedna cyfra jest parzysta.

Rozpatrujemy przypadki:

- parzysta jest jedynie cyfra tysięcy:
wtedy na miejscu cyfry tysięcy musi wystąpić jedna z cyfr: 2, 4, 6 lub 8 (4 możliwości), a na każdym z pozostałych miejsc musi wystąpić cyfra nieparzysta (za każdym razem mamy 5

możliwości).

Zatem wszystkich możliwości jest $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$,

- parzysta jest jedynie cyfra setek:

wtedy na miejscu cyfry setek musi wystąpić cyfra parzysta (5 możliwości), a na każdym z pozostałych miejsc musi wystąpić cyfra nieparzysta (za każdym razem mamy 5 możliwości).

Oznacza to, że wszystkich możliwości jest $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$,

- parzysta jest jedynie cyfra dziesiątek:

wtedy na miejscu cyfry dziesiątek musi wystąpić cyfra parzysta (5 możliwości), a na każdym z pozostałych miejsc musi wystąpić cyfra nieparzysta (za każdym razem mamy 5 możliwości).

Oznacza to, że wszystkich możliwości jest $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$,

- parzysta jest jedynie cyfra jedności:

wtedy na miejscu cyfry jedności musi wystąpić cyfra parzysta (5 możliwości), a na każdym z pozostałych miejsc musi wystąpić cyfra nieparzysta (za każdym razem mamy 5 możliwości).

Oznacza to, że wszystkich możliwości jest $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

Ostatecznie stwierdzamy, że jest $500 + 3 \cdot 625 = 2375$ czterocyfrowych liczb naturalnych, w których dokładnie jedna cyfra jest parzysta.

1. cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry setek.

W zapisie każdej z szukanych liczb na miejscu cyfry tysięcy może wystąpić dowolna cyfra różna od zera (9 możliwości), a na miejscu cyfr jedności – dowolna cyfra (10 możliwości). Ponieważ cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry setek, więc na miejscu cyfry dziesiątek może wystąpić jedna z cyfr: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 i wtedy na miejscu cyfry setek wystąpi cyfra odpowiednio 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, tzn. możliwych jest 8 liczb dwucyfrowych utworzonych przez cyfrę setek i cyfrę dziesiątek: 97, 86, 75, 64, 53, 42, 31, 20.

Wynika z tego, że jest $9 \cdot 10 \cdot 8 = 720$ liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry setek.

Przykład 10

Obliczymy, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje 0, jest dokładnie jedna cyfra 4 i dokładnie jedna cyfra nieparzysta.

Szkic rozwiązania.

Podzielimy zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ jak poniżej, zgodnie z warunkami podanymi w zadaniu.

Tabela. Dane

cyfry do wyboru	cyfra 4	cyfry nieparzyste (np)	pozostałe cyfry
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$\{4\}$	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	$\{2, 6, 8\}$
9 elementów	1 element	5 elementów	3 elementy

Najpierw wybierzemy dwa miejsca, na których ustawimy odpowiednio: cyfrę 4 oraz cyfrę nieparzystą.

Możliwe wybory opiszemy, wskazując miejsce w czteroelementowym ciągu, zgodne z przyporządkowaniem do odpowiedniego rzędu. Wybory te ilustruje poniższa tabelka.

Tabela. Dane

Miejsce dla cyfry 4/ miejsce dla cyfry nieparzystej	rząd tysięcy	rząd setek	rząd dziesiątek	rząd jedności
rząd tysięcy		(np , 4 , _ , _)	(np , _ , 4 , _)	(np , _ , _ , 4)
rząd setek	(4 , np , _ , _)		(_ , np , 4 , _)	(_ , np , _ , 4)
rząd dziesiątek	(4 , _ , np , _)	(_ , 4 , np , _)		(_ , _ , np , 4)
rząd jedności	(4 , _ , _ , np)	(_ , 4 , _ , np)	(_ , _ , 4 , np)	

Takich możliwości jest więc $4 \bullet 3$, bo wybieramy te dwa miejsca bez powtórzeń (nie jest, oczywiście, możliwe, żeby na tym samym miejscu zapisana była cyfra 4 i jednocześnie cyfra nieparzysta).

W każdym z tych 12 przypadków pozostaje nam wstawić konkretne cyfry w trzy miejsca (cyfra 4 swoje miejsce już zajęła):

- jedno dla cyfry nieparzystej – jest 5 takich możliwości,
- dwa pozostałe miejsca; w każde z nich musimy wstawić cyfrę parzystą ze zbioru $\{2, 6, 8\}$ – jest $3 \bullet 3 = 9$ takich możliwości.

Zatem w sumie mamy $3 \bullet 4 = 12$ rozłącznych przypadków wyboru miejsc dla cyfr wyróżnionych w treści zadania (jak w tabelce), a w każdym z nich mamy $5 \bullet 3 \bullet 3$ możliwości wstawienia odpowiednich cyfr.

Korzystając z reguły mnożenia, ostatecznie otrzymujemy

$$(3 \bullet 4) \bullet (5 \bullet 3 \bullet 3) = 12 \cdot 45 = 540$$

liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje 0, jest dokładnie jedna cyfra 4 i dokładnie jedna cyfra nieparzysta.

Uwaga. Powyższe zliczanie możemy też rozłożyć na trzy etapy:

- (1) wybór miejsca dla cyfry 4 i zapisanie tej cyfry (4 możliwości),
- (2) wybór miejsca dla cyfry nieparzystej i zapisanie tej cyfry ($3 \bullet 5$ możliwości),
- (3) zapisanie cyfr na pozostałych dwóch miejsc ($3 \bullet 3$ możliwości).

Ponieważ wyborów tych dokonujemy niezależnie, to korzystając z reguły mnożenia, obliczamy, że szukanych liczb jest

$$4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 540$$

Zliczając w poprzednim przykładzie wszystkie możliwości wyboru miejsc, na których należało ustawić cyfrę 4 oraz cyfrę nieparzystą, opisywaliśmy wybór dwóch miejsc z czterech dostępnych, bez powtórzeń.

W kolejnych przykładach zajmiemy się obliczaniem wszystkich możliwych wyborów dokonywanych w pewnych sytuacjach, przy czym za każdym razem bez powtórzeń.

Przykład 11

Obliczymy, ile jest:

1. liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach, w których nie występuje cyfra 0.

Zliczanie rozkładamy na dwa etapy:

- (1) zapisanie cyfry dziesiątek (9 możliwości),
- (2) zapisanie cyfry jedności, różnej od cyfry dziesiątek (8 możliwości).

Zatem szukanych liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach, w których nie występuje cyfra 0, jest $9 \cdot 8 = 72$. Wybory i wszystkie utworzone w ich wyniku liczby można przedstawić w tabeli.

Tabela. Dane

c_1/c_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		12	13	14	15	16	17	18	19
2	21		23	24	25	26	27	28	29
3	31	32		34	35	36	37	38	39
4	41	42	43		45	46	47	48	49
5	51	52	53	54		56	57	58	59
6	61	62	63	64	65		67	68	69
7	71	72	73	74	75	76		78	79
8	81	82	83	84	85	86	87		89
9	91	92	93	94	95	96	97	98	

2. liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, w których nie występuje ani cyfra 0, ani cyfra 5.

Zliczanie rozkładamy na trzy etapy:

- (1) zapisanie cyfry setek (8 możliwości),
- (2) zapisanie cyfry dziesiątek, różnej od cyfry setek (7 możliwości),
- (3) zapisanie cyfry jedności, różnej od cyfry setek i od cyfry dziesiątek (6 możliwości).

Zatem szukanych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, w których nie występuje ani cyfra 0, ani cyfra 5, jest

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

3. liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, w zapisie których nie występuje żadna z cyfr: 0, 2, 4.

Zliczanie rozkładamy na cztery etapy:

- (1) zapisanie cyfry tysięcy (7 możliwości),
- (2) zapisanie cyfry setek, różnej od cyfry tysięcy (6 możliwości),
- (3) zapisanie cyfry dziesiątek, różnej od cyfry tysięcy i od cyfry setek (5 możliwości),
- (4) zapisanie cyfry jedności, różnej od każdej z trzech cyfr zapisanych wcześniej (4 możliwości),

Zatem szukanych liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, w zapisie których nie występuje żadna z cyfr: 0, 2, 4, jest

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

4. liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach, w zapisie których występują wyłącznie cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Zliczanie rozkładamy na pięć etapów:

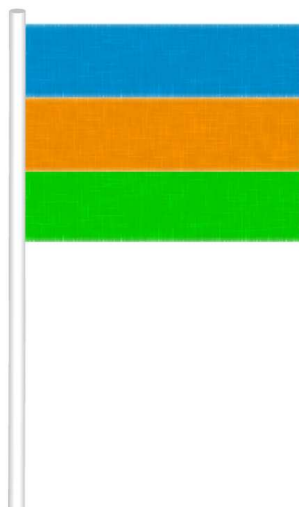
- (1) zapisanie cyfry dziesiątek tysięcy (7 możliwości),
- (2) zapisanie cyfry tysięcy, różnej od cyfry dziesiątek tysięcy (6 możliwości),
- (3) zapisanie cyfry setek, różnej od cyfr: tysięcy oraz dziesiątek tysięcy (5 możliwości),
- (4) zapisanie cyfry dziesiątek, różnej od każdej z trzech cyfr zapisanych wcześniej (4 możliwości),
- (5) zapisanie cyfry jedności, różnej od każdej z czterech cyfr zapisanych wcześniej (3 możliwości).

Zatem szukanych liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach, w zapisie których występują wyłącznie cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, jest

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$$

Przykład 12

Flagę, taką jak pokazana na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowych pasów kolorowej tkaniny. Kolory pasów górnego, środkowego i dolnego mają być parami różne. Obliczemy, ile takich różnych flag można utworzyć, mając do dyspozycji tkaniny w sześciu różnych kolorach.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zliczanie liczby flag rozkładamy na trzy etapy:

- (1) wybór koloru dla górnego pasa (6 możliwości),
- (2) wybór koloru dla środkowego pasa (5 możliwości),
- (3) wybór koloru dla dolnego pasa (4 możliwości).

Zatem liczba wszystkich możliwych takich flag jest równa

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Wariacje bez powtórzeń

W ostatnich przykładach mieliśmy do czynienia z doświadczeniami polegającymi na wyborze kolejno pewnej liczby elementów z ustalonego zbioru, przy czym wybierane elementy nie mogły się powtarzać. Załóżmy, że mamy do czynienia z doświadczeniem polegającym na wyborze kolejno k elementów ze zbioru n -elementowego, bez powtórzeń (k jest liczbą całkowitą spełniającą układ nierówności $1 \leq k \leq n$).

Rozumując podobnie jak w tych przykładach, rozłożmy doświadczenie na k etapów. Wtedy w kolejnych etapach od pierwszego do ostatniego (o numerze k) liczby możliwości będą równe odpowiednio n , $n - 1$, $n - 2$ aż do $n - (k - 1)$. Stosując regułę mnożenia, stwierdzamy, że wszystkich możliwych wyników takiego doświadczenia jest

$$\underbrace{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}_{k \text{ czynników}}$$

Doświadczenie polegające na wyborze kolejno k -elementów ze zbioru n -elementowego, bez powtórzeń, gdzie k jest liczbą całkowitą spełniającą warunek $1 \leq k \leq n$, nazywa się zwyczajowo **k -wyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru n -elementowego**.

Modelem dla tego typu doświadczenia jest k -wyrazowy ciąg o elementach wybranych ze zbioru n -elementowego bez powtórzeń.

Na podstawie spostrzeżenia poczynionego powyżej formułujemy twierdzenie.

Własność: liczba k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego

Liczba wszystkich k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest równa

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{\text{czynników}}$$

Ważne!

Uwaga. Iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

nazywa się silnią liczby n i oznacza się symbolem $n!$, co czytamy „ n silnia”.

Zauważmy, że jeśli liczbę

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{\text{czynników}}$$

pomnożymy i jednocześnie podzielimy przez iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do $n-k$, czyli przez liczbę $(n-k)!$, to stwierdzimy, że liczba wszystkich k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest równa

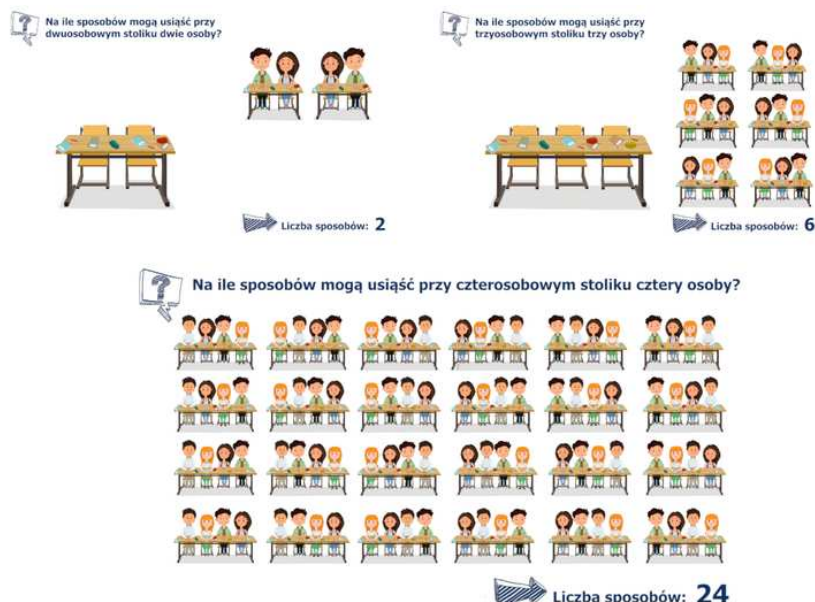
$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Przykład 13

Korzystając z twierdzenia o liczbie wszystkich wariacji bez powtórzeń, obliczymy, że

1. liczba wszystkich sposobów, na jakie Jaś i Małgosia mogą usiąść na dwóch spośród siedmiu wolnych miejsc w kinie, jest równa $7 \cdot 6 = 42$, co można też zapisać jako $\frac{7!}{5!}$.
2. liczba wszystkich możliwych trzyliterowych napisów o różnych literach wybranych ze zbioru $\{a, e, j, k, m\}$ jest równa $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Tę liczbę można też zapisać jako $\frac{5!}{2!}$.
3. liczba wszystkich możliwych sposobów rozmieszczenia 4 różnych kul w 6 różnych pudełkach tak, żeby w każdym pudełku znalazła się co najwyżej jedna kula, jest równa $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$, co można też zapisać jako $\frac{6!}{2!}$.
4. liczba wszystkich możliwych wyborów 3 osób: przewodniczącego, zastępcy i skarbnika do samorządu 32-osobowej klasy to $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$. Otrzymany wynik można też zapisać w postaci $\frac{32!}{29!}$.
5. liczba wszystkich możliwych sposobów wylosowania kolejno 5 kart (jedna po drugiej) z brydżowej talii 52 kart to $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311875200$. Otrzymany wynik można też zapisać jako $\frac{52!}{47!}$.
6. liczba wszystkich możliwych sposobów, na które grupa 6 dziewczynek może zająć miejsca w sześciuosobowym rzędzie, to $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Ten wynik można też zapisać w postaci $6!$.
7. liczba wszystkich możliwych napisów otrzymanych z przestawiania liter wyrazu „płot” to $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Otrzymany wynik można też zapisać jako $4!$.

Permutacje



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

W poprzednim przykładzie

- w podpunkcie f) rozpatrywaliśmy sześciowyrazową wariację bez powtórzeń zbioru sześcieelementowego,
- w podpunkcie g) rozpatrywaliśmy czterowyrazową wariację bez powtórzeń zbioru czteroelementowego.

W przypadku $k = n$ wariację bez powtórzeń nazywamy **permutacją zbioru n -elementowego**.

Zatem **permutacją zbioru n -elementowego** nazywamy każdy ciąg utworzony ze wszystkich wyrazów tego zbioru, a liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest równa

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!.$$

Przykład 14

Obliczymy, ile jest wszystkich takich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w których zapisie

1. cyfra 1 zapisana jest na pierwszym miejscu od lewej.
Zapisujemy cyfrę 1 na pierwszym miejscu od lewej. Pozostaje nam rozmieścić pozostałe 4 cyfry na 4 miejscach, co można zrobić na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby. Oznacza to, że są 24 takie liczby.
 2. między cyframi 1 oraz 2 zapisane są trzy inne cyfry.
Z treści zadania wynika, że cyfry 1 oraz 2 muszą zająć dwa skrajne miejsca, a pozostałe trzy cyfry trzeba wpisać na trzech miejscach między nimi. Wobec tego cyfry 1 i 2 zapiszemy na dwa sposoby, a w każdym z tych przypadków cyfry 3, 4, 5 zapiszemy na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sposobów. Zatem wszystkich takich liczb jest $2 \cdot 6 = 12$.
 3. cyfry 1 oraz 2 nie są zapisane obok siebie.
- sposób I

Zliczanie rozkładamy na trzy etapy:

- wybór miejsca dla cyfry 1 i zapisanie tej cyfry,
- wybór miejsca dla cyfry 2 i zapisanie tej cyfry,
- zapisanie pozostałych trzech cyfr.

Mamy dwa istotnie różne przypadki:

- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na jednym z dwóch skrajnych miejsc, to cyfrę 2 będziemy mogli zapisać na jednym z trzech miejsc, a wtedy pozostałe trzy cyfry rozmieszczamy na trzech dostępnych miejscach na $3!$ sposobów. W tym przypadku mamy więc $2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$ sposobów zapisu takich liczb.
- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na miejscu drugim, trzecim lub czwartym, to cyfrę 2 będziemy mogli zapisać na jednym z dwóch miejsc, a wtedy pozostałe trzy cyfry rozmieszczamy na trzech dostępnych miejscach na $3!$ sposobów. W tym przypadku mamy więc $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ sposobów zapisu takich liczb.

Wobec tego wszystkich takich liczb jest $36 + 36 = 72$.

• sposób II

Zauważamy, że wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. W zapisie każdej z tych liczb cyfry 1, 2 są zapisane obok siebie albo nie są zapisane obok siebie. Dla ustalenia, ile jest liczb w drugim przypadku, wystarczy więc obliczyć, ile jest takich liczb, w których cyfry 1, 2 są zapisane obok siebie.

Zliczanie rozkładamy na dwa etapy:

- wybór dwóch miejsc dla cyfr 1, 2 oraz zapisanie tych cyfr,
- zapisanie pozostałych trzech cyfr.

Mamy cztery możliwości wyboru sąsiednich miejsc dla cyfr 1, 2: pierwsze i drugie lub drugie i trzecie, lub trzecie i czwarte, lub czwarte i piąte. W każdym z tych czterech przypadków cyfry 1, 2 możemy zapisać na wybranych miejscach na dwa sposoby. W drugim etapie zapisujemy pozostałe trzy cyfry na trzech dostępnych miejscach, co można zrobić na $3!$ sposobów. Oznacza to, że wszystkich takich liczb pięciocyfrowych, w których cyfry 1, 2 są zapisane obok siebie, jest $4 \cdot 2 \cdot 3! = 48$. Stąd wszystkich takich liczb pięciocyfrowych, w których cyfry 1, 2 nie są zapisane obok siebie, jest $120 - 48 = 72$.

Uwaga. Zliczanie wszystkich możliwych liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w których cyfry 1, 2 są zapisane obok siebie, można przeprowadzić w następujący sposób:

Dwie sąsiadujące cyfry 1, 2 zapisujemy jako jeden nowy obiekt, który oznaczamy jako np. x .

Następnie obliczamy liczbę możliwych rozmieszczeń 4 elementów: bloku x oraz cyfr 3, 4, 5 – takich rozmieszczeń jest $4! = 24$. W każdym z nich trzeba jeszcze zamienić x na zapisane obok siebie cyfry 1, 2, co można zrobić na 2 sposoby. Ostatecznie stwierdzamy, że wszystkich możliwych liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w których cyfry 1, 2 są zapisane obok siebie, jest $2 \cdot 24 = 48$.

1. cyfra 1 jest zapisana przed cyfrą 2 (patrząc od lewej).

• sposób I

Numerujemy od lewej miejsca, na których można zapisać cyfry takiej liczby pięciocyfrowej:

(1), (2), (3), (4), (5).

Zliczanie rozkładamy na dwa etapy:

- wybór miejsc dla cyfr 1, 2 oraz zapisanie tych cyfr,
- zapisanie pozostałych trzech cyfr.

Ponieważ numer miejsca dla cyfry 1 musi być mniejszy od numeru miejsca dla cyfry 2, więc:

- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na miejscu (1), to dla cyfry 2 zostają do wyboru 4 miejsca,
- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na miejscu (2), to dla cyfry 2 zostają do wyboru 3 miejsca,
- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na miejscu (3), to dla cyfry 2 zostają do wyboru 2 miejsca,
- jeżeli cyfrę 1 zapiszemy na miejscu (4), to dla cyfry 2 zostaje do wyboru 1 miejsce,
- cyfry 1 nie można zapisać na miejscu (5).

Oznacza to, że jest dokładnie $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ możliwości wyboru miejsc i zapisania cyfr 1, 2. W każdym z tych przypadków pozostaje nam zapisać cyfry 3, 4, 5 na pozostałych trzech miejscach, co można zrobić na $3! = 6$ sposobów. Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach, zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w których cyfra 1 jest zapisana przed cyfrą 2 (patrzac od lewej) jest $10 \cdot 6 = 60$.

- sposób II

Rozbijemy zbiór liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 na dwa podzbiory:

A – tych liczb, w których cyfra 1 jest zapisana przed cyfrą 2,

B – tych liczb, w których cyfra 2 jest zapisana przed cyfrą 1.

Ponieważ:

- zbiory te są rozłączne, więc $|A \cup B| = |A| + |B|$,
- wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5 jest $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, więc $|A \cup B| = |A| + |B| = 120$.

Zauważmy, że:

- wybierając dowolną liczbę ze zbioru A i zamieniając w jej zapisie miejscami cyfry 1, 2, otrzymamy pewną (dokładnie jedną) liczbę ze zbioru B ,
- wybierając dowolną liczbę ze zbioru B i zamieniając w jej zapisie miejscami cyfry 1, 2, otrzymamy pewną (dokładnie jedną) liczbę ze zbioru A .

Wobec tego zbiory A i B są równoliczne, co oznacza, że $|A| = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60$.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w których cyfra 1 jest zapisana przed cyfrą 2 (patrzac od lewej), jest $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$.

Ćwiczenie 1

W karcie dań jest 6 zup i 7 drugich dań. Na ile sposobów można zamówić obiad składający się z jednej zupy i jednego drugiego dania?

☐ 42

☐ 13

☐ 49

☐ 36

Ćwiczenie 2

Wybieramy liczbę a ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz liczbę b ze zbioru $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Ile jest takich par (a, b) , że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą nieparzystą?

☐ 6

☐ 10

☐ 5

☐ 9

Ćwiczenie 3

Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, w których jedynie cyfra setek jest nieparzysta, a cyfra dziesiątek i cyfra jedności są równe?

☐ 125

☐ 500

☐ 25

☐ 15

Ćwiczenie 4

Liczba wszystkich możliwych wyników trzykrotnego rzutu monetą jest równa

☐ 9

☐ 3

☐ 6

☐ 8

Ćwiczenie 5

Ile dodatnich dzielników całkowitych ma liczba $2^4 \cdot 5^3$?

☐ 9

☐ 7

☐ 12

☐ 20

Ćwiczenie 6

Liczba wszystkich sposobów, na jakie Adaś, Basia i Celinka mogą usiąść na trzech spośród pięciu wolnych miejsc w kinie, jest równa

☐ 15

☐ 60

☐ 12

☐ 45

Ćwiczenie 7

Suma wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3 (cyfry mogą się powtarzać) jest równa

☐ 66

☐ 132

☐ 396

☐ 198

Ćwiczenie 8

Siedmioosobowa grupa, czworo dorosłych i troje dzieci, wykupiła bilety na ten sam seans do kina, przy czym wybrali miejsca od 10 do 16 w dwudziestym rzędzie. Liczba wszystkich sposobów, na jakie mogą oni zająć miejsca tak, aby każde z dzieci siedziało pomiędzy dorosłymi, jest równa

☐ 12

☐ 144

☐ 7

☐ 30

Ćwiczenie 9

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Ile jest wszystkich takich wyników tego losowania, że pierwsza wylosowana liczba jest podzielna przez 3 i druga wylosowana liczba jest parzysta?

Ćwiczenie 10

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, wiedząc, że:

1. cyfry mogą się powtarzać.
2. cyfry są różne

Ćwiczenie 11

W każdym z dwóch różnych pojemników znajdują się trzy kule, z których jedna jest biała, druga – czarna, a trzecia - zielona. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego losowania, w których uzyskamy:

1. kule różnych kolorów?
2. co najmniej jedną kulę białą?

Ćwiczenie 12

Oblicz, na ile sposobów Ewa i Ola mogą zająć miejsca w kinie, jeżeli wybierają spośród

1. 8 wolnych miejsc.
2. 12 wolnych miejsc.

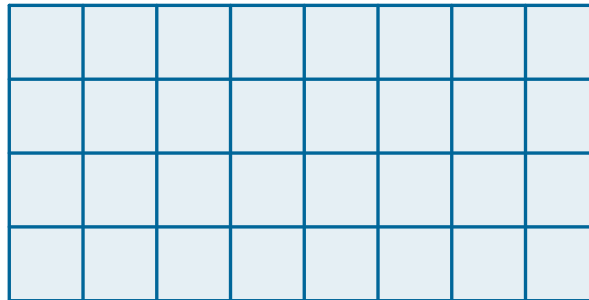
Ćwiczenie 13

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, wiedząc, że:

1. cyfry mogą się powtarzać,
2. cyfry są różne.

Ćwiczenie 14

Rozpatrujemy wszystkie prostokąty, których boki zawierają się w liniach siatki dzielącej prostokąt o wymiarach 4 i 8 na kwadraty jednostkowe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz, ile jest wśród nich

1. wszystkich kwadratów o boku 1.
2. wszystkich kwadratów o boku 2.
3. wszystkich kwadratów o boku 3.
4. wszystkich kwadratów o boku 4.

Ćwiczenie 15

Oblicz, ile dzielników naturalnych ma liczba:

1. $2^5 \cdot 11^4$
2. $3^6 \cdot 17^3$
3. 3969
4. 4000

Ćwiczenie 16

Wybieramy liczbę a ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ oraz liczbę b ze zbioru $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ile jest takich par (a, b) , że:

1. suma $a + b$ jest liczbą parzystą?
2. iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą?

Ćwiczenie 17

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Ile jest wszystkich takich wyników tego losowania, że pierwsza z wylosowanych liczb jest większa od drugiej i różnica między nimi jest mniejsza niż 3?

Ćwiczenie 18

Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Ile jest wszystkich takich wyników tego doświadczenia, że

1. największa wyrzucona liczba oczek nie jest większa od 4?
2. największa wyrzucona liczba oczek jest równa 4?

Ćwiczenie 19

Z pojemnika, w którym jest 10 losów: trzy wygrywające i siedem pustych, losujemy dwa razy po jednym losie, bez zwracania. Oblicz, na ile sposobów możemy wylosować:

1. dwa losy wygrywające
2. dokładnie jeden los wygrywający
3. co najmniej jeden los wygrywający

Ćwiczenie 20

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Załóżmy, że liczba wylosowana za pierwszym razem to x , a za drugim – y . Ile jest wszystkich takich wyników tego losowania, że $|y - x| < 2$?

Ćwiczenie 21

Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz, ile jest wszystkich wyników tego doświadczenia, takich że

1. co najmniej raz wypadła liczba oczek równa 5 i suma liczb wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3.
2. co najmniej raz wypadła liczba oczek równa 5 lub suma liczb wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3

Ćwiczenie 22

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Ile jest wszystkich wyników tego losowania, takich że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6?

Ćwiczenie 23

Oblicz sumę S wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr

1. 1, 2, 3 (cyfry mogą się powtarzać).
2. 1, 2, 3, 4, 5, 6 (cyfry mogą się powtarzać).
3. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (cyfry mogą się powtarzać).
4. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (cyfry mogą się powtarzać).

Ćwiczenie 24

W pudełku jest 17 kul, ponumerowanych od 1 do 17. Z tego pudełka losujemy dwa razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz, ile jest wszystkich takich wyników tego doświadczenia, że:

1. suma wylosowanych liczb jest parzysta.
2. iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.
3. iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6.

Ćwiczenie 25

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych:

1. trzycyfrowych o różnych cyfrach, zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2. czterocyfrowych, zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 4, 8, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać.
3. pięciocyfrowych, zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3.

Ćwiczenie 26

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 0, 1, 2, 3, 4, wiedząc, że:

1. cyfry mogą się powtarzać
2. cyfry muszą być różne

Ćwiczenie 27

Oblicz, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy:

1. 6

2. 9

3. 10

4. 12

Ćwiczenie 28

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, w których

1. cyfra jedności jest o 4 mniejsza od cyfry dziesiątek.

2. cyfra setek jest o 2 większa od cyfry jedności.

3. cyfry dziesiątek i setek są równe.

Ćwiczenie 29

Oblicz, ile jest wszystkich nieparzystych liczb pięciocyfrowych, których suma cyfr jest równa 4.

Ćwiczenie 30

Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne sześciocyfrowe, które można zapisać przy użyciu cyfr 2, 3, 4. Ile jest wśród nich takich liczb, których:

1. tylko pierwsza i ostatnia cyfra są nieparzyste?

2. każde dwie sąsiednie cyfry różnią się o 2?

3. każde dwie sąsiednie cyfry różnią się o 1?

Ćwiczenie 31

Oblicz, ile dzielników naturalnych ma liczba

1. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

2. $5^4 \cdot 11^2 \cdot 19^3 \cdot 3$

3. 1620

4. 6468

Ćwiczenie 32

Mamy do dyspozycji trzy pudełka: białe, czarne i żółte. W białym jest 7 kul, ponumerowanych od 1 do 7, w czarnym jest 5 kul, ponumerowanych od 1 do 5, a w żółtym są 4 kule, ponumerowane od 1 do 4. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę. Ile jest wszystkich możliwości wylosowania w ten sposób trójki liczb, których iloczyn jest podzielny przez 5?

Ćwiczenie 33

Rozpatrzmy trzykrotny rzut sześcienną kostką do gry. Oblicz, ile jest wszystkich takich wyników tego doświadczenia, że

1. w każdym rzucie otrzymamy inną liczbę oczek
2. otrzymamy parzysty iloczyn liczb wyrzuconych oczek
3. dokładnie raz wypadnie liczba oczek podzielna przez 3

Ćwiczenie 34

Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych o różnych cyfrach, które są większe od 642 i dzielą się przez 5?

Ćwiczenie 35

Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje 0, jest dokładnie jedna cyfra 9 i dokładnie jedna cyfra parzysta.

Ćwiczenie 36

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, w których

1. cyfry 1, 2, 3 oraz 4 stoją obok siebie, zapisane w kolejności rosnącej
2. suma cyfr zapisanych na miejscach pierwszym i ostatnim jest równa 11
3. suma każdych dwóch sąsiednich cyfr jest nieparzysta

Ćwiczenie 37

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych siedmiocyfrowych o różnych cyfrach zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, w których zapisie

1. żadne dwie cyfry nieparzyste nie stoją obok siebie.
2. cyfra 5 jest zapisana przed cyfrą 6 i cyfra 6 jest zapisana przed cyfrą 7.

Ćwiczenie 38

Oblicz sumę S wszystkich liczb naturalnych

1. czterocyfrowych, zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (cyfry mogą się powtarzać).
2. trzycyfrowych, zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (cyfry mogą się powtarzać).

Podzbiory zbioru skończonego (treść podstawowa)

W tym rozdziale zajmiemy się podzbiorami zbioru skończonego.

Podzbiory dwuelementowe zbioru skończonego

Przykład 1

Obliczmy, na ile sposobów można wybrać dwóch graczy spośród 7 zawodników. Oznaczmy zawodników przez $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$.

- sposób I

Wypisujemy wszystkie możliwe do wybrania pary graczy, czyli dwuelementowe podzbiory siedmioelementowego zbioru $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$. Zapisujemy je tak, aby wskaźnik pierwszego wypisanego zawodnika był mniejszy od wskaźnika drugiego z nich (w ten sposób unikniemy powtórzeń). Wtedy

- zawodnika z_1 przypiszemy do sześciu zawodników: $\{z_1, z_2\}, \{z_1, z_3\}, \{z_1, z_4\}, \{z_1, z_5\}, \{z_1, z_6\}, \{z_1, z_7\}$,
- zawodnika z_2 przypiszemy do pięciu zawodników: $\{z_2, z_3\}, \{z_2, z_4\}, \{z_2, z_5\}, \{z_2, z_6\}, \{z_2, z_7\}$,
- zawodnika z_3 przypiszemy do czterech zawodników: $\{z_3, z_4\}, \{z_3, z_5\}, \{z_3, z_6\}, \{z_3, z_7\}$,
- zawodnika z_4 przypiszemy do trzech zawodników: $\{z_4, z_5\}, \{z_4, z_6\}, \{z_4, z_7\}$,
- zawodnika z_5 przypiszemy do dwóch zawodników: $\{z_5, z_6\}, \{z_5, z_7\}$,
- zawodnika z_6 przypiszemy do jednego zawodnika: $\{z_6, z_7\}$.

Zatem wszystkich możliwych par jest $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

- sposób II

Wypiszmy pary zawodników, stosując metodę tabeli. Odrzucamy pola, które nie opisują takiej pary.

Tabela. Dane

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
z_1		$\{z_1, z_2\}$	$\{z_1, z_3\}$	$\{z_1, z_4\}$	$\{z_1, z_5\}$	$\{z_1, z_6\}$	$\{z_1, z_7\}$
z_2	$\{z_1, z_2\}$		$\{z_2, z_3\}$	$\{z_2, z_4\}$	$\{z_2, z_5\}$	$\{z_2, z_6\}$	$\{z_2, z_7\}$
z_3	$\{z_1, z_3\}$	$\{z_2, z_3\}$		$\{z_3, z_4\}$	$\{z_3, z_5\}$	$\{z_3, z_6\}$	$\{z_3, z_7\}$
z_4	$\{z_1, z_4\}$	$\{z_2, z_4\}$	$\{z_3, z_4\}$		$\{z_4, z_5\}$	$\{z_4, z_6\}$	$\{z_4, z_7\}$
z_5	$\{z_1, z_5\}$	$\{z_2, z_5\}$	$\{z_3, z_5\}$	$\{z_4, z_5\}$		$\{z_5, z_6\}$	$\{z_5, z_7\}$
z_6	$\{z_1, z_6\}$	$\{z_2, z_6\}$	$\{z_3, z_6\}$	$\{z_4, z_6\}$	$\{z_5, z_6\}$		$\{z_6, z_7\}$
z_7	$\{z_1, z_7\}$	$\{z_2, z_7\}$	$\{z_3, z_7\}$	$\{z_4, z_7\}$	$\{z_5, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	

W tabeli mamy więc wypełnione $6 \cdot 7 = 42$ pola. Zauważmy, że każda para została tu wypisana dokładnie dwa razy. Oznacza to, że wszystkich par jest $\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

- sposób III

Oznaczmy przez x liczbę wszystkich możliwych par graczy. Liczbę wszystkich możliwych uporządkowanych par graczy możemy obliczyć następującymi dwoma sposobami.

- Do każdego z siedmiu zawodników dobieramy drugiego do pary na 6 sposobów. W ten sposób otrzymaliśmy $6 \cdot 7$ par uporządkowanych.
- W każdej z x par graczy możemy na dwa sposoby ustalić kolejność, co daje $2x$ wszystkich uporządkowanych par graczy.

Otrzymujemy więc równość

$$2x = 6 \cdot 7$$

stąd

$$x = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

Uwaga. Wykorzystując podobne rozumowanie, pokażemy, że liczba wszystkich dwuelementowych podzbiorów, które można wybrać ze zbioru $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, liczącego n elementów jest równa

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Jeśli przez x oznaczymy liczbę wszystkich możliwych podzbiorów dwuelementowych zbioru A , to liczba wszystkich możliwych uporządkowanych par elementów tego zbioru jest z jednej strony równa

$$n \cdot (n-1)$$

bo do każdego z n elementów drugi do pary możemy dobrać na $n-1$ sposobów, a z drugiej strony – jest równa

$$2x$$

bo w każdym z x dwuelementowych podzbiorów zbioru A możemy na dwa sposoby ustalić kolejność elementów. Otrzymujemy więc równość

$$2x = n \cdot (n-1)$$

stąd

$$x = \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Przykład 2

Korzystając ze wzoru na liczbę dwuelementowych podzbiorów zbioru n -elementowego, obliczymy, że:

- dwóch graczy spośród 11 zawodników można wybrać na $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ sposobów,
- liczba wszystkich meczów w turnieju, do którego zgłosiło się 9 drużyn i każda drużyna ma rozegrać z każdą inną dokładnie jeden mecz, jest równa $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$,
- dwuosobową delegację z klasy liczącej 25 uczniów można wybrać na $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ sposobów.

Przykład 3

1. Obliczymy, ile przekątnych ma jedenastokąt wypukły.

Rozpatrzmy wszystkie możliwe odcinki, które powstały z połączenia par wierzchołków jedenastokąta wypukłego. Jest ich łącznie

$\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$. Każdy z tych odcinków jest albo bokiem tego jedenastokąta, albo jego przekątną. Ponieważ boków jest 11, więc przekątnych jest

$$55 - 11 = 44.$$

2. Pokażemy, że liczba wszystkich przekątnych n -kąta wypukłego, jest równa

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Wszystkich możliwych odcinków, które powstały z połączenia par wierzchołków n -kąta wypukłego jest $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Każdy z tych odcinków jest albo przekątną tego wielokąta, albo jego bokiem. Ponieważ boków jest n , więc przekątnych jest

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Przykład 4

Do szkolnego turnieju halowej piłki nożnej zgłosiło się 6 drużyn. Turniej rozegrano systemem „każdy z każdym”, bez rewanżów. W każdym meczu przyznawano punkty według zasady: w przypadku remisu obie drużyny otrzymują po 1 punkcie, a w meczu rozstrzygniętym zwycięzca otrzymuje 3 punkty, a przegrany – 0 punktów. Po zakończeniu turnieju okazało się, że drużyny

uczestniczące w turnieju zdobyły w sumie 37 punktów. Ustalimy, ile meczów podczas tego turnieju zakończyło się wynikiem remisowym.

W turnieju rozgrywanym systemem „każdy z każdym”, bez rewanżów meczów jest tyle, ile wszystkich możliwości dobrania drużyn w pary. W przypadku tego szkolnego turnieju liczba meczów to liczba dwuelementowych podzbiorów zbioru sześćcioelementowego, czyli

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Oznaczmy przez x liczbę meczów remisowych w tym turnieju. Wtedy liczba meczów rozstrzygniętych to $15 - x$.

Ponieważ każdy mecz remisowy wnosił do ogólnej sumy 2 punkty, a mecz rozstrzygnięty – 3 punkty, więc otrzymujemy równanie

$$2x + 3 \cdot (15 - x) = 37$$

Stąd

$$2x + 45 - 3x = 37$$

a więc

$$x = 8$$

Oznacza to, że 8 meczów w tym turnieju zakończyło się wynikiem remisowym.

Przykład 5

Obliczymy, ile jest wszystkich wyników siedmiokrotnego rzutu monetą, w których dokładnie dwa razy wypadł orzeł.

Ponumerujemy rzuty od 1 do 7. Dwa z tych numerów odpowiadają wyrzuceniu orła. Jest $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ możliwości wyboru dwóch numerów z siedmiu, co oznacza, że jest 21 wszystkich wyników siedmiokrotnego rzutu monetą, w których dokładnie dwa razy wypadł orzeł.

Przykład 6

Obliczymy:

1. ile jest trzycyfrowych liczb naturalnych, w których cyfra jedności jest mniejsza od cyfry dziesiątek.

Ponieważ w rzędzie setek takiej liczby trzycyfrowej może być zapisana dowolna cyfra różna od zera, więc możemy ją wybrać na 9 sposobów.

Zauważmy teraz, że jeżeli ze zbioru cyfr $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ wybierzemy dwuelementowy podzbiór, to cyfry w ten sposób wybrane można na jeden sposób zapisać w kolejności malejącej. Zatem każdemu takiemu podzbiоровi można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować liczbę dwucyfrową, której cyfra jedności jest mniejsza od cyfry dziesiątek.

Jeżeli np. wybierzemy podzbiór $\{2, 5\}$, to taką liczbą jest 52, a dla liczby 83 takim podzbiorem jest $\{3, 8\}$.

Oznacza to, że liczb dwucyfrowych, w których cyfra jedności jest mniejsza od cyfry dziesiątek jest dokładnie tyle, ile dwuelementowych podzbiorów dziesięcioelementowego zbioru cyfr $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, czyli

$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Ponieważ kolejnych wyborów dokonujemy niezależnie, więc korzystając z reguły mnożenia, stwierdzamy, że liczb trzycyfrowych, w których cyfra jedności jest mniejsza od cyfry dziesiątek, jest

$$9 \cdot 45 = 405$$

2. ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych, spełniających jednocześnie trzy następujące warunki:

- w zapisie tej liczby nie występuje cyfra 0,
- cyfra setek jest większa od cyfry tysięcy,
- cyfra jedności jest większa od cyfry dziesiątek.

Liczbę czterocyfrową, spełniającą warunki zadania, rozdzielamy na dwie dwucyfrowe, przy czym podział jest między cyfrą setek a cyfrą tysięcy.

Otrzymane liczby dwucyfrowe mają spełniać dwa warunki: w ich zapisie nie występuje cyfra 0, cyfra jedności jest większa od cyfry dziesiątek.

Rozumując podobnie, jak w podpunkcie a), zauważamy, że liczb dwucyfrowych, w których zapisie nie występuje 0 i cyfra jedności jest większa od cyfry dziesiątek, jest dokładnie tyle, ile dwuelementowych podzbiorów dziewięcioelementowego zbioru $\{1, 2, \dots, 9\}$. Oznacza to, że jest ich

$$\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

Wobec tego dwie pierwsze cyfry liczby czterocyfrowej spełniającej warunki zadania można zapisać na 36 sposobów i dwie ostatnie również na 36 sposobów, zatem liczb czterocyfrowych, które spełniają jednocześnie podane trzy warunki, jest

$$36 \cdot 36 = 1296$$

Przykład 7

W klasie jest 34 uczniów, przy czym chłopców jest o 6 więcej niż dziewczynek. Obliczmy, na ile sposobów można wybrać z tej klasy czteroosobową delegację, w której znajdą się dokładnie dwie dziewczynki.

Ponieważ delegacja jest czteroosobowa, więc oprócz dwóch dziewczynek muszą się w niej znaleźć jeszcze dwaj chłopcy.

Obliczamy, że dziewczynek jest w tej klasie 14, a chłopców jest 20.

Parę dziewczynek z tej klasy wybierzemy zatem na $\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ sposobów, a parę chłopców – na $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ sposobów.

Wyborów tych dokonujemy niezależnie, zatem, korzystając z reguły mnożenia, obliczamy, że wszystkich możliwych czteroosobowych delegacji z tej klasy, w której znajdą się dokładnie dwie dziewczynki, jest

$$91 \cdot 190 = 17290.$$

Przykład 8

W pewnej grze losowej zakreślamy 4 liczby wybrane ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 24, 25\}$. Wybrane liczby są następnie porównywane z czterema wylosowanymi z tego samego zbioru przez maszynę losującą. Ile jest możliwości zakreślenia takich 4 liczb, wśród których dokładnie dwie będą trafione?

Z treści zadania wynika, że dwie zakreślone liczby miały być trafione, czyli były w zbiorze 4 wylosowanych, a pozostałe dwie zakreślone były w zbiorze 21 niewylosowanych.

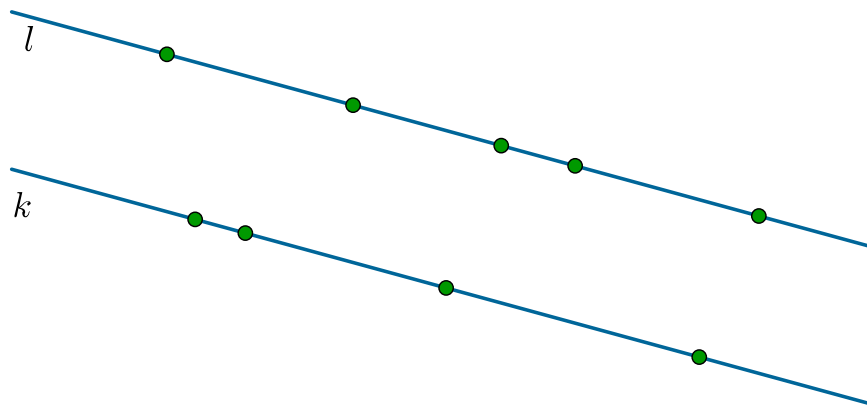
Dwie wylosowane liczby możemy trafić na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ sposobów, a pozostałe dwie możemy wybrać na $\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$ sposobów.

Oznacza to, że wszystkich możliwości zakreślenia takich 4 liczb, wśród których dokładnie dwie będą trafione jest

$$210 \cdot 6 = 1260$$

Przykład 9

Proste k i l są równoległe. Na prostej k zaznaczono 4 punkty, a na prostej l – 5 punktów.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczmy, ile jest wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są trzy spośród zaznaczonych punktów.

Zauważmy, że trójkąt jest jednoznacznie wyznaczony przez ustalenie trzech jego wierzchołków.

Ponieważ trzy punkty leżące na jednej prostej nie są wierzchołkami trójkąta, więc trójkąty możemy utworzyć jedynie na dwa sposoby:

1. na prostej k wybieramy dwa różne punkty, a do każdej takiej pary dobieramy trzeci punkt na prostej l albo
2. na prostej l wybieramy dwa różne punkty, a do każdej takiej pary dobieramy trzeci punkt na prostej k .

Parę wierzchołków na prostej k możemy wybrać na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ sposobów, a trzeci wierzchołek na prostej l na 5 sposobów. Zatem w przypadku (1) wszystkich trójkątów jest $6 \cdot 5 = 30$.

Parę wierzchołków na prostej l możemy wybrać na $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ sposobów, a trzeci wierzchołek na prostej k na 4 sposoby. Oznacza to, że w przypadku (2) wszystkich trójkątów jest $10 \cdot 4 = 40$.

Wobec tego wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są trzy spośród zaznaczonych punktów, jest

$$30 + 40 = 70$$

Przykład 10

Sześć dziewcząt bierze udział w szkolnej wycieczce. Obliczmy, na ile sposobów można je zakwaterować w trzech dwuosobowych pokojach.

Zakwaterowanie rozkładamy na trzy etapy:

1. wybieramy parę dziewczynek do pierwszego pokoju, co możemy zrobić na $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ sposobów,
2. wybieramy kolejne dwie dziewczynki do drugiego pokoju, co możemy zrobić na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ sposobów.
3. kwatujemy piątą i szóstą dziewczynkę w trzecim pokoju.

Korzystając z reguły mnożenia obliczamy, że szukanych możliwości zakwaterowania sześciu dziewcząt w trzech dwuosobowych pokojach, jest $15 \cdot 6 = 90$.

Przykład 11

Obliczmy, ile jest:

1. wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry nieparzyste.

Zliczanie rozkładamy na dwa etapy:

- (1) wybór dwóch miejsc z sześciu dla cyfr nieparzystych (mamy $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ możliwości) oraz zapisanie tych cyfr (mamy $5 \cdot 5 = 25$ możliwości),
 - (2) zapisanie pozostałych czterech cyfr (mamy $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ możliwości),
- Zatem jest $15 \cdot 25 \cdot 256 = 96000$ takich liczb sześciocyfrowych.
2. wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry parzyste.

- sposób I

Rozróżniamy dwa przypadki:

- (1) na pierwszym miejscu zapisana jest cyfra parzysta albo
- (2) na pierwszym miejscu jest cyfra nieparzysta.

W pierwszym przypadku: mamy 4 możliwości zapisu pierwszej cyfry, z kolejnych czterech miejsc mamy wybrać jedno dla cyfry parzystej (4 możliwości) i zapisać tę cyfrę (5 możliwości), a na każdym z pozostałych trzech miejscach zapisać cyfrę nieparzystą ($5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ możliwości). Takich liczb jest $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 125 = 10000$.

W drugim przypadku: mamy 5 możliwości zapisu pierwszej cyfry, z kolejnych czterech miejsc mamy wybrać dwa dla cyfry parzystej ($\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ możliwości) i zapisać te liczby ($5 \cdot 5 = 25$ możliwości), a na pozostałych dwóch miejscach zapisać cyfry nieparzyste ($5 \cdot 5 = 25$ możliwości). Takich liczb jest $5 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 25 = 18750$.

Oznacza to, że jest $10000 + 18750 = 28750$ liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania.

- sposób II

Wypisujemy kolejno jedna za drugą pięć cyfr, wybierając każdą cyfrę spośród dziesięciu możliwych (dopuszczamy 0 na początkowych miejscach), przy czym na dokładnie dwóch miejscach zapisujemy cyfrę parzystą.

Mamy $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc dla cyfr parzystych, cyfry te możemy zapisać na $5 \cdot 5 = 25$ sposobów, a na pozostałych trzech miejscach cyfry nieparzyste zapiszemy na $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ sposobów.

Zatem jest $10 \cdot 25 \cdot 125 = 31250$ ciągów o 5 cyfrach, w których dokładnie dwie cyfry są parzyste.

Są wśród nich takie, w których cyfra 0 zapisana jest na pierwszym miejscu. W każdym z takich ciągów na jednym z kolejnych czterech miejsc znajduje się cyfra parzysta (miejsce dla niej można wybrać na 4 sposoby, a zapisać ją – na 5 sposobów), a na trzech pozostałych – cyfry nieparzyste (można je zapisać na $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ sposobów). Oznacza to, że jest $4 \cdot 5 \cdot 125 = 2500$ takich ciągów.

Stąd wynika, że jest $31250 - 2500 = 28750$ liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania.

Przykład 12

Obliczmy:

1. ile jest wszystkich wyników czterokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których dokładnie dwa razy wypadła parzysta liczba oczek.

Rozpatrzmy ciąg kolejnych czterech rzutów kostką sześcienną. Zliczanie rozkładamy na dwa etapy:

- 1) wybór tych dwóch z czterech numerów rzutów, dla których wypadła parzysta liczba oczek (mamy $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ możliwości) i rozmieszczenie parzystych liczb oczek na tych dwóch miejscach (mamy $3 \cdot 3 = 9$ możliwości),
- 2) rozmieszczenie nieparzystych liczb oczek na pozostałych miejscach (mamy $3 \cdot 3 = 9$ możliwości).

Oznacza to, że jest $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$ wszystkich wyników czterokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których dokładnie dwa razy wypadła parzysta liczba oczek.

2. ile jest wszystkich wyników pięciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których dokładnie dwa razy wypadła szóstka. Rozpatrzmy ciąg kolejnych pięciu rzutów kostką sześcienną. Zliczanie rozkładamy na dwa etapy:

1) wybór tych dwóch z pięciu numerów rzutów, dla których wypadła szóstka (mamy $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ możliwości) i rozmieszczenie dwóch szóstek na tych dwóch miejscach,

2) rozmieszczenie innych liczb oczek na pozostałych trzech miejscach (mamy $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ możliwości).

Oznacza to, że jest $10 \cdot 125 = 1250$ wszystkich wyników pięciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których dokładnie dwa razy wypadła szóstka.

3. ile jest wszystkich wyników sześciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których wypadła dokładnie jedna jedynka i dokładnie dwie dwójki.

Rozpatrzmy ciąg kolejnych sześciu rzutów kostką sześcienną. Zliczanie rozkładamy na trzy etapy:

1) wybór jednego z sześciu numerów rzutów, w którym wypadła jedynka (mamy 6 możliwości) i rozmieszczenie jedynki na tym miejscu,

2) wybór tych dwóch z pozostałych pięciu numerów rzutów, w których wypadły dwójki (mamy $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ możliwości) i rozmieszczenie dwójek na tych miejscach,

3) rozmieszczenie innych liczb oczek na pozostałych trzech miejscach (mamy $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ możliwości).

Oznacza to, że jest $6 \cdot 10 \cdot 64 = 3840$ wszystkich wyników sześciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których wypadła dokładnie jedna jedynka i dokładnie dwie dwójki.

Przykład 13

Obliczmy, ile jest wszystkich liczb naturalnych siedmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 11 i w zapisie których wszystkie cyfry są nieparzyste.

Rozróżniamy dwa przypadki:

1. w zapisie takiej liczby jest jedna piątka i sześć jedynek albo
2. w zapisie takiej liczby są dwie trójki i pięć jedynek.

- W pierwszym przypadku: wybieramy jedno miejsce, na którym zapisujemy piątkę (7 możliwości), a na pozostałych sześciu miejscach zapisujemy jedynki. Zatem jest 7 takich liczb.
- W drugim przypadku: wybieramy dwa miejsca z siedmiu, na których zapiszemy trójki ($\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ możliwości), a na pozostałych pięciu miejscach zapisujemy jedynki. Oznacza to, że jest 21 takich liczb.

Stąd wynika, że jest $7 + 21 = 28$ wszystkich liczb naturalnych siedmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 11 i w zapisie których wszystkie cyfry są nieparzyste.

Uwaga. Otrzymany wynik to liczba wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru ośmioelementowego $28 = \frac{8 \cdot 7}{2}$. Tyle jest np. wyników ośmiokrotnego rzutu monetą, w którym wypadły dokładnie dwa orły.

Można pokazać, że każdy z wyników ośmiokrotnego rzutu monetą, w którym wypadły dokładnie dwa orły, odpowiada dokładnie jednej liczbie spełniającej warunki zadania i odwrotnie – każda liczba spełniająca warunki zadania odpowiada dokładnie jednemu wynikowi ośmiokrotnego rzutu monetą, w którym wypadły dokładnie dwa orły.

Rozwiążemy w tym celu następujące zadanie.

Ustal, ile rozwiązań w dodatnich liczbach nieparzystych ma równanie

$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = 11$. Zauważmy, że wtedy każda liczba w ciągu $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$ jest nieparzysta, żadna z nich nie jest większa od 10, zatem ciąg ten tworzą kolejne cyfry liczby naturalnej siedmiocyfrowej, której suma cyfr jest równa 11 i w jej zapisie wszystkie cyfry są nieparzyste.

Ponieważ każda z liczb zapisanych po lewej stronie jest nieparzysta, więc przyjmując $c_1 = 2x_1 + 1, c_2 = 2x_2 + 1, \dots,$

$c_7 = 2x_7 + 1$, można równanie zapisać w postaci

$$(2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) + (2x_3 + 1) + (2x_4 + 1) + (2x_5 + 1) + (2x_6 + 1) + (2x_7 + 1) = 11,$$

gdzie każda z liczb $x_1, x_2, \dots, x_7$ jest nieujemną liczbą całkowitą.

Po przekształceniu otrzymujemy równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 2$$

Naszym zadaniem jest wyznaczenie liczby wszystkich rozwiązań tego równania w nieujemnych liczbach całkowitych.

Rozpatrzmy teraz wszystkie możliwe wyniki ośmiokrotnego rzutu monetą, w których wypadły dokładnie dwa orły. Oznaczmy:

x_1 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach do momentu, w którym wyrzucono pierwszą reszkę,

x_2 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono pierwszą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono drugą reszkę,

x_3 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono drugą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono trzecią reszkę,

x_4 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono trzecią reszkę, do momentu, w którym wyrzucono czwartą reszkę,

x_5 - liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono czwartą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono piątą reszkę,
 x_6 - liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono piątą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono szóstą reszkę,
 x_7 - liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono szóstą reszkę.

Zauważmy, że:

- każdemu wynikowi takiego rzutu monetą odpowiada dokładnie jeden ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, temu ciągowi - dokładnie jeden ciąg $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$, który to ciąg koduje dokładnie jedną liczbę siedmiocyfrową. Np. jeżeli w kolejnych rzutach dostaliśmy: (orzeł, reszka, reszka, reszka, orzeł, reszka, reszka), to

$$(x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0)$$

a więc

$$(c_1 = 3, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 1, c_5 = 3, c_6 = 1, c_7 = 1),$$

Oznacza to, że ten wynik rzutu monetą koduje dokładnie jedną liczbę 3111311.

- Na odwrót, każdej liczbie spełniającej warunki zadania odpowiada jeden ciąg $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$, temu ciągowi odpowiada jeden ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, któremu odpowiada jeden wynik ośmiokrotnego rzutu monetą, w którym wypadły dokładnie dwa orły. Np. liczbie 1151111 odpowiada ciąg

$$(c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 5, c_4 = 1, c_5 = 1, c_6 = 1, c_7 = 1)$$

a temu - ciąg

$(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0)$, stąd mamy odpowiadający ciąg rzutów (reszka, reszka, orzeł, orzeł, reszka, reszka, reszka).

Zatem wszystkich liczb naturalnych siedmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 11 i w zapisie których wszystkie cyfry są nieparzyste, jest tyle samo, co wyników ośmiokrotnego rzutu monetą, w którym wypadły dokładnie dwa orły. Tych wyników jest $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

Przykład 14

Obliczmy, ile jest wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 18.

Rozkładamy liczbę 18 na czynniki pierwsze: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Oznacza to, że możliwe są trzy przypadki:

1. wśród cyfr tej liczby jest jedna dwójka, dwie trójki i pięć jedynek,
2. wśród cyfr tej liczby jest jedna dwójka, jedna dziewiątka i sześć jedynek,
3. wśród cyfr tej liczby jest jedna trójka, jedna szóstka i sześć jedynek.

- W pierwszym przypadku: wybieramy jedno miejsce, na którym zapisujemy dwójkę (8 możliwości), z pozostałych siedmiu miejsc wybieramy dwa, na których zapisujemy trójki ($\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ możliwości), a na pozostałych pięciu miejscach zapisujemy jedynki. Oznacza to, że jest $8 \cdot 21 = 168$ takich liczb.
 - W drugim przypadku: wybieramy jedno miejsce, na którym zapisujemy dwójkę (8 możliwości), z pozostałych siedmiu miejsc wybieramy jedno, na którym zapisujemy dziewiątkę (7 możliwości), a na pozostałych sześciu miejscach zapisujemy jedynki. Zatem jest $8 \cdot 7 = 56$ takich liczb.
 - W trzecim przypadku: wybieramy jedno miejsce, na którym zapisujemy trójkę (8 możliwości), z pozostałych siedmiu miejsc wybieramy jedno, na którym zapisujemy szóstkę (7 możliwości), a na pozostałych sześciu miejscach zapisujemy jedynki. Jest więc $8 \cdot 7 = 56$ takich liczb.
- Stąd wynika, że jest $168 + 56 + 56 = 280$ wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 18.

Przykład 15

Obliczmy, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie dwa razy cyfra 0 i dokładnie dwa razy cyfra 1.

- sposób I

Rozróżniamy dwa przypadki:

1. na pierwszym miejscu zapisana jest cyfra 1,
2. na pierwszym miejscu jest cyfra różna od 0 i od 1.

- W pierwszym przypadku: zapisujemy 1 na pierwszym miejscu. Z kolejnych czterech miejsc mamy wybrać jedno dla jedynki (4 możliwości) i zapisać na nim jedynkę. Z pozostałych trzech miejsc wybrać dwa dla zer (3 możliwości) i zapisać na nich zera, a na ostatnim pozostałym miejscu zapisać cyfrę różną od 0 i od 1 (8 możliwości). Takich liczb jest więc $4 \cdot 3 \cdot 8 = 96$.
- W drugim przypadku: mamy 8 możliwości zapisu pierwszej cyfry, z kolejnych czterech miejsc mamy wybrać dwa dla jedynek ($\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ możliwości) i zapisać te jedynki, a na pozostałych dwóch miejscach zapisać zera. Zatem jest $8 \cdot 6 = 48$ takich liczb. Oznacza to, że jest $96 + 48 = 144$ wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie dwa razy cyfra 0 i dokładnie dwa razy występuje cyfra 1.
- sposób II

Zliczanie rozkładamy na trzy etapy, pamiętając o tym, że zera nie możemy zapisać na pierwszym miejscu (w rzędzie dziesiątek tysięcy):

1. wybieramy dwa z czterech miejsc, na których możemy wstawić zera ($\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ możliwości) i zapisujemy zera na tych miejscach,
2. wybieramy te dwa z pozostałych trzech miejsc, na których zapiszemy jedynki (3 możliwości) i zapisujemy jedynki na tych miejscach,
3. na ostatnim pozostałym miejscu zapisujemy cyfrę różną od 0 i od 1 (8 możliwości).
Zatem jest $6 \cdot 3 \cdot 8 = 144$ wszystkich takich liczb naturalnych pięciocyfrowych.

- sposób III

Wypisujemy kolejno jedna za drugą pięć cyfr, wybierając każdą cyfrę spośród dziesięciu możliwych (dopuszczamy 0 na początkowych miejscach), przy czym na dokładnie dwóch miejscach zapisujemy cyfrę 0 i na dokładnie dwóch miejscach zapisujemy cyfrę 1.

Mamy $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc dla zer, na pozostałych trzech miejscach zapiszemy dwie jedynki na 3 sposoby, a na ostatnim z pozostałych miejsc zapiszemy cyfrę różną od 0 i od 1 na 8 sposobów. Takich ciągów o 5 cyfrach jest zatem $10 \cdot 3 \cdot 8 = 240$.

Są wśród nich takie, w których cyfra 0 zapisana jest na pierwszym miejscu. W każdym z takich ciągów na kolejnych czterech miejscach znajduje się jeszcze jedna cyfra 0 (miejscę dla niej można wybrać na 4 sposoby), na pozostałych trzech miejscach są dwie jedynki (można je zapisać na 3 sposoby), a na ostatnim z pozostałych miejsc jest cyfra różna od 0 i od 1, którą można zapisać na 8 sposobów. Oznacza to, że jest $4 \cdot 3 \cdot 8 = 96$ takich ciągów z zerem na pierwszym miejscu.

Stąd wynika, że liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania jest $240 - 96 = 144$.

Przykład 16

Do pracy w samorządzie szkolnym zgłosiło się 5 osób: Agnieszka, Beata, Czarek, Darek i Ewa.

W głosowaniu każdy z uczniów tej szkoły ma się wypowiedzieć na temat przydatności do pracy w samorządzie każdej osoby spośród tych pięciorga zgłoszonych. Głosujący dostaje kartkę z danymi pięciorga kandydatów:

Kandydaci do samorządu szkolnego:

☐	Agnieszka
☐	Beata
☐	Czarek
☐	Darek
☐	Ewa

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

i podejmuje decyzję, wpisując „x” w kratkę przy danych wybranego kandydata lub pozostawiając kratkę pustą, jeśli danej osoby do samorządu nie zgłasza.

1. Obliczymy, ile jest wszystkich możliwych wyników takiego głosowania.

sposób I

Przy każdym z 5 kandydatów głosujący ma podjąć decyzję na 2 sposoby: zgłaszając kandydata do samorządu, zostawia znak „x” albo pozostawia pustą kratkę, kiedy danej osoby do samorządu nie zgłasza.

Na przykład:

- osoba która zgłosiła do samorządu tylko Beatę, Darka i Ewę zostawiła na kartce następujący ciąg znaków , x, , x, x,
- osoba, która zostawiła na kartce ciąg znaków , , x, x, zagłosowała tylko na Czarka i Darka.

Zatem wynik głosowania można utożsamić z pięcioelementowym ciągiem o elementach wybranych ze zbioru dwuelementowego: $\{x, \}$.

Wobec tego wszystkich możliwych wyników tego głosowania jest $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

sposób II

Oznaczmy następująco wybory dokonywane w głosowaniu:

A – oddano głos na Agnieszkę,

B – oddano głos na Beatę,

C – oddano głos na Czarka,

D – oddano głos na Darka,

E – oddano głos na Ewę.

Zauważmy, że wynik głosowania jest wyborem konkretnego podzbioru ze zbioru $\{A, B, C, D, E\}$. Podzielimy te podzbiory ze względu na ich liczbę elementów. Wtedy:

– jest 1 wynik głosowania, w którym nie wybrano do samorządu żadnej ze zgłoszonych osób. Odpowiadający takiemu wynikowi podzbiór to zbiór pusty: $\{\}$,

– jest 5 wyników głosowania, w których wybrano do samorządu 1 ze zgłoszonych osób. Odpowiadające takim wynikom podzbiory to

$\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{E\}$,

– jest 10 wyników głosowania, w których wybrano do samorządu 2 spośród zgłoszonych osób. Odpowiadające takim wynikom podzbiory to

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$,

– jest również 10 wyników głosowania, w których wybrano do samorządu 3 spośród zgłoszonych osób. Podzbiory odpowiadające takim wynikom głosowania można potraktować jako dopełnienia do zbioru $\{A, B, C, D, E\}$ wypisanych powyżej podzbiorów 2-elementowych (np. dopełnieniem podzbioru 2-elementowego $\{B, C\}$ jest podzbiór 3-elementowy $\{A, D, E\}$). W ten sposób otrzymujemy wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między dwuelementowymi a trzelementowymi podzbiorymi zbioru pięcioelementowego, skąd wynika, że jest tyle samo podzbiorów dwuelementowych i podzbiorów trzelementowych zbioru pięcioelementowego.

Odpowiadające takim wynikom podzbiory to

$\{C, D, E\}, \{B, D, E\}, \{B, C, E\}, \{B, C, D\}, \{A, D, E\}, \{A, C, E\}, \{A, C, D\}, \{A, B, E\}, \{A, B, D\}, \{A, B, C\}$.

– jest 5 wyników głosowania, w których wybrano do samorządu 4 spośród zgłoszonych osób. Traktując te podzbiory jako dopełnienia do zbioru $\{A, B, C, D, E\}$ wypisanych powyżej podzbiorów jednoelementowych, zauważymy, że jest tyle samo podzbiorów czteroelementowych i podzbiorów jednoelementowych zbioru pięcioelementowego. Podzbiory czteroelementowe rozpatrywanego zbioru pięcioelementowego to

$\{B, C, D, E\}, \{A, C, D, E\}, \{A, B, D, E\}, \{A, B, C, E\}, \{A, B, C, D\}$. – jest 1 wynik głosowania, w którym wybrano do samorządu każdą ze zgłoszonych osób. Odpowiadający takiemu wynikowi podzbiór to zbiór $\{A, B, C, D, E\}$, który jest (oczywiście) dopełnieniem zbioru pustego do zbioru $\{A, B, C, D, E\}$.

Zatem wszystkich możliwych wyników głosowania jest

$$2 \cdot (1 + 5 + 10) = 32$$

1. Wykażemy, że w klasie 3b, liczącej 35 uczniów znajdują się 2 osoby, które w tym głosowaniu oddały głosy na tych samych kandydatów.

Wybermy dowolne 32 osoby spośród 35 uczniów klasy 3b. Jeżeli któreś dwie z nich zagłosowały tak samo, to właśnie te wskazujemy jako szukaną parę. W przeciwnym razie te 32 osoby wyczerpały wszystkie możliwe wyniki głosowania, a więc kolejna, trzydziesta trzecia osoba wypełniła kartkę do głosowania tak samo, jak jedna z wybranych 32 osób. To spostrzeżenie kończy dowód.

Przykład 17

Obliczymy, ile jest:

1. wszystkich wyników pięciokrotnego rzutu monetą, w których wypadło mniej orłów niż reszek.

sposób I

Rozróżniamy trzy przypadki:

- (1) ani razu nie wypadł orzeł (wtedy w każdym rzucie wypadła reszka) – jest jedna taka możliwość,
- (2) wypadł dokładnie jeden orzeł (wtedy wypadły jeszcze 4 reszki) – takich możliwości jest 5,

(3) wypadły dokładnie dwa orły (wtedy wypadły jeszcze 3 reszki) – takich możliwości jest $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Stąd wynika, że jest $1 + 5 + 10 = 16$ wszystkich wyników pięciokrotnego rzutu monetą, w których wypadło mniej orłów niż reszek.

sposób II

Skorzystamy z reguły równoliczności.

Jest $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ wszystkich wyników pięciokrotnego rzutu monetą. Można je podzielić na dwie rozłączne grupy:

(1) tych wyników, w których wypadło mniej orłów niż reszek,

(2) tych wyników, w których wypadło mniej reszek niż orłów.

Biorąc dowolny wynik z pierwszej grupy i zamieniając każdego orła na reszkę oraz każdą reszkę na orła dostaniemy jeden wynik z drugiej grupy. Postępując analogicznie z wynikiem z drugiej grupy dostaniemy jeden wynik z pierwszej grupy. Zatem wyniki te można połączyć w pary, co oznacza, że dokładnie połowa wszystkich wyników pięciokrotnego rzutu monetą to te, w których orłów jest mniej niż reszek. Jest ich więc $\frac{1}{2} \cdot 32 = 16$.

2. wszystkich wyników dziewięciokrotnego rzutu monetą, w których wypadło więcej orłów niż reszek.

Jest $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$ wszystkich wyników dziewięciokrotnego rzutu monetą. Można je podzielić na dwie rozłączne grupy:

(1) tych wyników, w których wypadło więcej orłów niż reszek,

(2) tych wyników, w których wypadło więcej reszek niż orłów.

Rozumując podobnie jak w II sposobie rozwiązania poprzedniego podpunktu, stwierdzimy, że pojedyncze wyniki z obu tych grup można połączyć w pary. Oznacza to, że dokładnie połowa wszystkich wyników dziewięciokrotnego rzutu monetą to te, w których orłów jest więcej niż reszek. Wyników tych jest zatem $\frac{1}{2} \cdot 512 = 256$.

Przykład 18

W pudełku znajduje się sześć kul ponumerowanych od 1 do 6. Z tego pudełka losujemy dowolnie wybrane kule. Ile jest możliwości wylosowania w ten sposób takich kul, że suma numerów: najmniejszego i największego z zapisanych na tych wylosowanych kulach jest równa 7?

Zauważmy, że w sposób opisany w treści zadania sumę numerów równą 7 można otrzymać:

- gdy najmniejszy z numerów jest równy 1 i największy jest równy 6,
- gdy najmniejszy z numerów jest równy 2 i największy jest równy 5,
- gdy najmniejszy z numerów jest równy 3 i największy jest równy 4.

Rozróżniamy zatem trzy rozłączne przypadki:

1. wśród wylosowanych znalazły się kule o numerach 1 oraz 6,
2. wśród wylosowanych nie ma żadnej z kul o numerach 1, 6 i znalazły się kule o numerach 2 oraz 5,
3. wylosowano tylko dwie kule: z numerem 3 oraz z numerem 4.

W pierwszym przypadku wraz z wylosowanymi dwiema kulami można wylosować dowolny podzbiór ze zbioru czterech pozostałych kul. Ponieważ decyzji o wyborze każdej z tych 4 kul możemy dokonać na 2 sposoby, więc łącznie w tym przypadku jest $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ możliwości wylosowania kul.

W drugim przypadku wraz z wylosowanymi dwiema kulami można wylosować dowolny podzbiór ze zbioru, w którym są dwie kule: kula z numerem 3 oraz kula z numerem 4. Zatem w tym przypadku są $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ możliwości wylosowania kul.

W trzecim przypadku mamy jeden sposób wylosowania kul.

Oznacza to, że jest $16 + 4 + 1 = 21$ wszystkich możliwości wylosowania kul w sposób opisany w treści zadania.

Podzbiory zbioru skończonego (treść rozszerzona)

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru skończonego

Można obliczyć, ile jest wszystkich podzbiorów pewnych zbiorów skończonych.

- pewien zbiór dwuelementowy ma $2^2 = 4$ podzbiory,
- pewien zbiór czteroelementowy ma $2^4 = 16$ podzbiorów,
- pewien zbiór pięcioelementowy ma $2^5 = 32$ podzbiory,
- pewien podzbiór dziewięcioelementowy ma $2^9 = 512$ podzbiorów.

Ustalając liczbę podzbiorów zauważaliśmy, że w stosunku do każdego elementu zbioru możemy na dwa sposoby podjąć decyzję o jego wyborze do tworzonego podzbioru.

Przykład 1

Rozpatrzmy teraz zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, który ma n elementów. Dowolny podzbiór zbioru A tworzymy, podejmując decyzję, czy każdy z kolejnych elementów zbioru A : $a_1, a_2, \dots, a_n$ należy do tego podzbioru, czy nie należy. Można to zrobić na $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_n = 2^n$ sposobów.

Zatem liczba wszystkich podzbiorów zbioru A , który ma n elementów, jest równa 2^n .

Liczba kombinacji

W przykładach prezentowanych w tym rozdziale często spotykaliśmy się z koniecznością obliczenia, na ile sposobów możemy z ustalonego zbioru wybrać podzbiór o konkretnej liczbie elementów.

Przykład 2

Rozpatrzmy zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, który ma n elementów. Wtedy, jak to już pokazywaliśmy w rozwiązaniach przykładów tego rozdziału:

- jest jeden podzbiór zbioru A , do którego nie wybierzemy żadnego elementu ze zbioru A (tym podzbiorem jest zbiór pusty),
- jest jeden podzbiór zbioru A , do którego wybierzemy każdy element zbioru A (tym podzbiorem jest cały zbiór A),
- jest n wszystkich podzbiorów jednoelementowych zbioru A ,
- jest $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ wszystkich podzbiorów dwuelementowych zbioru A .

Rozumując podobnie jak w rozwiązaniu metodą dopełniania podzbiorów do całego zbioru i zasadą równoliczności, stwierdzimy też, że

- jest n wszystkich podzbiorów $(n-1)$ -elementowych zbioru A ,
- jest $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ wszystkich podzbiorów $(n-2)$ -elementowych zbioru A .

Definicja: liczba k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego

Rozpatrzmy zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, który ma n ($n \geq 1$) elementów.

Symbolem $\binom{n}{k}$ oznaczamy liczbę jego wszystkich podzbiorów k -elementowych ($k \geq 0$ i $k \leq n$).

Zapis symboliczny $\binom{n}{k}$ odczytujemy „ n po k ”, stąd np.:

- $\binom{5}{2}$ czytamy „pięć po dwa”,
- $\binom{7}{1}$ czytamy „siedem po jeden”,
- $\binom{6}{0}$ czytamy „sześć po zero”.

Stosując to oznaczenie, stwierdzimy, że:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2},$$

gdy $n \geq 2$

W szczególności:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10, \binom{5}{3} = 10,$$

$$\binom{7}{1} = 7, \binom{7}{6} = 7,$$

$$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$$

Rozszerza się też (z czego my nie będziemy korzystać) stosowanie tego symbolu na:

- podzbiór pusty zbioru pustego, przyjmując $\binom{0}{0} = 1$,
- przypadek, gdy $k > n$, wtedy przyjmujemy $\binom{n}{k} = 0$.

Kombinacje

Definicja: k -elementowa kombinacja zbioru n -elementowego

Każdy k -elementowy podzbiór zbioru n -elementowego ($0 \leq k \leq n$) nazywa się zwyczajowo k -elementową kombinacją zbioru n -elementowego.

Pokażemy, że liczba wszystkich k -elementowych podzbiorów, które można wybrać ze zbioru $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ liczącego n elementów, jest równa $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Przypomnijmy, że przez $\binom{n}{k}$ umówiliśmy się oznaczać liczbę wszystkich możliwych k -elementowych podzbiorów zbioru A .

Dla dowodu zauważmy, że liczba wszystkich możliwych k -elementowych ciągów utworzonych z różnych elementów zbioru A jest z jednej strony równa

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ czynników}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

a z drugiej strony – jest równa

$$\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1}_{k \text{ czynników}} \cdot \binom{n}{k}$$

ponieważ w każdym z k -elementowych podzbiorów zbioru A możemy ustalić kolejność elementów na

$$k! = \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1}_{k \text{ czynników}}$$

sposobów.

Otrzymujemy więc równość

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$$

stąd

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Na podstawie spostrzeżenia poczynionego powyżej mamy twierdzenie.

Twierdzenie: liczba k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego

Liczba $\binom{n}{k}$ wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego jest równa

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1}.$$

Przykład 3

Pokażemy kilka zastosowań twierdzenia o liczbie kombinacji.

1. Do turnieju koszykówki, rozgrywanego systemem „każdy z każdym” (bez rewanżów), zgłosiło się 12 drużyn.
Liczba wszystkich meczów do rozegrania w tym turnieju jest zatem równa $\binom{12}{2}$, czyli $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$.
2. Z pudełka, w którym znajduje się 20 kul ponumerowanych od 1 do 20 mamy wylosować 3 kule.
Każdy wynik takiego losowania to trzejelementowy podzbiór zbioru dwudziestoelementowego, zatem liczba sposobów, na które można to zrobić, jest równa $\binom{20}{3}$. Ta liczba jest więc równa $\frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$.
3. Na okręgu zaznaczono 11 różnych punktów. Obliczamy, ile jest wszystkich czworokątów wypukłych, których wierzchołkami są punkty wybrane spośród tych zaznaczonych.
Ponieważ wybierając dowolne cztery z tych jedenastu punktów na dokładnie jeden sposób, połączymy je tak, aby otrzymać kolejne boki czworokąta wypukłego, więc szukana liczba wszystkich czworokątów to $\binom{11}{4}$, co jest równe $\frac{11!}{4!7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330$.
4. Spośród uczniów 37-osobowej klasy należy wybrać 5-osobową delegację.
Można to zrobić na $\binom{37}{5}$ sposobów, co jest równe $\frac{37!}{5!32!} = \frac{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 435897$ (to prawie pół miliona sposobów).
5. W pewnej grze losowej należy wybrać 6 liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$. Liczba sposobów, na które można tego dokonać jest równa $\binom{49}{6}$, czyli $\frac{49!}{6!43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$ (to liczba bliska 14 milionom).
6. W rozdaniu brydżowym gracz otrzymuje 13 kart wybranych losowo z talii 52 kart. Liczba wszystkich układów kart możliwych do otrzymania przez brydżystę jest więc równa $\binom{52}{13}$, czyli $\frac{52!}{13!39!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 635013559600$ (to ponad 635 miliardów układów).

Przykład 4

Rozpatrzmy równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$$

gdzie każda z liczb $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ jest całkowita i nieujemna.

Wykażemy, że jest 3003 wszystkich rozwiązań tego równania.

Skorzystamy z pomysłu przedstawionego w Uwadze do podpunktu a) przykładu 13.

Rozpatrzmy pomocniczo wszystkie wyniki piętnastokrotnego rzutu monetą, w których wypadło dokładnie 10 orłów. Oznaczmy przez:

- x_1 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach do momentu, w którym wyrzucono pierwszą reszkę,
- x_2 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono pierwszą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono drugą reszkę,
- x_3 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono drugą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono trzecią reszkę,
- x_4 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono trzecią reszkę, do momentu, w którym wyrzucono czwartą reszkę,
- x_5 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono czwartą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono piątą reszkę,
- x_6 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono piątą reszkę.

Wtedy

- każdemu wynikowi takiego rzutu monetą odpowiada dokładnie jeden ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$,
- każdemu ciągowi $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ odpowiada jeden wynik piętnastokrotnego rzutu monetą, w którym wypadło dokładnie 10 orłów.

Ponieważ jest $\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3003$ wszystkich wyników piętnastokrotnego rzutu monetą, w których wypadło dokładnie 10 orłów, więc również tyle jest rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$ w nieujemnych liczbach całkowitych.

Rozumując podobnie, można też wykazać, że równanie $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = k$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą, a każda z liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ jest całkowita i nieujemna, ma dokładnie $\binom{n+k-1}{k}$ rozwiązań.

Współczynniki dwumianowe, wzór dwumianowy Newtona

Przykład 5

Wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x :

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

- sposób I (algebraiczny)

Zapisujemy równość

$$(x+1)^4 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1).$$

Po wymnożeniu wyrażeń zapisanych w nawiasach po prawej stronie tej równości i pogrupowaniu wyrazów podobnych otrzymamy wyrażenie (wielomian zmiennej x), w którym wystąpią jednomiany zmiennej x .

Czynność taką można wykonać, korzystając ze wzoru na sześcian sumy:

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= ((x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1)) \cdot (x+1) = (x+1)^3 \cdot (x+1) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \cdot (x+1) = \\ &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \cdot x + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \cdot 1 =\end{aligned}$$

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \text{ lub ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy:}$$

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= ((x+1)^2)^2 = (x^2 + 2x + 1)^2 = (x^2 + (2x+1))^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (2x+1) + (2x+1)^2 = \\ &= x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 4x + 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.\end{aligned}$$

- sposób II (kombinatoryczny)

Zauważmy, że mnożąc wyrażenia wybierane z każdego z kolejnych nawiasów iloczynu

$(x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1)$, dostaniemy za każdym razem mnożenie czterech czynników. Wynikiem każdego takiego mnożenia jest wyrażenie x^k , gdzie k jest równe 4, 3, 2, 1 lub 0. Wykonajmy więc wszystkie możliwe mnożenia wyrażeń wybieranych z kolejnych nawiasów – możemy to zrobić na $2^4 = 16$ sposobów.

Rozróżniamy pięć przypadków:

1. ze wszystkich nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na jeden sposób, a w wyniku otrzymamy x^4 , co można też zapisać jako $\binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot 1^0$,
2. z dokładnie trzech nawiasów wybraliśmy x – wtedy z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy 1, a więc można to zrobić na 4 sposoby. Łącznie otrzymamy $4x^3$, co można też zapisać jako $\binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot 1^1$,
3. z dokładnie dwóch nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ sposobów. Łącznie otrzymamy więc $6x^2$, co można też zapisać jako $\binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot 1^2$,
4. z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy x – można to zrobić na 4 sposoby. Łącznie otrzymamy więc $4x$, co można też zapisać jako $\binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot 1^3$,
5. z żadnego z nawiasów nie wybraliśmy x – można to zrobić na 1 sposób. Wtedy z każdego z nawiasów musimy wybrać jedynkę, więc w wyniku mnożenia otrzymamy 1, co można też zapisać jako $\binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot 1^4$.

Ostatecznie stwierdzamy, że

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1. \text{ Otrzymaną tożsamość możemy też zapisać w postaci}$$

$$(x+1)^4 = \binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot 1^0 + \binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot 1^1 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot 1^3 + \binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot 1^4$$

Przykład 6

Wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x :

$$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

- sposób I (algebraiczny)

$$(x+1)^5 = (x+1)^4 \cdot (x+1) = (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \cdot (x+1) \\ = x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

- sposób II (kombinatoryczny)

Zauważmy, że mnożąc wyrażenia wybierane z każdego z kolejnych nawiasów iloczynu

$$(x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1)$$

dostaniemy za każdym razem do pomnożenia pięć czynników, przy czym każdy z nich to x albo 1 . Zatem wynikiem każdego takiego mnożenia jest wyrażenie x^k , gdzie k jest równe $5, 4, 3, 2, 1$ lub 0 . Wykonajmy więc wszystkie możliwe mnożenia wyrażen wybieranych z kolejnych nawiasów – możemy to zrobić na $2^5 = 32$ sposoby.

Rozróżniamy sześć przypadków:

1. ze wszystkich nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na jeden sposób, a w wyniku otrzymamy x^5 , co można też zapisać jako $\binom{5}{5} \cdot x^5 \cdot 1^0$,
2. z dokładnie czterech nawiasów wybraliśmy x – wtedy z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy 1 , a więc można to zrobić na 5 sposobów. Zatem łącznie otrzymamy $5x^4$, co można też zapisać jako $\binom{5}{4} \cdot x^4 \cdot 1^1$,
3. z dokładnie trzech nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$ sposobów. Łącznie otrzymamy więc $10x^3$, co można też zapisać jako $\binom{5}{3} \cdot x^3 \cdot 1^2$,
4. z dokładnie dwóch nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ sposobów. Łącznie otrzymamy więc $10x^2$, co można też zapisać jako $\binom{5}{2} \cdot x^2 \cdot 1^3$,
5. z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy x – można to zrobić na 5 sposobów. Łącznie otrzymamy więc $5x$, co można też zapisać jako $\binom{5}{1} \cdot x^1 \cdot 1^4$,
6. z żadnego z nawiasów nie wybraliśmy x – można to zrobić na 1 sposób. Wtedy z każdego z nawiasów musimy wybrać jedynkę, więc w wyniku mnożenia otrzymamy 1 , co można też zapisać jako $\binom{5}{0} \cdot x^0 \cdot 1^5$.

Ostatecznie stwierdzamy, że

$$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

Otrzymaną tożsamość możemy też zapisać w postaci

$$(x+1)^5 = \binom{5}{5} \cdot x^5 \cdot 1^0 + \binom{5}{4} \cdot x^4 \cdot 1^1 + \binom{5}{3} \cdot x^3 \cdot 1^2 + \binom{5}{2} \cdot x^2 \cdot 1^3 + \binom{5}{1} \cdot x^1 \cdot 1^4 + \binom{5}{0} \cdot x^0 \cdot 1^5.$$

Przykład 7

Wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x :

$$(x+1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$$

- sposób I

Najpierw pokazujemy, że

$$(x+1)^6 = (x+1)^5 \cdot (x+1) = (x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1) \cdot (x+1) = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1.$$

Stąd

$$(x+1)^7 = (x+1)^6 \cdot (x+1) = (x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1) \cdot (x+1) =$$

$$= x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1.$$

- sposób II

Korzystając z pomysłów przedstawionych w sposobie II rozwiązania poprzednich podpunktów, pokazujemy, że

$$(x+1)^7 =$$

$$= \binom{7}{7} \cdot x^7 \cdot 1^0 + \binom{7}{6} \cdot x^6 \cdot 1^1 + \binom{7}{5} \cdot x^5 \cdot 1^2 + \binom{7}{4} \cdot x^4 \cdot 1^3 + \binom{7}{3} \cdot x^3 \cdot 1^4 + \binom{7}{2} \cdot x^2 \cdot 1^5 + \binom{7}{1} \cdot x^1 \cdot 1^6 + \binom{7}{0} \cdot x^0 \cdot 1^7.$$

Ponieważ $\binom{7}{7} = \binom{7}{0} = 1$, $\binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7$, $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$, $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$, więc otrzymujemy

$$(x+1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1.$$

Rozumując podobnie jak w sposobie II rozwiązań przedstawionych w powyższym przykładzie, można pokazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n oraz dowolnych liczb całkowitych a oraz b prawdziwa jest równość

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Wzór ten jest nazywany wzorem dwumianowym Newtona.

W szczególności dla $a = b = 1$ otrzymujemy

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Otrzymana równość uzasadnia znany nam już fakt, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego jest równa 2^n .

Zadania

Ćwiczenie 1

Do szkolnego turnieju koszykówki zgłosiło się 14 drużyn. Ile trzeba rozegrać meczów, jeżeli turniej toczy się według systemu „każdy z każdym”, bez rewanżów?

☐ 91

☐ 28

☐ 13

☐ 182

Ćwiczenie 2

Na ile sposobów można wybrać dwóch graczy spośród 15 zawodników?

☐ 210

☐ 29

☐ 225

☐ 105

Ćwiczenie 3

Ile jest wszystkich liczb naturalnych dziesięciocyfrowych, których suma cyfr jest równa 2?

☐ 10

☐ 20

☐ 9

☐ 11

Ćwiczenie 4

Ile wszystkich przekątnych ma dziesięciokąt foremny?

☐ 17

☐ 35

☐ 45

☐ 10

Ćwiczenie 5

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy jednocześnie dwie liczby. Ile jest możliwości wylosowania w ten sposób takiej pary liczb, której suma jest parzysta?

☐ 12

☐ 16

☐ 10

☐ 9

Ćwiczenie 6

Liczba uczniów pewnej klasy jest 15 razy mniejsza od liczby wszystkich par, możliwych do wyboru spośród uczniów tej klasy. Ilu jest uczniów w tej klasie?

☐ 28

☐ 31

☐ 30

☐ 29

Ćwiczenie 7

Ile jest wszystkich wyników trzykrotnego rzutu kostką sześcienną, w których dokładnie dwa razy wypadła szóstka?

☐ 18

☐ 30

☐ 36

☐ 15

Ćwiczenie 8

W pewnej grupie jest 10 chłopców i 9 dziewczynek. Na ile sposobów można z tej grupy wybrać trzysobowy zespół, w którym znajdzie się co najmniej jedna dziewczynka i co najmniej jeden chłopiec?

☐ 360

☐ 180

☐ 765

☐ 1530

Ćwiczenie 9

Ile jest pięciocyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 12, których każda cyfra jest nieparzysta?

☐ więcej niż 1000

☐ 4720

☐ mniej niż 1000

☐ 2360

Ćwiczenie 10

Na okręgu zaznaczono 8 różnych punktów. Ile jest wszystkich trójkątów, których każdy wierzchołek jest jednym z tych wybranych punktów?

☐ 336

☐ 512

☐ 56

☐ 24

Ćwiczenie 11

Test powtórzeniowy składa się z 14 zadań testowych. Po wybraniu prawidłowej odpowiedzi za każde z zadań można otrzymać 1 punkt, w przeciwnym przypadku za zadanie otrzymuje się 0 punktów. Oblicz, na ile sposobów można tak wypełnić kartę odpowiedzi do tego testu, żeby otrzymać:

1. 1 punkt
2. 2 punkty
3. 12 punktów
4. 13 punktów

Ćwiczenie 12

Oblicz:

1. ile trzeba będzie rozegrać wszystkich meczów w turnieju, do którego zgłosiło się 13 drużyn i każda drużyna ma rozegrać z każdą inną dokładnie jeden mecz.
2. na ile sposobów można wybrać dwuosobową delegację z klasy liczącej 31 uczniów.

Ćwiczenie 13

Oblicz, ile jest wszystkich takich wyników:

1. ośmiokrotnego rzutu monetą, że dokładnie dwa razy wypadł orzeł.
2. ośmiokrotnego rzutu monetą, że dokładnie sześć razy wypadła reszka.
3. dziewięciokrotnego rzutu monetą, że dokładnie dwa razy wypadła reszka.
4. dziewięciokrotnego rzutu monetą, że dokładnie siedem razy wypadł orzeł.

Ćwiczenie 14

1. Spośród ośmiu chłopców pewnej klasy nauczyciel chce wylosować sześciu. Na ile sposobów może to zrobić?
2. Spośród dwudziestu dziewcząt pewnej klasy nauczyciel chce wybrać osiemnaście. Na ile sposobów może to zrobić?

Ćwiczenie 15

Oblicz liczbę wszystkich przekątnych

1. siedmiokąta wypukłego.
2. szesnastokąta wypukłego.

Ćwiczenie 16

Ilu zawodników liczy drużyna, z której 2 graczy można wybrać na 136 sposobów?

Ćwiczenie 17

Pewien wielokąt foremny ma 20 przekątnych. Ile boków ma ten wielokąt?

Ćwiczenie 18

Do szkolnego turnieju halowej piłki ręcznej zgłosiło się 6 drużyn: D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , D_5 i D_6 . Każda drużyna ma rozegrać z każdą inną dokładnie jeden mecz. W każdym meczu przyznawano punkty w następujący sposób:

w przypadku remisu obie drużyny otrzymują po 1 punkcie, a w meczu rozstrzygniętym zwycięzca otrzymuje 2 punkty. Po zakończeniu turnieju okazało się, że: drużyna D_1 zdobyła 6 punktów, drużyna D_2 – 3 punkty, drużyna D_3 – 8 punktów, drużyna D_4 – 1 punkt, a drużyna D_5 zdobyła o 2 punkty więcej niż drużyna D_6 .
Które miejsce w turnieju zajęła drużyna D_6 ?

Ćwiczenie 19

W osiedlowym turnieju piłki nożnej, rozgrywanym systemem „każdy z każdym” (bez rewanżów) wystąpiło 12 zespołów. Każda drużyna za zwycięstwo w meczu otrzymywała 1 punkt, za remis – 0,5 punktu, a przegrana nie zwiększała konta punktowego zespołu. Dwa zespoły: „Kosiarze” i „Przecinaki” zajęły w tym turnieju miejsca ex aequo 10 i 11 (żadna inna drużyna nie dzieliła z nimi tych miejsc), zdobywając po 5,5 punktu. Wykaż, że drużyna, która zajęła w tym turnieju ostatnie miejsce, wygrała co najwyżej jeden mecz.

Ćwiczenie 20

W turnieju gry w koszykówkę każda drużyna miała rozegrać z każdą inną dokładnie jeden mecz. Po zakończeniu tego turnieju okazało się, że drużyny, które nie wygrały żadnego meczu, stanowią 10% wszystkich drużyn. Oblicz, ile meczów rozegrano w tym turnieju. Pamiętaj, że w koszykówce każdy mecz musi zostać rozstrzygnięty.

Ćwiczenie 21

W gimnazjalnym turnieju piłkarskim wystąpiła pewna liczba drużyn. Turniej rozgrywano metodą „każdy z każdym”, bez rewanżów. Po zakończeniu okazało się, że dokładnie 60% drużyn rozegrało co najmniej jeden mecz remisowy, a dokładnie $\frac{5}{6}$ pozostałych co najmniej jeden mecz przegrało. Ile meczów rozegrano w tym turnieju?

Ćwiczenie 22

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ losujemy trzy razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz, ile jest takich wyników tego losowania, że pierwsza z wylosowanych liczb jest większa od drugiej, a druga jest równa trzeciej z tych liczb.

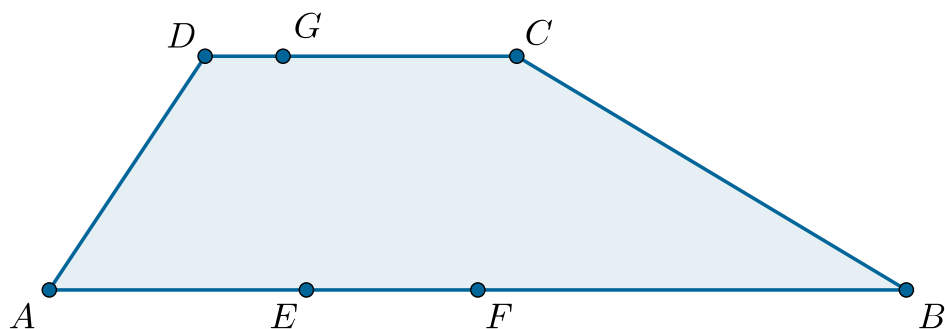
Ćwiczenie 23

Oblicz:

1. ile jest wszystkich wyników dwukrotnego rzutu kostką sześcienną, w których liczba oczek uzyskanych w pierwszym rzucie jest mniejsza od liczby oczek uzyskanych w drugim rzucie.
2. ile jest wszystkich wyników trzykrotnego rzutu kostką sześcienną, w których liczba oczek uzyskanych w trzecim rzucie jest większa od liczby oczek uzyskanych w drugim rzucie.

Ćwiczenie 24

W trapezie $ABCD$ na podstawie AB wybrano punkty E i F , a na podstawie CD wybrano punkt G .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz, ile jest wszystkich:

1. trójkątów, których każdy wierzchołek został wybrany spośród punktów A , B , C , D , E , F , G .
2. trapezów, których każdy wierzchołek został wybrany spośród punktów A , B , C , D , E , F , G .

Ćwiczenie 25

W klasie jest 33 uczniów, przy czym chłopców jest o 3 mniej niż dziewczynek. Oblicz, na ile sposobów można wybrać z tej klasy:

1. trzyosobową delegację, w której znajdzie się dokładnie jedna dziewczynka.
2. czteroosobową delegację, w której znajdą się dokładnie dwaj chłopcy.

Ćwiczenie 26

Proste k i l są równoległe i różne. Rozpatrzmy dziesięć punktów: 5 z nich zaznaczono na prostej k , 4 kolejne zaznaczono na prostej l , a dziesiątym jest punkt A . Ten punkt spełnia jednocześnie dwa warunki:

1. nie leży na żadnej z prostych k , l ,
2. żadna z prostych, przechodzących przez każde dwa inne punkty wybrane spośród dziewięciu zaznaczonych, nie przechodzi przez punkt A .

Oblicz, ile jest wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są trzy spośród zaznaczonych punktów.

Ćwiczenie 27

Oblicz:

1. ile jest liczb czterocyfrowych, w których cyfra setek jest mniejsza od cyfry jedności.
2. ile jest liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie dwa następujące warunki:
 - cyfra setek jest większa od cyfry jedności,
 - cyfra tysięcy jest większa od cyfry dziesiątek.

Ćwiczenie 28

Oblicz, ile jest wszystkich prostokątów, których boki zawierają się w liniach siatki prostokąta o wymiarach 6 na 4, podzielonego na kwadraty jednostkowe.

Ćwiczenie 29

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych dziewięciocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12.

Ćwiczenie 30

Oblicz, ile jest wszystkich wyników pięciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których parzysta liczba oczek wypadła więcej razy niż nieparzysta liczba oczek.

Ćwiczenie 31

Ile jest wszystkich liczb naturalnych:

1. pięciocyfrowych o wszystkich cyfrach nieparzystych, których suma cyfr jest równa 11.
2. sześciocyfrowych, których suma cyfr jest równa 3.
3. nieparzystych siedmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 4.
4. ośmiocyfrowych o wszystkich cyfrach parzystych, których suma cyfr jest równa 6.

Ćwiczenie 32

Liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ustawiamy w losowej kolejności w szeregu, tworząc liczbę dziewięciocyfrową o różnych cyfrach. Oblicz, ile jest możliwości uzyskania w ten sposób liczby, której cyfry spełniają jednocześnie cztery warunki:

1. cyfra 1 stoi przed cyfrą 2
2. cyfra 3 stoi przed cyfrą 4
3. cyfra 5 stoi przed cyfrą 6
4. cyfra 7 stoi przed cyfrą 8

Ćwiczenie 33

W pudełku jest 25 ponumerowanych losów, w tym 5 wygrywających. Z tego pudełka wybieramy losowo 4 losy. Na ile sposobów można wylosować co najmniej 1 los wygrywający?

Ćwiczenie 34

Dany jest prostokąt ABCD, w którym $|AB| = 5$, $|AD| = 8$. Prostokąt ten podzielono liniami siatki na kwadraty jednostkowe. Ile jest wszystkich najkrótszych dróg prowadzących po liniach siatki od punktu A do punktu C ?

Ćwiczenie 35

W kopercie znajduje się 10 kartek ponumerowanych od 1 do 10. Z tej koperty losujemy dowolnie wybraną liczbę kartek. Ile jest możliwości wylosowania w ten sposób takich kartek, że suma numerów: najmniejszego i największego zapisanych na tych wylosowanych kartkach jest równa 10?

Ćwiczenie 36

Wykaż, że

1. dla dowolnej liczby rzeczywistej x : $(2x + 3)^4 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

2. dla dowolnej liczby rzeczywistej x : $(x - 2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$.

3. dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$\left(2a + \frac{1}{2}b\right)^4 = 16a^4 + 16a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 + \frac{1}{16}b^4.$$

4. dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6a^5b + b^6.$$

Ćwiczenie 37

Oblicz, ile jest:

1. wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie trzech miejscach stoją cyfry parzyste.
2. wszystkich liczb naturalnych siedmiocyfrowych, w zapisie których na dokładnie czterech miejscach stoją cyfry parzyste.

Ćwiczenie 38

Oblicz, ile jest:

1. trzycyfrowych liczb naturalnych, spełniających jednocześnie dwa następujące warunki:
(1) cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek,
(2) cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności.
2. sześciocyfrowych liczb naturalnych, spełniających jednocześnie trzy następujące warunki:
(1) cyfra tysięcy jest większa od cyfry setek,
(2) cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek,
(3) cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności.

Ćwiczenie 39

Dwunastu chłopców bierze udział w szkolnej wycieczce. Oblicz, na ile sposobów można ich zakwaterować w czterech trzyosobowych pokojach.

Ćwiczenie 40

Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 22\}$ losujemy jednocześnie pięć liczb. Oblicz, ile jest wszystkich możliwości wylosowania takich pięciu liczb, których:

1. iloczyn jest parzysty.
2. suma jest parzysta.

Ćwiczenie 41

W talii 52 kart do brydża jest po 13 kart w każdym z czterech kolorów: trefl, karo, kier, pik. W każdym kolorze jest jeden as, a także trzy figury: król, dama, walet oraz 9 kart numerowanych od 2 do 10.

W rozdaniu brydżowym każdy z czterech graczy otrzymuje po 13 kart wybranych losowo z talii. Oblicz, na ile sposobów gracz może w takim rozdaniu dostać:

1. dokładnie 10 pików i dokładnie 2 kiery
2. trzy asy, trzy króle, trzy damy i trzy walety

Ćwiczenie 42

Oblicz, na ile sposobów można podzielić:

1. 10 graczy na dwie pięcioosobowe drużyny: „Niebieską” i „Żółtą”.
2. 10 graczy na dwie pięcioosobowe drużyny.
3. 12 graczy na 3 równoliczne drużyny: „Niebieską”, „Żółtą” i „Czerwoną”.
4. 12 graczy na 3 równoliczne drużyny.

Ćwiczenie 43

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych:

1. dziesięciocyfrowych, których suma cyfr jest równa 4.
2. piętnastocyfrowych o wszystkich cyfrach parzystych, których suma cyfr jest równa 10.
3. dwudziestocyfrowych o wszystkich cyfrach nieparzystych, których suma cyfr jest równa 28.
4. stucyfrowych o wszystkich cyfrach nieparzystych, których suma cyfr jest równa 123.

Ćwiczenie 44

Oblicz, ile jest wszystkich wyników:

1. siedmiokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których dokładnie dwa razy wypadło jedno oczko i dokładnie trzy razy wypadło sześć oczek.
2. dziesięciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których dokładnie trzy razy wypadło jedno oczko i dokładnie cztery razy wypadła parzysta liczba oczek.
3. ośmiokrotnego rzutu kostką sześcienną, w których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 20.
4. siedmiokrotnego rzutu kostką sześcienną, w których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 12.

Ćwiczenie 45

Z pudełka, w którym znajduje się 20 kul ponumerowanych od 1 do 20 losujemy równocześnie 3 kule. Oblicz, ile jest wszystkich możliwych wyników tego losowania, w których suma numerów wylosowanych kul jest podzielna przez 3.

Ćwiczenie 46

W szufladzie znajduje się 5 par rękawiczek, każde dwie pary są w różnych kolorach. Z pudełka losujemy 3 rękawiczki. Oblicz, ile jest takich wyników tego losowania, że:

1. wśród wylosowanych nie będzie żadnej pary rękawiczek.
2. wśród wylosowanych będzie dokładnie jedna para rękawiczek.

Ćwiczenie 47

W pudełku znajduje się 30 kul ponumerowanych od 1 do 30. Z pudełka losujemy 7 kul. Oblicz, ile jest takich wyników tego losowania, że:

1. wśród wylosowanych nie będzie żadnej pary kul, których suma numerów jest równa 31.
2. wśród wylosowanych będzie dokładnie jedna para kul, których suma numerów jest równa 31.
3. wśród wylosowanych będą dokładnie 2 pary kul, których suma numerów jest równa 31.
4. wśród wylosowanych będą dokładnie 3 pary kul, których suma numerów jest równa 31.

Ćwiczenie 48

W pewnej grze losowej gracz typuje 5 liczb spośród 32 początkowych dodatnich liczb całkowitych. Na ile sposobów można wytypować 5 liczb w tej grze tak, aby nie było wśród nich dwóch kolejnych?

Ćwiczenie 49

Z dziesięciu liter alfabetu: a , b , c , d , e , A , B , C , D , E tworzymy dziesięcioliterowy napis, w którym każda z tych liter występuje dokładnie raz. Oblicz, ile jest takich napisów, w których litera A znajdzie się przed B , B przed C , C przed D oraz D przed E , a ponadto odpowiednia mała litera będzie zapisana przed taką samą dużą.

Te warunki spełnia np. napis $baAcBdCeDE$.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych

Przykład 1

Zdarza się, że w wypowiedziach dotyczących przewidywania wyniku jakiegoś zdarzenia szacowany jest wynik tego zdarzenia. Spotykamy się więc z następującymi sformułowaniami „po pierwszym meczu nasze szanse na awans oceniam na 75 procent” czy „sądzę, że moje szanse na pierwszą nagrodę są mniejsze niż jeden do dziesięciu”, czy też „jestem przekonany, że zachwyty przy ocenie naszej oferty wyrazi co najmniej dwóch na trzech klientów naszego sklepu”.

Podając liczby: $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{3}$ oceniamy, na ile zajście zdarzenia, którego wynik nie jest znany, jest zbliżone do prawdy (prawdopodobne).

W tym rozdziale wprowadzimy umowy, które pozwolą nam obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń w pewnych nieskomplikowanych sytuacjach przy zastosowaniu formalnie opisanych metod.

W przykładach będziemy analizować wyniki doświadczeń losowych.

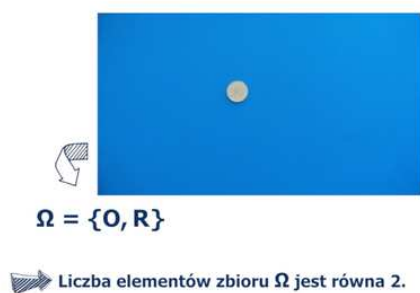
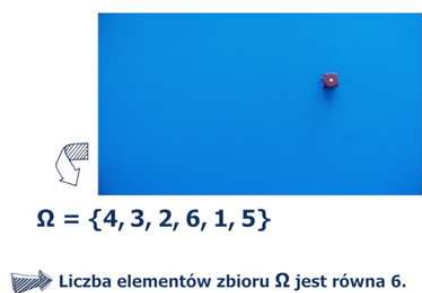
Przykład 2

Każdy z nas spotkał się z sytuacją, w której przy podjęciu pewnej decyzji wybieramy wynik losowania. Na przykład w amerykańskiej zawodowej lidze koszykówki NBA nabór nowych zawodników odbywa się w tak zwanej loterii draftowej. Według obowiązujących przepisów przystępuje do niej 14 zespołów z najgorszym bilansem zwycięstw z poprzedniego sezonu, przy czym zespoły te są ustawiane w kolejności od najgorszego bilansu do najlepszego. W tej loterii losuje się spośród 1000 kul, przy czym 250 z nich przydzielonych jest pierwszemu zespołowi z tego zestawienia, 199 – drugiemu, a 138 – trzeciemu itd. W ten sposób najgorszy zespół ma 25 % szans na wylosowanie pierwszego numeru. Powiemy więc, że prawdopodobieństwo, że najgorszy zespół wylosuje pierwszy numer w loterii draftowej jest równe $\frac{1}{4}$.

Jednak największe szanse nie gwarantują pierwszego numeru w takiej loterii. W 2008 roku pierwszy numer w draftie wylosowała drużyna Chicago Bulls, która w losowaniu miała przydzielone 17 kul.

Zatem przed losowaniem ocenilibyśmy prawdopodobieństwo, że właśnie ta drużyna wylosuje pierwszy numer jako równe $\frac{17}{1000}$.

Pojęcie prawdopodobieństwa

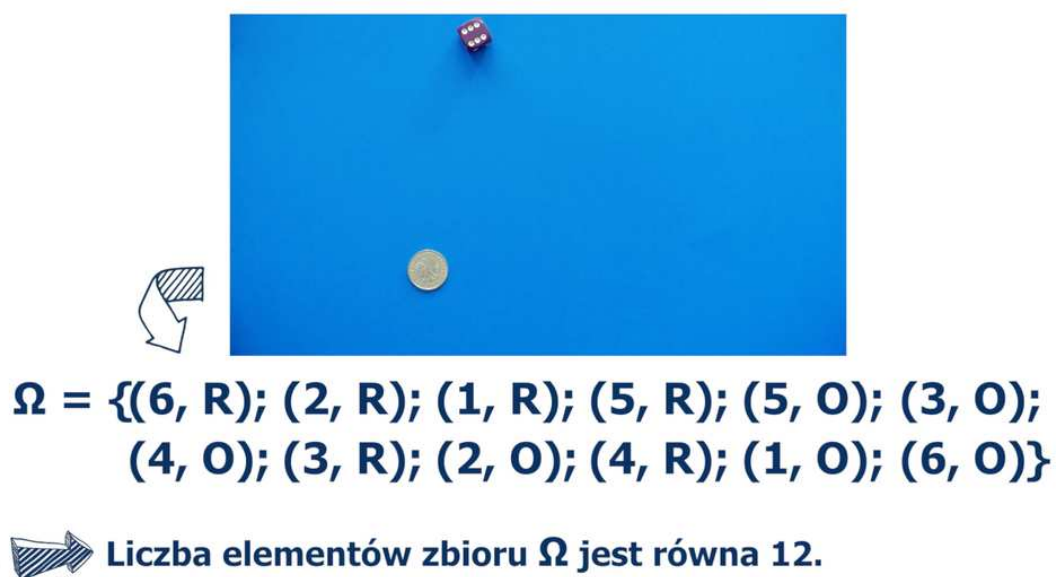


Film dostępny pod adresem </preview/resource/R138vRb8FndWA>

atrapa:opis animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1Pnzh2kUgJD1>

atrapa:opis animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

➡ Zdarzenie A polega na wyrzuceniu liczby oczek większej od 4.



$$A = \{6, 5\}$$

➡ Liczba elementów zbioru A jest równa 2.
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $\frac{2}{6}$.

➡ Zdarzenie B polega na wyrzuceniu parzystej liczby oczek.



$$B = \{4, 2, 6\}$$

➡ Liczba elementów zbioru B jest równa 3.
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B jest równe $\frac{3}{6}$.

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RMJplr7CJEyUM>

atrapa:opis animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

➡ Zdarzenie A polega na wyrzuceniu liczby oczek większej od 4.



$$A = \{6, 5\}$$

➡ Liczba elementów zbioru A jest równa 2.
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $\frac{2}{6}$.

➡ Zdarzenie B polega na wyrzuceniu liczby oczek mniejszej od 2.



$$B = \{1\}$$

➡ Liczba elementów zbioru B jest równa 1.
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B jest równe $\frac{1}{6}$.

➡ Zdarzenie C polega na wyrzuceniu liczby oczek mniejszej od 2 lub liczby oczek większej od 4.



$$C = \{6, 1, 5\}$$

➡ Liczba elementów zbioru C jest równa 3.
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia C jest równe $\frac{3}{6}$.

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RqBE4zhYpWDnL>

atrapa:opis animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

➡ Zdarzenie A polega na wyrzuceniu liczby oczek większej od 2.



$$A = \{4, 3, 6, 5\}$$

➡ Liczba elementów zbioru A jest równa 4.
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $\frac{4}{6}$.

➡ Zdarzenie B polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek.



$$B = \{3, 1, 5\}$$

➡ Liczba elementów zbioru B jest równa 3.
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B jest równe $\frac{3}{6}$.

➡ Zdarzenie C polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek
lub liczby oczek większej od 2.



$$C = \{4, 3, 6, 1, 5\}$$

➡ Liczba elementów zbioru C jest równa 5.
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia C jest równe $\frac{5}{6}$.

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RP3en70RFs5SG>

atrapa:opis animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

➡ Zdarzenie A polega na wyrzuceniu liczby oczek większej od 4.



$$A = \{6, 5\}$$

➡ Liczba elementów zbioru A jest równa 2.
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $\frac{2}{6}$.

➡ Zdarzenie B polega na wyrzuceniu liczby oczek mniejszej od 2.



$$B = \{1\}$$

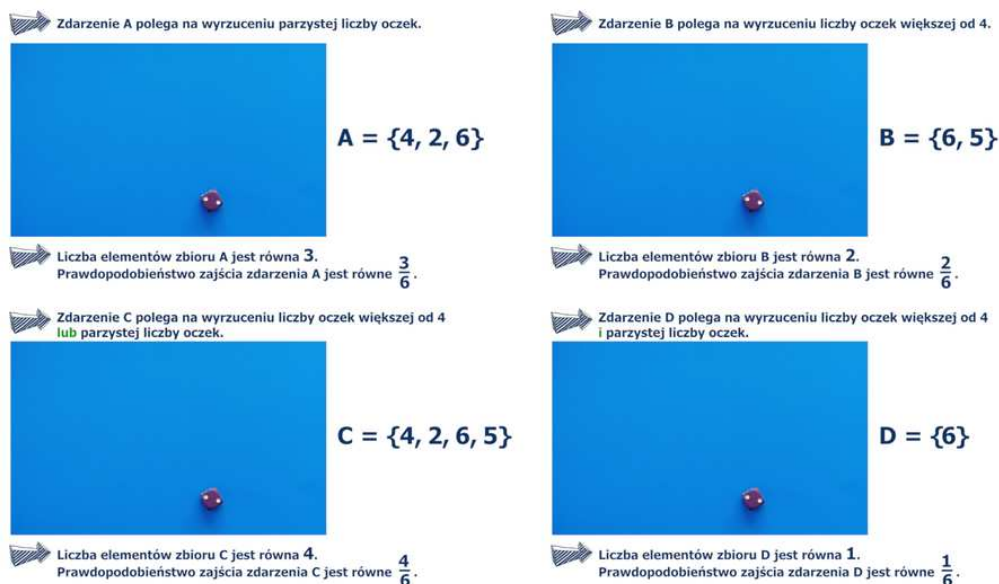
➡ Liczba elementów zbioru B jest równa 1.
Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B jest równe $\frac{1}{6}$.

Film dostępny pod adresem </preview/resource/RPDoHpXSIlkZr8>

atrapa:opis animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RUAPY9AwGG0Pg](https://preview.resource/RUAPY9AwGG0Pg)

atrapa:opis animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 3

W pewnej szóstej klasie dawno temu spotkali się trzech uczniowie: Janek, Piotrek i Andrzej. Zdarzyło się, że wszyscy korzystali z obiadów w szkolnej stołówce. Do każdego obiadu był tam serwowany deser. Na początku roku szkolnego Janek zaproponował Piotrkowi następującą zabawę: „Do końca roku szkolnego będziemy przychodzili na obiady. Niech w tym czasie o podziale naszych deserów zdecyduje los. Codziennie przed obiadem Andrzej rzuci dwa razy monetą. Jeśli raz wypadnie orzeł i raz wypadnie reszka, to ja zjem dwa desery: twój i mój. Jeśli dwa razy wypadnie orzeł, to Ty zjesz te dwa desery. Natomiast jeśli wypadnie dwa razy reszka, to każdy zje swój deser. Jak widzisz, umowa jest uczciwa, bo poza tymi trzema przypadkami innego wyniku dwóch rzutów monetą nie ma, a patrząc na te przypadki łącznie, każdy z nas ma równe szanse. Ja w jednym przypadku dostanę dwa desery, w drugim – żadnego, a w trzecim – jeden. I ty także: w jednym przypadku dostaniesz dwa desery, w innym – żadnego, a w jeszcze innym – jeden. Nie pomyśl sobie, że w zмовie z Andrzejem szykujemy jakąś sztuczkę z monetą. Gdybyś chciał, to możemy się umówić, że monetę do rzucania będziemy wybierali wspólnie, a przy rzucaniu będziemy się zmieniali. To jak, zgadzasz się na taki układ? Mielibyśmy niezłą zabawę przed obiadem.”

Piotrek chwilę pomyślał, a następnie odmówił. Od razu też wytłumaczył Jankowi, dlaczego uważa, że taka umowa wcale nie jest uczciwa.

Podamy argumenty, które przemawiają za tym, że Piotrek powinien odrzucić pomysł Janka. Dwukrotny rzut monetą to doświadczenie, które polega na wykonaniu po kolei dwóch czynności. Każda z nich może skończyć się na jeden z dwóch sposobów: albo wypadnie orzeł, albo wypadnie reszka. Na podstawie reguły mnożenia stwierdzamy, że liczba wszystkich możliwych wyników dwukrotnego rzutu monetą jest równa

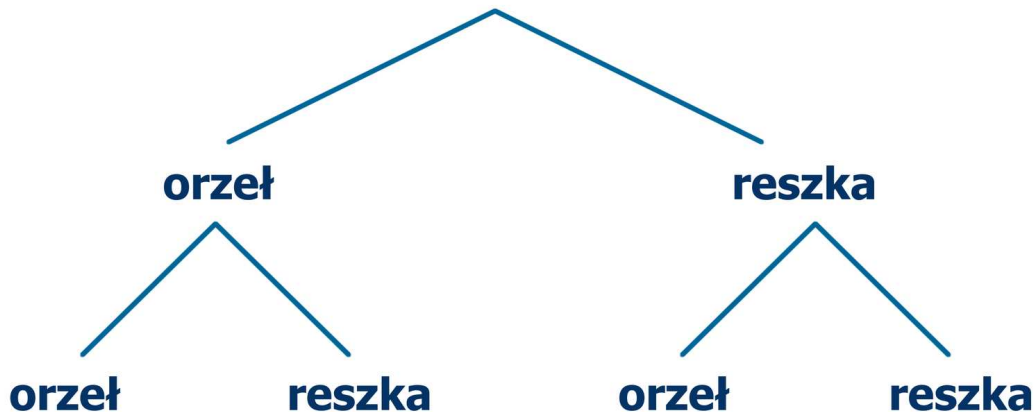
$$2 \cdot 2 = 4.$$

Wszystkie wyniki takiego doświadczenia można przedstawić w tabeli

Tabela. Dane

<i>I</i> rzut/ <i>II</i> rzuty	Orzeł	Reszka
orzeł	(orzeł, orzeł)	(orzeł, reszka)
reszka	(reszka, orzeł)	(reszka, reszka)

Lub za pomocą drzewa:



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z tabeli możemy też odczytać dwuelementowe ciągi, które opisują wszystkie możliwe wyniki dwukrotnego rzutu monetą:

(orzeł, orzeł), (orzeł, reszka), (reszka, orzeł), (reszka, reszka).

Są więc dokładnie cztery możliwe wyniki dwukrotnego rzutu monetą. Pewnie i bez powyższego opisu potrafi to uzasadnić każdy, kto zrozumiał podstawowe zasady obowiązujące w kombinatoryce (omawialiśmy je w poprzednich rozdziałach).

Typowa moneta znajdująca się w obiegu może być uznana za symetryczną. Oznacza to, że przy dużej liczbie rzutów taką monetą średnio połowa z nich skończy się wyrzuceniem orła, a połowa – reszki. Zatem i każdy z czterech wyników dwukrotnego rzutu monetą będzie wypadał średnio tak samo często, jak każdy z pozostałych.

Wracamy do zabawy opisanej w poprzednim przykładzie. Jak już zauważyliśmy: wbrew sugestiom Janka mamy do rozpatrzenia nie trzy, a cztery przypadki. Popatrzmy na rozdział deserów w każdym z tych przypadków:

- (orzeł, orzeł) – Piotrek zje dwa desery, Janek – żadnego,
- (orzeł, reszka) – Piotrek nie zje żadnego deseru, a Janek zje dwa,
- (reszka, orzeł) – Piotrek nie zje żadnego deseru, a Janek zje dwa,
- (reszka, reszka) – Piotrek zje jeden deser i Janek zje jeden deser.

Wobec tego w ciągu kolejnych czterech dni, kiedy chłopcy mają do rozdzielenia 8 deserów, 5 deserów zje Janek, a tylko trzy – Piotrek. Zatem kontynuowanie przez dłuższy czas losowego wyboru deserów metodą zaproponowaną przez Janka jest dla Piotrka zdecydowanie niekorzystne.

Podając te wartości, oceniliśmy jedynie szanse każdego z chłopców na otrzymanie deseru. Nie należy

się jednak spodziewać, że w ciągu dowolnie wybranych czterech dni, przy takiej metodzie losowego rozdziału deserów, Piotrek dostanie dokładnie 3 z ośmiu możliwych do otrzymania. Natomiast przy przeprowadzeniu większej liczby powtórzeń tego doświadczenia liczba deserów przeznaczonych dla Piotra będzie zbliżała się do pewnej wartości, którą nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia, że w wyniku podanej metody przydziału deser dostanie Piotrek.

Można formalnie wykazać, że 3 to oczekiwana liczba deserów, które w ciągu czterech dni otrzyma Piotrek, gdyby zastosował się do metody zaproponowanej przez Janka. Metody matematyczne, których do tego celu należałoby użyć, stosowane są w rachunku prawdopodobieństwa.

Przykład 4

1. Każdy oficjalny mecz piłki nożnej zaczyna się od losowania drużyny, która rozpocznie rozgrywkę. Sędzia rzuca wtedy monetą, przy czym robi to w taki sposób, żeby nikt nie miał wątpliwości, że wynik takiego losowania będzie przypadkowy. Przed takim losowaniem jesteśmy przekonani, że obie zainteresowane drużyny mają równe szanse rozpoczęcia gry od środka boiska. Za każdym razem takie losowanie uznamy więc za doświadczenie losowe.
2. Kilkuosobową grę w karty rozpoczyna się od wyboru osoby rozdającej. Chcemy, aby metoda wyboru dawała równe szanse każdemu z graczy. Jednym ze sposobów jest losowanie przez każdego z graczy jednej karty z pełnej talii. Zazwyczaj rozdającym zostaje ta osoba, która wylosuje kartę najniższą według rangi w danej grze. Taki wybór osoby rozdającej uznamy także za doświadczenie losowe.
3. Przypuśćmy, że o wyborze kapitana w przypadkowo dobranej pięcioosobowej drużynie koszykówki chcemy zadecydować losowo – możemy to zrobić, przygotowując wcześniej losy. Wystarczy w tym celu wziąć pięć takich samych kartek papieru, cztery pozostawić puste, a na jednej z nich postawić umówiony znak lub napisać słowo „kapitan”. Następnie złożyć kartki w podobny sposób i wrzucić do takiego pojemnika, z którego gracze losują po jednej kartce, nie widząc wybieranego przedmiotu. Kapitanem zostaje ten z nich, który wylosuje wyróżnioną kartkę.

W prezentowanych w tym rozdziale przykładach będziemy zajmować się doświadczeniami, które (podobnie jak przywołane powyżej) możemy uznać za losowe. Przedmioty używane w opisywanych doświadczeniach są powszechnie dostępne, więc każdy może samodzielnie takie doświadczenie przeprowadzić tyle razy, ile tylko uzna za stosowne. Naszym głównym zadaniem będzie jednak takie opisanie modelu przeprowadzanego doświadczenia, aby dla ustalenia prawdopodobieństwa otrzymania konkretnego wyniku wystarczyło zrozumienie podstawowych zasad rządzących rachunkiem prawdopodobieństwa.

Wprowadzimy podstawowe pojęcia, którymi będziemy się posługiwać przy obliczaniu prawdopodobieństw.

Każdy możliwy wynik, który może pojawić się w doświadczeniu losowym, będziemy nazywać zdarzeniem elementarnym.

Przykład 5

W doświadczeniu losowym, polegającym na dwukrotnym rzucie symetryczną monetą, rozróżnimy cztery zdarzenia elementarne:

- „za pierwszym razem wypadł orzeł, a za drugim razem wypadł orzeł”, co w skrócie zapiszemy jako dwuelementowy ciąg wyników (orzeł, orzeł),
- „za pierwszym razem wypadł orzeł, a za drugim razem wypadła reszka”, co w skrócie zapiszemy jako (orzeł, reszka),

- „za pierwszym razem wypadła reszka i za drugim razem wypadł orzeł”, co w skrócie zapiszemy jako (reszka, orzeł),
- „za pierwszym razem wypadła reszka i za drugim razem wypadła reszka”, co w skrócie zapiszemy jako (reszka, reszka).

W omawianym doświadczeniu używaliśmy monety symetrycznej, więc spodziewamy się, że przy dużej liczbie powtórzeń każde z wypisanych powyżej zdarzeń elementarnych pojawi się z podobną średnią częstością. Uznajemy zatem, że wszystkie te zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych będziemy oznaczali za pomocą dużej greckiej litery Ω (omega).

Fakt, że w rozpatrywanym doświadczeniu zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{(\text{orzeł}, \text{orzeł}), (\text{orzeł}, \text{reszka}), (\text{reszka}, \text{orzeł}), (\text{reszka}, \text{reszka})\}$$

liczy cztery elementy, zapiszemy symbolicznie $|\Omega| = 4$.

W rozwiązaniach kilku kolejnych przykładowych zadań będziemy wypisywali zdarzenia elementarne i na tej podstawie określali zbiór Ω wszystkich zdarzeń elementarnych i liczbę jego elementów.

Definicja: Zdarzenie

Dowolny podzbiór zbioru Ω będziemy nazywać zdarzeniem, a elementy takiego podzbioru będziemy nazywać **zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi temu zdarzeniu**.

Zbiór pusty, czyli zdarzenie, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne, nazywamy zdarzeniem niemożliwym.

Zbiór Ω , czyli zdarzenie, któremu sprzyja każde zdarzenie elementarne, nazywamy zdarzeniem pewnym.

Przykład 6

Ponieważ w doświadczeniu rozpatrywanym w poprzednim przykładzie zbiór Ω ma cztery elementy, to różnych zdarzeń w tym doświadczeniu jest $2^4 = 16$ (tyle jest bowiem wszystkich podzbiorów czteroelementowego zbioru Ω).

Przykładowymi zdarzeniami w doświadczeniu losowym, polegającym na dwukrotnym rzucie symetryczną monetą są:

- $A = \{(\text{orzeł}, \text{reszka}), (\text{reszka}, \text{orzeł})\}$. Takiemu zdarzeniu sprzyjają dwa zdarzenia elementarne, więc zapiszemy, że $|A| = 2$. Zdarzenie to można byłoby opisać słownie, np. tak: A – zdarzenie polegające na tym, że wypadło tyle samo orłów, co reszek.
- $B = \{(\text{orzeł}, \text{orzeł}), (\text{orzeł}, \text{reszka}), (\text{reszka}, \text{orzeł})\}$. Temu zdarzeniu sprzyjają trzy zdarzenia elementarne, zatem $|B| = 3$. Zdarzenie to można byłoby opisać słownie, np. tak: B – zdarzenie polegające na tym, że wypadł co najmniej jeden orzeł.
- $C = \{(\text{reszka}, \text{reszka})\}$. Temu zdarzeniu sprzyja jedno zdarzenie elementarne, stąd $|C| = 1$. Zdarzenie to można byłoby opisać słownie, np. tak: C – zdarzenie polegające na tym, że wypadło mniej orłów niż reszek.

Rozpatrzmy zdarzenia opisane słownie:

- D – zdarzenie polegające na tym, że wypadło trzy razy więcej orłów niż reszek. Zbiór D jest pusty – nie ma zdarzeń elementarnych, które sprzyjają temu zdarzeniu. Zdarzenie D jest więc niemożliwe.

- E – zdarzenie polegające na tym, że wypadła parzysta liczba orłów. Zdarzeniu E sprzyjają dwa zdarzenia elementarne: (orzeł, orzeł), (reszka, reszka), zatem zapiszemy $E = \{(\text{orzeł}, \text{orzeł}), (\text{reszka}, \text{reszka})\}$, a co za tym idzie: $|E| = 2$.
- F – zdarzenie, że wypadły co najwyżej dwie reszki. Zdarzeniu F sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, zatem zapiszemy $F = \Omega$. Oznacza to, że F jest zdarzeniem pewnym.

Fakt, że zdarzenie A jest podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych Ω zapisujemy też, używając symbolu zawierania zbiorów: $A \subset \Omega$.

Określimy teraz, jak będziemy obliczać prawdopodobieństwo w tak zwanym schemacie klasycznym.

Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Rozpatrzmy doświadczenie losowe, w którym wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, a Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.

Prawdopodobieństwem $P(A)$ zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy wówczas iloraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Przykład 7

W doświadczeniu losowym polegającym na dwukrotnym rzucie symetryczną monetą wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Zatem obliczając prawdopodobieństwa zdarzeń, możemy skorzystać z definicji klasycznej. Obliczymy w ten sposób prawdopodobieństwa zdarzeń opisanych w poprzednim przykładzie.

Przypomnijmy, że w tym doświadczeniu $|\Omega| = 4$. Oznacza to, że:

- jeżeli $A = \{(\text{orzeł}, \text{reszka}), (\text{reszka}, \text{orzeł})\}$, to $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,
- jeżeli $B = \{(\text{orzeł}, \text{orzeł}), (\text{orzeł}, \text{reszka}), (\text{reszka}, \text{orzeł})\}$, to $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$,
- jeżeli $C = \{(\text{reszka}, \text{reszka})\}$, to $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$,
- jeżeli D to zdarzenie, że wypadło trzy razy więcej orłów niż reszek, to $D = \emptyset$, stąd $P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{0}{4} = 0$,
- jeżeli E to zdarzenie, że wypadła parzysta liczba orłów, to $E = \{(\text{orzeł}, \text{orzeł}), (\text{reszka}, \text{reszka})\}$, stąd $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,
- jeżeli F to zdarzenie, że wypadły co najwyżej dwie reszki, to $F = \Omega$, stąd $P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{4}{4} = 1$.

Warto zapamiętać dwa wnioski wynikające z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

1. $P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = \frac{0}{|\Omega|} = 0$, co oznacza, że prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0,
2. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$, co oznacza, że prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1.

Własności prawdopodobieństwa

Przykład 8

W kopercie znajduje się 11 kartek, ponumerowanych od 1 do 11. Z tej koperty wybieramy losowo jedną kartkę. Obliczymy prawdopodobieństwo otrzymania:

1. liczby podzielnej przez 4,
2. liczby niepodzielnej przez 4.

Za zdarzenie elementarne w takim doświadczeniu przyjmujemy wylosowanie jednej spośród 11 kartek. Ponieważ wylosowana kartka jest jednoznacznie przypisana do zapisanego na niej numeru, więc nie doprowadzimy do żadnych nieporozumień, kiedy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych zapiszemy skrótowo

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

Mamy więc $|\Omega| = 11$.

Oznaczmy

A – zdarzenie polegające na tym, że wylosowano liczbę podzielną przez 4,

B – zdarzenie polegające na tym, że wylosowano liczbę niepodzielną przez 4.

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, wobec tego przy obliczaniu prawdopodobieństw zdarzeń A , B , C skorzystamy z definicji klasycznej.

1. Wśród liczb ze zbioru Ω znajdujemy liczby podzielne przez 4 – są to 4 oraz 8, zatem możemy zapisać skrótowo, że $A = \{4, 8\}$. Oznacza to, że są dwa zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A , więc $|A| = 2$. Stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{11}$.
2. Wśród liczb ze zbioru Ω znajdujemy wszystkie liczby niepodzielne przez 4. Zapisujemy zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B : $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$. Stąd $|B| = 9$, a więc

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{9}{11}.$$

Zauważmy, że do opisanego zbioru B należą wszystkie zdarzenia elementarne, które nie sprzyjają zdarzeniu A (możemy też powiedzieć, że zbiór B jest dopełnieniem zbioru A do zbioru Ω).

Taką zależność między dwoma zdarzeniami opisuje się za pomocą pojęcia zdarzenia przeciwnego.

Definicja: zdarzenie przeciwne

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A , należącego do zbioru zdarzeń elementarnych Ω , nazywamy takie zdarzenie A' należące do Ω , któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, które nie sprzyjają zdarzeniu A .

Z tej definicji wynika, że również zdarzenie A jest zdarzeniem przeciwnym do A' .

Zauważmy, że ponieważ zdarzenia A i A' są rozłączne ($A \cap A' = \emptyset$) oraz ich sumą jest zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω ($A \cup A' = \Omega$), więc liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest sumą liczb zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A oraz zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A' .

$$|\Omega| = |A| + |A'|$$

Jeśli obie strony otrzymanej równości podzielimy przez liczbę dodatnią $|\Omega|$, to otrzymamy

$$\frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|A'|}{|\Omega|}$$

Ponieważ A oraz A' są zdarzeniami ze zbioru Ω , więc liczba $\frac{|A|}{|\Omega|}$ to prawdopodobieństwo zdarzenia A , natomiast liczba $\frac{|A'|}{|\Omega|}$ to prawdopodobieństwo zdarzenia A' . Stąd

$$P(A) + P(A') = 1.$$

Prawdziwe jest zatem twierdzenie.

Twierdzenie: o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego

Założmy, że A jest zdarzeniem ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω . Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia A' , przeciwnego do A , wyraża się wzorem

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Przykład 9

Założmy, że w pewnym doświadczeniu losowym dane jest zdarzenie A oraz zachodzi równość $3 \cdot P(A) = 7 \cdot P(A')$, gdzie A' jest zdarzeniem przeciwnym do A . Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia A .

Przekształcamy równość daną w treści zadania, korzystając z zależności między $P(A')$ i $P(A)$

$$3 \cdot P(A) = 7 \cdot (1 - P(A))$$

$$3 \cdot P(A) = 7 - 7 \cdot P(A)$$

$$10 \cdot P(A) = 7$$

Stąd wynika, że

$$P(A) = \frac{7}{10}.$$

Przykład 10

Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wybieramy losowo jedną liczbę. Obliczmy prawdopodobieństwo, że otrzymana liczba jest podzielna przez 6 lub przez 10.

Za zdarzenie elementarne w takim doświadczeniu przyjmujemy wylosowanie jednej spośród 90 dwucyfrowych liczb naturalnych. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych zapiszemy

$$\Omega = \{10, 11, 12, \dots, 99\}$$

- sposób I

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu „otrzymana liczba jest podzielna przez 6 lub przez 10”:

$\{10, 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 50, 54, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 90, 96\}$.

Jest ich 21.

Korzystając z definicji klasycznej, stwierdzamy więc, że szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{21}{90} = \frac{7}{30}$.

- sposób II

Oznaczmy:

A – zdarzenie, że wylosowano liczbę podzielną przez 6,

B – zdarzenie, że wylosowano liczbę podzielną przez 10.

Zatem

$A = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$,

$B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$.

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo mamy obliczyć: „otrzymana liczba jest podzielna przez 6 lub przez 10”, to suma zdarzeń A oraz B .

Zdarzenia A i B nie są rozłączne, a ich część wspólna to zdarzenie

$$A \cap B = \{30, 60, 90\}$$

Przy obliczeniu zadanego prawdopodobieństwa skorzystamy ze wzoru na liczbę elementów sumy dwóch zbiorów

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ponieważ $|A| = 15$, $|B| = 9$ i $|A \cap B| = 3$, to $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 15 + 9 - 3 = 21$.

Oznacza to, że prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cup B$ jest równe

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}.$$

Zauważmy, że dla dowolnych zdarzeń A , B ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω ze wzoru na liczbę elementów sumy dwóch zbiorów

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

wynika, że

$$\frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} - \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}.$$

Ponieważ $A \cup B$ oraz $A \cap B$ są również zdarzeniami ze zbioru Ω , więc na mocy definicji klasycznej otrzymujemy zależność

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Prawdziwe jest więc twierdzenie.

Twierdzenie: o prawdopodobieństwie sumy dwóch zdarzeń

Założmy, że A oraz B są zdarzeniami ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω . Wtedy prawdopodobieństwo sumy $A \cup B$ zdarzeń A oraz B wyraża się wzorem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

gdzie $A \cap B$ to zdarzenie, które jest iloczynem (częścią wspólną) zdarzeń A , B .

Przykład 11

Założmy, że w pewnym doświadczeniu dane są zdarzenia A i B , przy czym ich prawdopodobieństwa są równe odpowiednio $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{11}$. W tym doświadczeniu pewne jest zdarzenie, że zajdzie zdarzenie A' lub zdarzenie B' (gdzie A' oraz B' oznaczają zdarzenia przeciwne do zdarzeń odpowiednio A i B).

Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia, że zajdzie jednocześnie zdarzenie A' i zdarzenie B' .

Obliczamy

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

oraz

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}.$$

Z treści zadania wiemy, że $P(A' \cup B') = 1$, a mamy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $A' \cap B'$.

Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie sumy, zapisujemy

$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B')$. Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia, że zajdzie jednocześnie zdarzenie A' i zdarzenie B' jest równe

$$P(A' \cap B') = P(A') + P(B') - P(A' \cup B') = \frac{5}{7} + \frac{8}{11} - 1 = \frac{34}{77}.$$

Przykład 12

Wśród 216 uczniów klas maturalnych pewnej szkoły ponadgimnazjalnej przeprowadzono sondaż na temat poczytności dwóch tygodników: „Widoki” oraz „Rokowania”. Okazało się, że tygodnik „Widoki” czytają 144 osoby, tygodnik „Rokowania” czytają 132 osoby, a oba te tygodniki czyta 80 osób.

Obliczmy prawdopodobieństwo p zdarzenia, że osoba wybrana losowo z tej grupy nie czyta żadnego z tych tygodników.

Za zdarzenie elementarne przyjmujemy wylosowanie jednej osoby z grupy ankietowanych uczniów.

Zatem $|\Omega| = 216$.

Oznaczmy

- A – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba czyta tygodnik „Widoki”,

- B – zdarzenie, że wylosowana osoba czyta tygodnik „Rokowania”.

Z treści zadania wynika, że $|A| = 144$, $|B| = 132$ oraz $|A \cap B| = 80$, zatem liczba $|A \cup B|$ osób, które czytają jeden lub drugi tygodnik jest równa

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 144 + 132 - 80 = 196$$

Stąd

$$|\Omega| - |A \cup B| = 216 - 196 = 20$$

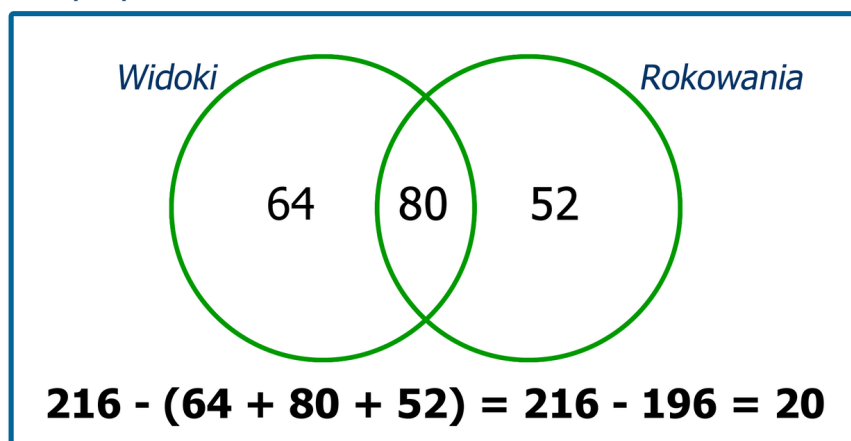
to liczba osób, które nie czytają żadnego z tych tygodników.

Oznacza to, że szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$p = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}.$$

Zależności między liczbami uczniów w tym zadaniu można przedstawić schematycznie za pomocą diagramu.

wszyscy uczniowie - **216**



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wpisaliśmy w nim po kolei

- liczbę uczniów, którzy czytają oba tygodniki: 80,
- liczbę uczniów, którzy czytają tygodnik „Widoki” i nie czytają tygodnika „Rokowania”:
 $144 - 80 = 64$,
- liczbę uczniów, którzy czytają tygodnik „Rokowania” i nie czytają tygodnika „Widoki”:
 $132 - 80 = 52$,
- liczbę uczniów, którzy nie czytają żadnego z tych dwóch tygodników: $216 - (64 + 80 + 52) = 20$.

Przykład 13

Z pudełka zawierającego 8 kul ponumerowanych od 1 do 8 losujemy jednocześnie dwie kule.

Obliczymy prawdopodobieństwo zajścia takiego zdarzenia A , że suma wylosowanych liczb jest równa 11.

Przedstawimy dwa sposoby opisu zbioru zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

- sposób I

Ponieważ z pudełka zawierającego 8 kul losujemy jednocześnie dwie kule, więc zdarzenie elementarne zapisujemy jako dwuelementowy podzbiór $\{a, b\}$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Zatem zdarzeń elementarnych jest tyle, ile dwuelementowych podzbiorów zbioru ośmioelementowego, stąd

$$|\Omega| = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Zdarzeniu, że suma wylosowanych liczb jest równa 11, sprzyjają następujące 3 zdarzenia elementarne: $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$. Wobec tego $|A| = 3$, co oznacza, że

$$P(A) = \frac{3}{28}.$$

- sposób II

Ponieważ dodawanie jest przemienne, więc suma nie zmieni się, kiedy rozróżnimy kule ze względu na kolejność, w której zostały wylosowane. Każde zdarzenie elementarne zapisujemy wtedy jako dwuelementowy ciąg (a, b) , gdzie a, b są różnymi elementami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ numerów kul znajdujących się w pudełku. Wszystkich zdarzeń elementarnych jest więc

$$|\Omega| = 8 \cdot 7 = 56.$$

Zdarzeniu, że suma wylosowanych liczb jest równa 11 sprzyjają następujące zdarzenia elementarne: $(3, 8)$, $(4, 7)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(7, 4)$, $(8, 3)$. Stąd $|A| = 6$, co oznacza, że

$$P(A) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}.$$

Doświadczenia dwuetapowe - metoda drzewa

Przykład 14

Uczniowie trzeciej klasy otrzymali do rozwiązania zestaw 50 zadań powtórzeniowych z matematyki. Zadania były ponumerowane od 1 do 50. Pewna ich część to zadania kodowane, a pozostałe to zadania zamknięte.

Ania rozwiązała wszystkie te zadania w ciągu dwóch dni. Pierwszego dnia rozwiązała 60% zadań zestawu, przy czym połowę tych zadań stanowiły zadania kodowane. Wśród zadań rozwiązanych przez Anię drugiego dnia co piąte było kodowane.

Obliczmy, jakie jest prawdopodobieństwo p zdarzenia, że przy losowaniu zadania z tego zestawu otrzymamy zadanie kodowane.

- sposób I

Za zdarzenie elementarne w opisanym doświadczeniu przyjmujemy wylosowanie jednego spośród 50 zadań.

Obliczenia liczby zadań kodowanych przeprowadzimy w dwóch etapach.

1. Obliczymy liczbę zadań rozwiązanych w każdym dniu przez Anię: w pierwszym dniu Ania rozwiązała $60\% \cdot 50 = 30$ zadań, a więc w drugim dniu Ania rozwiązała 20 zadań (to jest 40% wszystkich).
2. Obliczymy liczbę zadań kodowanych rozwiązanych przez dziewczynkę pierwszego dnia oraz drugiego dnia.

Pierwszego dnia dziewczynka rozwiązała 15 zadań kodowanych (jest to połowa z 30 zadań rozwiązanych w tym dniu), natomiast drugiego dnia Ania rozwiązała $\frac{1}{5} \cdot 20 = 4$ zadania kodowane. Wobec tego wszystkich zadań kodowanych jest w tym zestawie $15 + 4 = 19$.

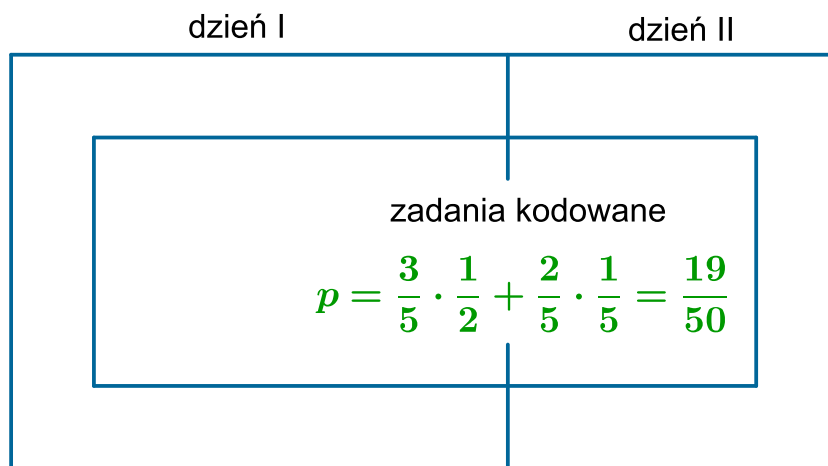
Mamy model klasyczny (zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne), co oznacza, że szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$p = \frac{19}{50}.$$

- sposób II

Zauważmy, że połowa z $\frac{3}{5}$ wszystkich zadań to zadania kodowane rozwiązane przez Anię pierwszego dnia, a $\frac{1}{5}$ z $\frac{2}{5}$ wszystkich zadań to zadania kodowane rozwiązane przez Anię drugiego dnia. Zatem zadania kodowane stanowią $\frac{19}{50}$ wszystkich zadań (jak to jest pokazane na diagramie), co oznacza, że szukane prawdopodobieństwo jest równe $p = \frac{19}{50}$.

(31.93, -1.1)

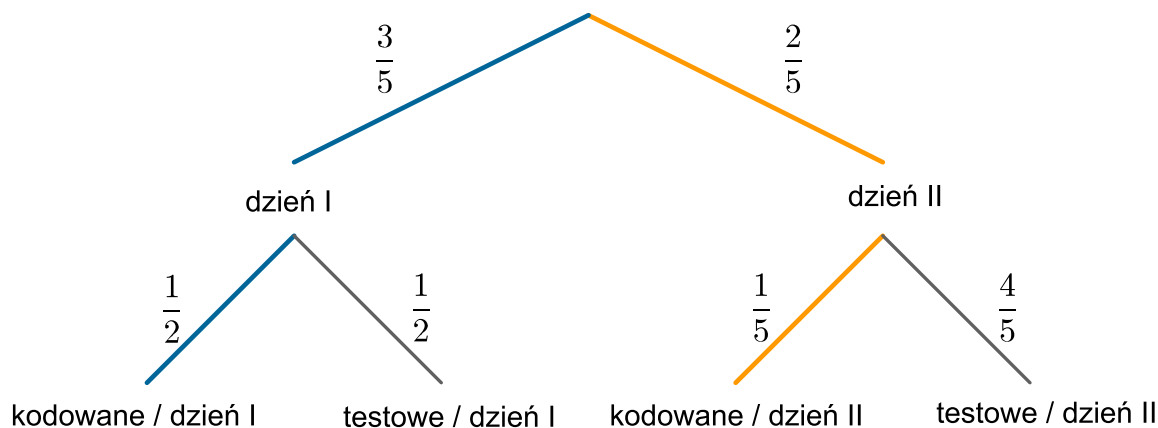


(48.04, -7.29)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przebieg omawianego doświadczenia można też przedstawić schematycznie w postaci drzewa. Rozróżnimy dwa etapy: (1) wybór dnia, w którym zadanie zostało rozwiązane, (2) wybór typu zadania rozwiązanego w danym dniu.

Na rysunku poniżej pogrubioną linią zaznaczyliśmy gałęzie odpowiadające wynikom: wylosowano zadanie kodowane rozwiązane pierwszego dnia (na niebiesko), wylosowano zadanie kodowane rozwiązane drugiego dnia (na pomarańczowo).



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na każdej gałęzi zapisaliśmy też, jakie jest prawdopodobieństwo wyboru danej opcji na konkretnym etapie doświadczenia.

Zbierając te informacje, zauważymy zasadę, według której obliczamy szukane prawdopodobieństwo, idąc po każdej z pogrubionych gałęzi. Obliczamy iloczyn prawdopodobieństw zdarzeń z kolejnych etapów, a następnie obliczamy sumę uzyskanych iloczynów:

$$p = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

Stąd

$$p = \frac{19}{50}.$$

W kolejnym przykładzie pokażemy, jak umiejętności związane z obliczaniem prawdopodobieństwa można wykorzystać do analizowania informacji, jakimi jesteśmy zasypywani przez media wykorzystywane przez reklamodawców.

Przykład 15

Statystyki pokazują, że w pewnym kraju 1 osoba na 1000 jest nosicielem pewnego groźnego wirusa. Firma XMed ogłosiła, że opracowała badanie pozwalające skutecznie rozpoznać nosicielstwo tego wirusa. Przedstawiciele tej firmy przypominają, że nosiciel wirusa może stać się źródłem zakażenia dla osób przebywających w jego otoczeniu i wrażliwych na infekcje, dlatego też wykrywanie oraz leczenie nosicieli wirusów jest społecznie pożądane. Podano przy tym, że po przeprowadzeniu badania opracowanego przez XMed wirus zostanie prawidłowo wykryty u nosiciela w 99,9% przypadków, a w 99% przypadków da się jednoznacznie określić, że badana osoba nie jest nosicielem wirusa. Ustalimy, czy na podstawie tych danych jesteśmy w stanie ocenić skuteczność badania opracowanego przez XMed.

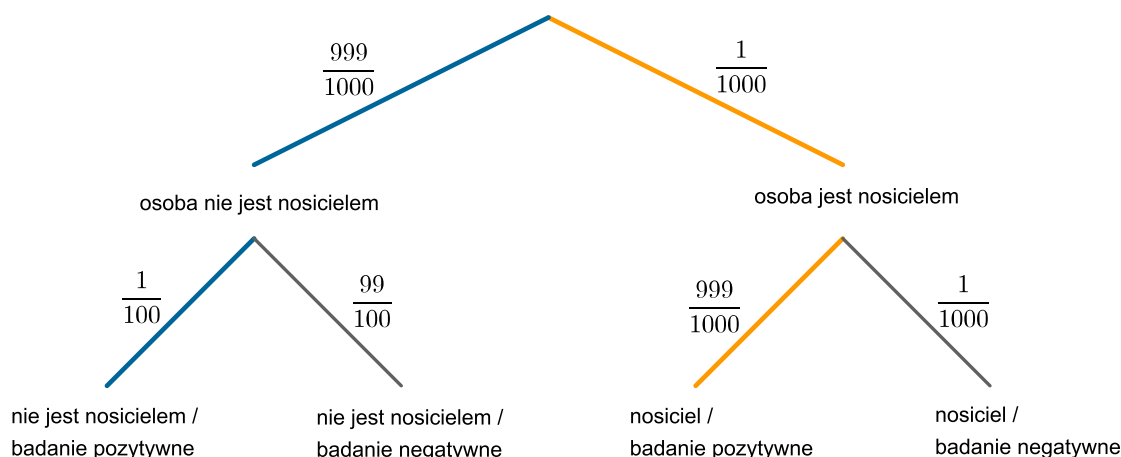
W tym celu obliczymy najpierw, jakie jest prawdopodobieństwo, że badanie opracowane przez XMed wykryje nosicielstwo.

Założmy, że wybieramy losowo obywatela tego kraju. Z treści zadania wynika, że

- prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy nosiciela wirusa, jest równe $\frac{1}{1000}$,
- prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy osobę, która nie jest nosicielem wirusa, jest równe $\frac{999}{1000}$,

- prawdopodobieństwo tego, że w wyniku badania wirus zostanie wykryty u nosiciela, jest równe $\frac{999}{1000}$,
- prawdopodobieństwo tego, że w wyniku badania wirus zostanie wykryty u osoby, która nie jest nosicielem, jest równe $\frac{1}{100}$.

Zapiszmy te prawdopodobieństwa na drzewku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wobec tego prawdopodobieństwo p zdarzenia, że badanie wykryje nosicielstwo, jest równe

$$p = \frac{1}{1000} \cdot \frac{999}{1000} + \frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{999}{1000} + \frac{999}{1000} \cdot \frac{10}{1000} = \frac{999 \cdot (1+10)}{1000 \cdot 1000} = \frac{999 \cdot 11}{1000 \cdot 1000} = 0,01098 \dots \approx 0,011$$

Zatem o nosicielstwie dowiaduje się po badaniu średnio jedenaście osób na tysiąc.

Postawmy się w sytuacji osoby, która po badaniu otrzymała informację, że jest nosicielem wirusa.

Ustalimy, na ile ta informacja jest wiarygodna – w tym celu obliczymy, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że osoba, która na podstawie badania została uznana za nosiciela, jest rzeczywiście nosicielem wirusa.

Założmy, że kraj opisany w treści zadania ma milion mieszkańców. Wtedy na podstawie danych z treści zadania 1000 z nich to nosiciele wirusa, a 999000 to osoby, które nie są nosicielami.

W wyniku badania przeprowadzonego przez XMed:

999 z 1000 nosicieli dowie się o tym fakcie (wirus zostanie prawidłowo wykryty u nosiciela w 99,9% przypadków),

9990 spośród 999000 pozostałych osób również zostanie zdiagnozowanych jako nosiciele wirusa (w 99% przypadków da się jednoznacznie określić, że badana osoba nie jest nosicielem wirusa), a przecież żadna z nich nosicielem nie jest.

Dyskwalifikująca dla skuteczności tego badania jest jednak proporcja tych dwóch grup osób, które otrzymały informację o nosicielstwie: jest wśród nich 10 razy więcej osób, które nie są nosicielami wirusa!

Wobec tego prawdopodobieństwo zdarzenia, że osoba, która w wyniku badania firmy XMed dowie się o nosicielstwie jest rzeczywiście nosicielem wirusa, jest równe $\frac{1}{11}$. To zdecydowanie za mało, żeby uznać to badanie za skuteczne.

Ćwiczenie 1

W pewnej klasie jest 3 razy więcej chłopców niż dziewcząt. Losujemy jedną osobę z tej klasy. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy dziewczynkę jest równe

☐ $\frac{3}{7}$

☐ $\frac{3}{4}$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 2

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 5. Wówczas

☐ $p = \frac{1}{5}$

☐ $p = \frac{1}{6}$

☐ $p < \frac{1}{6}$

☐ $p > \frac{1}{5}$

Ćwiczenie 3

Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że będzie to liczba o sumie cyfr równej 16, jest równe

☐ $\frac{1}{30}$

☐ $\frac{16}{90}$

☐ $\frac{1}{16}$

☐ $\frac{3}{89}$

Ćwiczenie 4

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że dwukrotnie otrzymamy liczbę oczek mniejszą od 3, jest równe

☐ $\frac{2}{3}$

☐ $\frac{2}{9}$

☐ $\frac{1}{18}$

☐ $\frac{1}{9}$

Ćwiczenie 5

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo wylosowania pary liczb, których iloczyn jest podzielny przez 7. Wówczas

☐ $p = \frac{1}{4}$

☐ $p = \frac{15}{64}$

☐ $p = \frac{7}{64}$

☐ $p = \frac{7}{32}$

Ćwiczenie 6

Rzucamy 3 razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia, że dokładnie raz wyrzucimy orła, jest równe

☐ $p = \frac{1}{3}$

☐ $p = \frac{3}{8}$

☐ $p = \frac{1}{4}$

☐ $p = \frac{1}{8}$

Ćwiczenie 7

Założmy, że w pewnym doświadczeniu losowym dane jest zdarzenie A , ponadto A' jest zdarzeniem przeciwnym do A oraz zachodzi równość $2 \cdot P(A) = 3 \cdot P(A')$. Stąd prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe

☐ $\frac{2}{5}$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{3}{5}$

☐ $\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 8

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia, że otrzymamy sumę oczek podzielną przez 7 lub przez 11, jest równe

☐ $\frac{1}{4}$

☐ $\frac{2}{9}$

☐ $\frac{1}{18}$

☐ $\frac{1}{9}$

Ćwiczenie 9

W każdym z dziewięciu pojemników znajduje się para kul: jedna biała, a druga – czerwona. Z każdego z tych dziewięciu pojemników losujemy jedną kulę. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród wylosowanych kul będzie tyle samo czerwonych, co białych. Wówczas

☐ $p = \frac{1}{5}$

☐ $p > \frac{5}{32}$

☐ $p < \frac{1}{5}$

☐ $p = \frac{5}{32}$

Ćwiczenie 10

W pewnej klasie stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy $7 : 11$. Losujemy osiem osób z tej klasy. Prawdopodobieństwo tego, że dwie z nich urodziły się w tym samym dniu tygodnia, jest

☐ równe $\frac{1}{4}$

☐ większe od $\frac{1}{2}$

☐ mniejsze od $\frac{1}{4}$

☐ równe $\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 11

W pudełku znajduje się 17 kul, ponumerowanych od 1 do 17. Z tego pudełka losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

1. kuli z numerem podzielny przez 5
2. kuli z nieparzystym numerem dwucyfrowym

Ćwiczenie 12

W pudełku znajduje się 130 losów, wśród których jest pewna liczba wygrywających. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierając z tego pudełka jeden los, wyciągniemy los wygrywający, jest równe $\frac{1}{26}$. Oblicz, ile jest losów pustych w tym pudełku.

Ćwiczenie 13

Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 39, 40\}$ dodatnich liczb całkowitych, które nie są większe od 40, wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo p otrzymania:

1. liczby mniejszej od 30
2. liczby dwucyfrowej.
3. liczby podzielnej przez 7
4. liczby, która nie dzieli się przez 4

Ćwiczenie 14

W auli pewnej szkoły wszyscy uczniowie klas trzecich będą pisać próbny egzamin maturalny. Na liście egzaminowanych jest: 36 uczniów klasy $3a$, w tym 16 dziewczynek, 35 uczniów klasy $3b$, w tym 14 dziewczynek, 31 uczniów klasy $3c$, w tym 12 dziewczynek oraz 38 uczniów klasy $3d$, w tym 35 dziewczynek. Dla każdego ucznia przygotowano jeden stolik, a stoliki ponumerowano kolejnymi liczbami, zaczynając od 1. Przed wejściem do auli uczniowie mają losować numer stolika, przy którym będą pisali ten próbny egzamin. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że numer 1 wylosuje:

1. osoba z klasy $3a$
2. osoba z klasy $3b$ lub z klasy $3c$
3. dziewczynka z klasy $3d$
4. chłopiec

Ćwiczenie 15

Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo p tego, że

1. wylosujemy liczbę, której iloczyn cyfr jest równy 24
2. wylosujemy liczbę, której suma cyfr jest mniejsza niż 17
3. wylosujemy liczbę, której suma cyfr jest parzysta
4. wylosujemy liczbę, której iloczyn cyfr jest parzysty

Ćwiczenie 16

100 uczniów klas trzecich brało udział w balu studniówkowym. Na początku tej imprezy zaplanowane były dwa tańce: polonez i walc. Poloneza zatańczyło 60 osób, natomiast walca zatańczyło 90 osób. Wiadomo też, że oba te tańce klasyczne zatańczyły 53 osoby. Oblicz prawdopodobieństwo p zdarzenia, polegającego na tym, że osoba wybrana losowo spośród uczestników balu nie zatańczyła żadnego z tych dwóch tańców.

Ćwiczenie 17

W klasie trzeciej jest 35 uczniów. W każdy piątek, w dodatkowych zajęciach z matematyki bierze udział 30 z nich, a w każdy wtorek 17 uczniów tej klasy bierze udział w dodatkowych zajęciach z geografii. Wiadomo też, że 4 spośród uczniów tej klasy nie bierze udziału w żadnym z tych dwóch dodatkowych rodzajów zajęć. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba wybrana losowo spośród uczniów tej klasy bierze udział zarówno w dodatkowych zajęciach z geografii, jak i z matematyki.

Ćwiczenie 18

W pewnym doświadczeniu losowym dane jest zdarzenie A , natomiast A' jest zdarzeniem przeciwnym do A . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A , wiedząc, że

1. $P(A) = 4 \cdot P(A')$

2. $2 \cdot P(A') = 7 \cdot P(A)$

3. $P(A) = P(A') + \frac{3}{17}$

4. $3 \cdot P(A) + 7 \cdot P(A') = 5\frac{2}{5}$

Ćwiczenie 19

W pewnym doświadczeniu losowym A i B są zdarzeniami, A' jest zdarzeniem przeciwnym do A , B' jest zdarzeniem przeciwnym do B .

1. Oblicz $P(A \cup B)$, wiedząc, że zdarzenia A i B są rozłączne oraz $P(A') = \frac{3}{4}$, $P(B') = 0,61$.

2. Oblicz $P(A \cap B)$, wiedząc, że $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A') = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{3}{4}$.

Ćwiczenie 20

W kopercie znajduje się 10 kartek, ponumerowanych od 1 do 10. Z tej koperty losujemy dwa razy po jednej kartce ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

1. dwóch kartek o różnych numerach,

2. takich dwóch kartek, że iloraz numeru na pierwszej kartce przez numer na drugiej kartce jest liczbą całkowitą.

Ćwiczenie 21

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo p zdarzenia, że

1. największa wyrzucona liczba oczek jest równa 1 lub 2, lub 3.
2. największa wyrzucona liczba oczek jest równa 5.

Ćwiczenie 22

Losujemy dwa wierzchołki spośród wszystkich wierzchołków siedmiokąta foremnego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy w ten sposób końce pewnej przekątnej tego wielokąta.

Ćwiczenie 23

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo:

1. zdarzenia A , polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest o 2 lub o 3 mniejsza od drugiej.
2. zdarzenia B , polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, których iloczyn jest podzielny przez 10.
3. zdarzenia C , polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, których suma jest podzielna przez 7.
4. zdarzenia D , polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, których suma kwadratów jest podzielna przez 3.

Ćwiczenie 24

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo takiego zdarzenia A , że w pierwszym rzucie wypadnie liczba oczek większa niż w drugim i iloczyn liczb wyrzuconych oczek będzie podzielny przez 4.

Ćwiczenie 25

Z pojemnika, w którym jest 20 losów: 3 wygrywające oraz 17 pustych, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo p zdarzenia, że oba wylosowane losy będą wygrywające.

Ćwiczenie 26

W kopercie jest 15 kartek ponumerowanych liczbami od 1 do 15. Z tej koperty losujemy jednocześnie dwie kartki. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

1. A – iloczyn liczb na wylosowanych kartkach jest nieparzysty,
2. B – suma liczb na wylosowanych kartkach jest nieparzysta.

Ćwiczenie 27

W klasie jest 35 uczniów, przy czym chłopców jest o 3 mniej niż dziewczynek. Losujemy dwie osoby z tej klasy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród wylosowanych osób będzie co najmniej jedna dziewczynka.

Ćwiczenie 28

W talii 52 kart do brydża jest po 13 kart w każdym z czterech kolorów: trefl, karo, kier, pik. W każdym kolorze jest jeden as, a także trzy figury: król, dama, walet oraz 9 kart numerowanych od 2 do 10. Z takiej talii 52 kart losujemy dwa razy po jednej karcie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo p zdarzenia, że obie wylosowane karty będą figurami. Zapisz wynik w postaci ułamka nieskracalnego.

Ćwiczenie 29

W pudełku znajdują się kule, przy czym co dziesiąta z nich jest biała, a każda z pozostałych ma kolor czerwony lub kolor zielony. Przy losowaniu jednej kuli z tego pudełka prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej lub zielonej jest trzy razy większe niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej lub białej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że przy losowaniu jednej kuli z tego pudełka wylosujemy kulę zieloną.

Ćwiczenie 30

Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – dokładnie raz wypadnie szóstka.

Ćwiczenie 31

W kopercie jest 5 kartek ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do 5. Losujemy z tej koperty po kolei 5 kartek, a wyniki kolejnych losowań notujemy jeden za drugim, zapisując w ten sposób liczbę pięciocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że w wyniku takiego postępowania zapiszemy liczbę, w której:

1. suma każdych dwóch sąsiednich cyfr będzie nieparzysta,
2. cyfry 1 oraz 2 będą zapisane na sąsiednich miejscach.

Ćwiczenie 32

Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Rozstrzygnij, które zdarzenie jest wtedy bardziej prawdopodobne: A – wypadła suma oczek równa 11 czy B – wypadła suma oczek równa 12.

Ćwiczenie 33

W pewnej grze losowej zakreślamy 6 liczb wybranych ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$. Wybrane liczby są następnie porównywane z sześcioma wylosowanymi z tego samego zbioru przez maszynę losującą. Oblicz prawdopodobieństwo p tego, że zakreślając 6 liczb trafisz główną wygraną, czyli prawidłowo wytypujesz wszystkie 6 wylosowanych numerów.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść rozszerzona)

Definicja: definicja ogólna prawdopodobieństwa

W doświadczeniu losowym określimy zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\},$$

a zdarzeniom elementarnym $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ przypiszemy takie liczby nieujemne odpowiednio $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, że $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$. Wówczas prawdopodobieństwem dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę $P(A)$, która jest sumą prawdopodobieństw przypisanych do zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A .

Przykład 1

Pokażemy, że w poprzednim przykładzie, w drugim sposobie rozwiązania postępowaliśmy zgodnie z ogólną definicją prawdopodobieństwa. Przyjeliśmy, że doświadczenie może skończyć się jednym z czterech możliwych wyników:

- w_1 – zdarzenie, że wylosujemy zadanie kodowane rozwiązane pierwszego dnia,
 - w_2 – zdarzenie, że wylosujemy zadanie testowe rozwiązane pierwszego dnia,
 - w_3 – zdarzenie, że wylosujemy zadanie kodowane rozwiązane drugiego dnia,
 - w_4 – zdarzenie, że wylosujemy zadanie testowe rozwiązane drugiego dnia.
- Rozpatrując te wyniki jako zdarzenia elementarne, otrzymujemy zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}.$$

Każdemu ze zdarzeń elementarnych przypisaliśmy prawdopodobieństwo takie , jak w poniższej tabeli:

Tabela. Dane			
Zdarzenie elementarne	w_1	w_2	w_3
prawdopodobieństwo	$p_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$	$p_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$	$p_3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$

Ponieważ spełniony jest warunek $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, więc jeżeli przez A oznaczymy zdarzenie, że wylosowano zadanie kodowane, to $A = \{w_1, w_3\}$ i prawdopodobieństwo p zdarzenia A jest równe

$$p = p_1 + p_3 = \frac{19}{50}.$$

Otrzymany wynik jest, oczywiście, zgodny z wynikiem otrzymanym w pierwszym sposobie rozwiązania (według schematu klasycznego).

Pokażemy formalnie, że definicja ogólna jest zgodna z definicją klasyczną prawdopodobieństwa.

Przykład 2

Rozpatrzmy doświadczenie losowe, w którym zbiór zdarzeń elementarnych to

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\},$$

przy czym zdarzeniom elementarnym $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ są przypisane takie liczby nieujemne, odpowiednio

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n,$$

że

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1.$$

Jeżeli przyjmiemy, że zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n,$$

to każdemu zdarzeniu elementarnemu przypisane jest prawdopodobieństwo równe $\frac{1}{n}$. Ponieważ zbiór zdarzeń elementarnych liczy n elementów, więc $|\Omega| = n$. Ponadto dowolnemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ sprzyja $|A|$ zdarzeń elementarnych, co oznacza, że $P(A)$ jest sumą $|A|$ liczb równych $\frac{1}{n}$.

Stąd $P(A) = |A| \cdot \frac{1}{n} = \frac{|A|}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$. To właśnie mieliśmy udowodnić.

Słowniczek

Definicja: definicja ogólna prawdopodobieństwa

W doświadczeniu losowym określimy zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\},$$

a zdarzeniom elementarnym $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ przypiszemy takie liczby nieujemne odpowiednio $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, że $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$. Wówczas prawdopodobieństwem dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę $P(A)$, która jest sumą prawdopodobieństw przypisanych do zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A .

Definicja: Dominanta

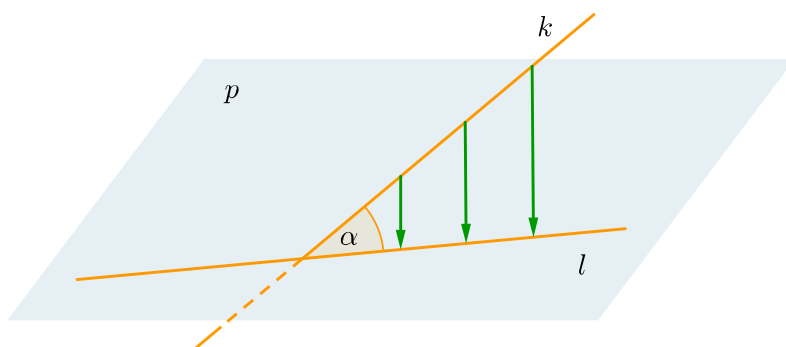
Dominantą (modą, wartością najczęstszą) nazywamy tę wartość, która występuje w próbie najczęściej.

Definicja: Graniastosłup prosty

Graniastosłup prosty to taki wielościan, którego dwie przystające ściany (podstawy graniastosłupa) są położone w równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany są prostokątami.

Definicja: kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Rozpatrzmy płaszczyznę p oraz prostą k , która nie jest ani równoległa, ani prostopadła do płaszczyzny p . Kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny p nazywamy kąt ostry między tą prostą i jej rzutem prostokątnym l na płaszczyznę p .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: k-elementowa kombinacja zbioru n-elementowego

Każdy k -elementowy podzbiór zbioru n -elementowego ($0 \leq k \leq n$) nazywa się zwyczajowo k -elementową kombinacją zbioru n -elementowego.

Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Rozpatrzmy doświadczenie losowe, w którym wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, a Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem $P(A)$ zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy wówczas iloraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Własność: Liczba elementów sumy n zbiorów rozłącznych

Jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Regułę, która jest zapisana w powyższym wzorze, nazywamy regułą dodawania.

Twierdzenie: liczba k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego

Liczba $\binom{n}{k}$ wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego jest równa

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1}.$$

Definicja: liczba k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego

Rozpatrzmy zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, który ma n ($n \geq 1$) elementów.

Symbolem $\binom{n}{k}$ oznaczamy liczbę jego wszystkich podzbiorów k -elementowych ($k \geq 0$ i $k \leq n$).

Zapis symboliczny $\binom{n}{k}$ odczytujemy „ n po k ”, stąd np.:

- $\binom{5}{2}$ czytamy „pięć po dwa”,
- $\binom{7}{1}$ czytamy „siedem po jeden”,
- $\binom{6}{0}$ czytamy „sześć po zero”.

Własność: liczba k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego

Liczba wszystkich k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest równa

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{\text{czynników}}$$

Własność: liczba k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego

Liczba wszystkich k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego jest równa n^k .

Definicja: Mediana

Medianą (wartością środkową) uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n liczb $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$ jest:

- dla nieparzystej liczby n środkowy wyraz ciągu, czyli wyraz $x_{\frac{n+1}{2}}$,
- dla parzystej liczby n średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu, czyli $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$.

Definicja: Odchylenie przeciętne

Odchyleniem przeciętnym liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę

$$\frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Definicja: Odchylenie standardowe

Odchyleniem standardowym σ liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Kwadrat tej wielkości nazywamy wariancją i oznaczamy symbolem σ^2 , czyli

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Twierdzenie: o dwóch płaszczyznach równoległych przeciętych płaszczyzną

Jeżeli płaszczyzna przecina każdą z dwóch płaszczyzn równoległych, to otrzymane krawędzie przecięcia są prostymi równoległymi.

Twierdzenie: o dwóch różnych płaszczyznach nierównoległych

Jeżeli dwie różne płaszczyzny p_1 i p_2 mają wspólne dwa różne punkty A i B , to prosta AB leży zarówno w płaszczyźnie p_1 , jak i w płaszczyźnie p_2 . Mówimy wtedy, że prosta AB jest krawędzią przecięcia tych płaszczyzn.

W przestrzeni istnieją również pary płaszczyzn, które nie mają punktów wspólnych.

Twierdzenie: o prawdopodobieństwie sumy dwóch zdarzeń

Założmy, że A oraz B są zdarzeniami ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω . Wtedy prawdopodobieństwo sumy $A \cup B$ zdarzeń A oraz B wyraża się wzorem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

gdzie $A \cap B$ to zdarzenie, które jest iloczynem (częścią wspólną) zdarzeń A , B .

Twierdzenie: o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego

Założmy, że A jest zdarzeniem ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω . Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia A' , przeciwnego do A , wyraża się wzorem

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Twierdzenie: o prostej prostopadłej do płaszczyzny

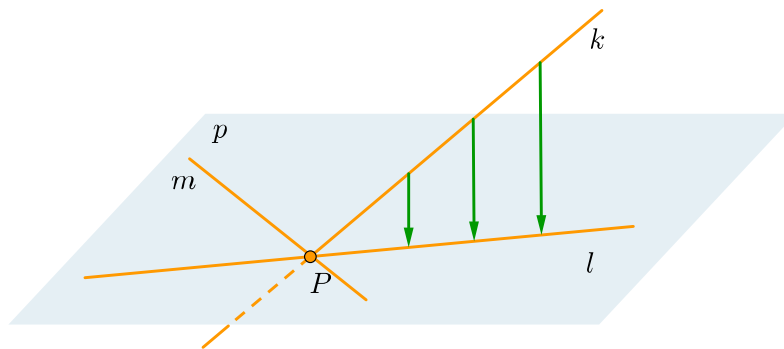
Rozpatrzmy płaszczyznę p oraz dwie zawarte w tej płaszczyźnie proste l i m , które przecinają się w punkcie O . Jeżeli prosta k przebija płaszczyznę p w punkcie O tak, że jest prostopadła zarówno do prostej m , jak i do prostej l , to jest ona prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie p i przechodzącej przez punkt O .

Definicja: Ostrosłup

Ostrosłup to taki wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Reguła: o trzech prostych prostopadłych

Rozpatrzmy płaszczyznę p oraz prostą k , która przebija tę płaszczyznę w punkcie P . Oznaczmy przez l prostą, która jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę p . Wówczas dowolna prosta m leżąca w płaszczyźnie p jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dowód

Rozpatrzmy na prostej k punkt K różny od P . Jego rzutem prostokątnym jest punkt L , który leży na prostej l .

 Rysunek płaszczyzny p oraz prostej k , która przebija tę płaszczyznę w punkcie P . Zaznaczono prostą l , która jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę p oraz prostą m leżącą na tej płaszczyźnie prostopadłą do prostych k i l . Na prostej k leży punkt K różny od punktu P oraz punkt L , który jest rzutem prostokątnym punktu K .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wtedy prosta KL jest prostopadła do płaszczyzny p , a więc każda płaszczyzna, która zawiera prostą KL , jest prostopadła do p . Jedną z takich płaszczyzn jest ta, którą wyznaczają proste k i l . Nazwijmy tę płaszczyznę p' .

Rozpatrzmy prostą n leżącą w płaszczyźnie p' , przechodzącą przez punkt P i równoległą do KL .

 Rysunek płaszczyzny p oraz prostej k , która przebija tę płaszczyznę w punkcie P . Zaznaczono prostą l , która jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę p oraz prostą m leżącą na tej płaszczyźnie prostopadłą do prostych k i l . Na prostej k leży punkt K różny od punktu P oraz punkt L , który jest rzutem prostokątnym punktu K . Prosta n jest równoległa do prostej KL .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ prosta n jest prostopadła do płaszczyzny p , więc jest również prostopadła do prostej m .

Zatem:

- jeżeli m jest także prostopadła do k , to jest prostopadła do płaszczyzny p' (bo jest prostopadła do dwóch prostych leżących w tej płaszczyźnie: n oraz k), zatem i do prostej l ,

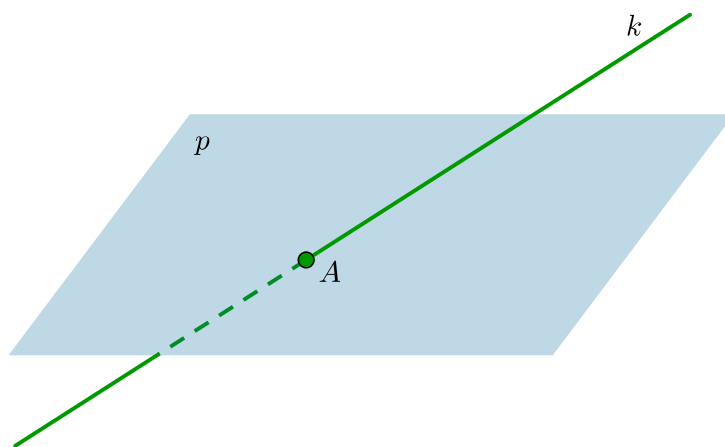
- jeżeli m jest także prostopadła do l , to jest prostopadła do płaszczyzny p' (bo jest prostopadła do dwóch prostych leżących w tej płaszczyźnie: n oraz l), zatem i do prostej k .

Oznacza to, że prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l .

To spostrzeżenie kończy dowód.

Definicja: prosta przebijająca płaszczyznę

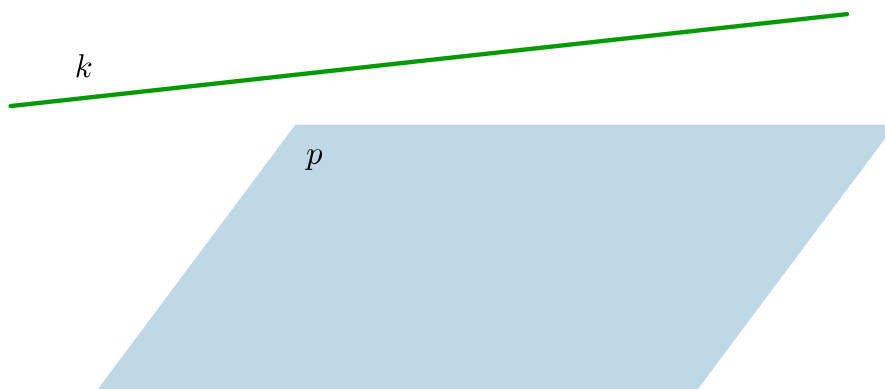
Prosta, która nie leży w płaszczyźnie i nie jest do tej płaszczyzny równoległa, ma dokładnie jeden punkt wspólny z tą płaszczyzną. Mówimy, że prosta przebija płaszczyznę w tym punkcie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: prosta równoległa do płaszczyzny

Prosta, która nie leży w płaszczyźnie i nie ma z tą płaszczyzną punktów wspólnych, jest równoległa do tej płaszczyzny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: prostej prostopadłej do płaszczyzny

Prostą k , przebijającą płaszczyznę p w punkcie O nazywamy prostopadłą do tej płaszczyzny, gdy prosta k jest prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie p i przechodzącej przez punkt O .

Definicja: proste skośne w przestrzeni

Dwie proste w przestrzeni, które nie leżą w jednej płaszczyźnie, nazywamy prostymi skośnymi.

Twierdzenie: Reguła mnożenia

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_n$$

Powołując się na regułę mnożenia, można pokazać, że liczba n , która w rozkładzie na czynniki pierwsze daje się zapisać w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi, a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są dodatnimi liczbami całkowitymi,

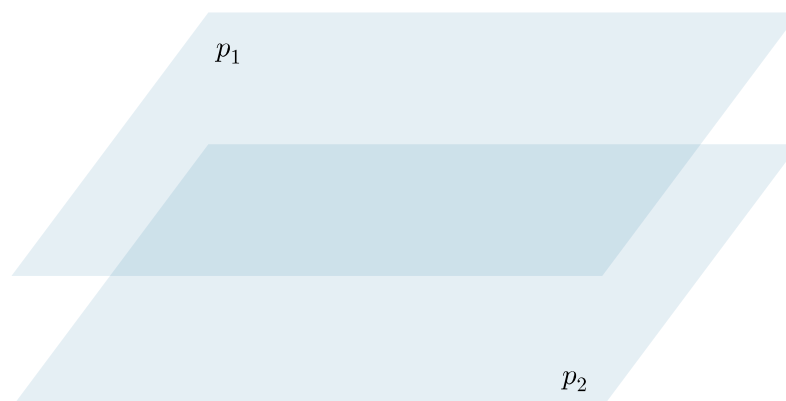
ma

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$$

dodatnich dzielników całkowitych.

Definicja: Różne płaszczyzny równoległe

Dwie różne płaszczyzny, które nie mają punktów wspólnych, nazywamy płaszczyznami równoległymi.



Definicja: Stożek

Stożek to bryła, która powstała w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.

Definicja: Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Definicja: Średnia ważona

Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$, którym przyporządkowane są odpowiednio dodatnie wagi $w_1, w_2, \dots, w_n$, nazywamy liczbę $\bar{x}_w = \frac{x_1 \bullet w_1 + x_2 \bullet w_2 + \dots + x_n \bullet w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$.

Definicja: Walec

Walec jest to bryła, która powstała w wyniku obrotu prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta.

Twierdzenie: Wariancja liczb

Wariancja liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest równa

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \left(\bar{x}\right)^2$$

Dowód

Przekształcając wzór z definicji wariancji, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \dots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n} = \\&= \frac{x_1^2 - 2x_1 \cdot \bar{x} + \left(\bar{x}\right)^2 + x_2^2 - 2x_2 \cdot \bar{x} + \left(\bar{x}\right)^2 + \dots + x_n^2 - 2x_n \cdot \bar{x} + \left(\bar{x}\right)^2}{n} = \\&= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2\bar{x} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{n \cdot \left(\bar{x}\right)^2}{n} = \\&= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2 \cdot \left(\bar{x}\right)^2 + \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \left(\bar{x}\right)^2\end{aligned}$$

Definicja: Zdarzenie

Dowolny podzbiór zbioru Ω będziemy nazywać zdarzeniem, a elementy takiego podzbioru będziemy nazywać **zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi temu zdarzeniu**.

Zbiór pusty, czyli zdarzenie, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne, nazywamy zdarzeniem niemożliwym.

Zbiór Ω , czyli zdarzenie, któremu sprzyja każde zdarzenie elementarne, nazywamy zdarzeniem pewnym.

Definicja: zdarzenie przeciwne

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A , należącego do zbioru zdarzeń elementarnych Ω , nazywamy takie zdarzenie A' należące do Ω , któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, które nie sprzyjają zdarzeniu A .

Z tej definicji wynika, że również zdarzenie A jest zdarzeniem przeciwnym do A' .